УДК 624.04:539:519.6

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ Т-ОБРАЗНОЙ РАМЫ

Монахов Владимир Андреевич,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г.Пенза,

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Довженко Алена Михайловна,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г.Пенза,

студент.

Майорова Елена Борисовна,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г.Пенза,

студент.

Аннотация

Разработана методика расчёта стержневой системы по несущей способности с использованием матрицы равновесия, формируемой в автоматическом режиме на основе графа стержневой системы. В процессе построения матрицы используются матричные преобразования векторов перемещений системы при переходе от локальных систем координат к глобальной системе. Совокупность всего лишь трёх базовых матриц стержневой системы: матрицы инцидентности графа, характеризующего топологическую структуру расчётной схемы, матрицы направляющих косинусов углов наклона векторов перемещений и матрицы длин стержней решает проблему автоматического построения не только матрицы равновесия, но и матрицы условий текучести рамы. В соответствии со статической теоремой теории предельного равновесия методом линейного программирования в автоматическом режиме определена предельная нагрузка Т-образной рамы.

Ключевые слова: стержневая система, граф рамы, матрица инцидентности, вектор узловых нагрузок, матрица равновесия, вектор перемещений, условия текучести рамы, предельная нагрузка.

A LOAD-BEARING CAPACITY OF A T-SHAPED FRAME.

Monakhov Vladimir Andreevich,
Penza State University of Architecture and Construction, Penza,
Doctor of Sciences, Professor of the department "Mechanics".
Dovzhenko Alyona Mihajlovna,
Penza State University of Architecture and Construction, Penza,
student.
Mayorova Elena Borisovna,
Penza State University of Architecture and Construction, Penza,
student.

Abstract

This paper presents a calculation procedure of a load-bearing capacity of a bar system using an equilibration matrix, which was automatically based on a graph of a bar system. There have been used matrix conversions of displacement vectors of elements during the transition from local to global systems. A set of matrices consisting of an incidence matrix of a graph, describing a topological structure of the analytical model, matrices of direction cosines of the angels of displacement vectors and matrices of bar length solves the problem not only of automatic construction but matrix of yield conditions of a frame. In this article according to static theorem of limit equilibrium has been determined the limit load of a bar system by method of linear programming.

Keywords: a bar system, a graph of frame, an incidence matrix, a vector of nodal loads, an equilibration matrix, a displacement vector, yield conditions of frame, a limit load.

Представляя стержневую систему в виде набора отдельных упругих элементов, связанных в точках дискретизации (узлах) упругоподатливыми «шарнирами» (рисунок 1 а, б), напряжённо-деформированное состояние упругой рамы можно описать тремя уравнениями матричного вида [1], а именно:

– уравнением равновесия

$$[V]\overline{N}=\overline{P} \qquad (1)$$

где V – матрица равновесия, $\overline{N}$ – вектор-столбец внутренних усилий в расчётных сечениях (шарнирных узлах) стержневой системы, куда, наряду с изгибающими моментами, входят также и продольные силы; $\overline{P}$ – вектор-столбец внешних узловых нагрузок, который в качестве компонент может содержать не только силы, но и сосредоточенные моменты; в общем случае порядок вектора $\overline{P}$ определяется числом степеней свободы принятой дискретной модели стержневой системы, а порядок вектора $\overline{N}$ совпадает с числом элементов;

– геометрическими соотношениями

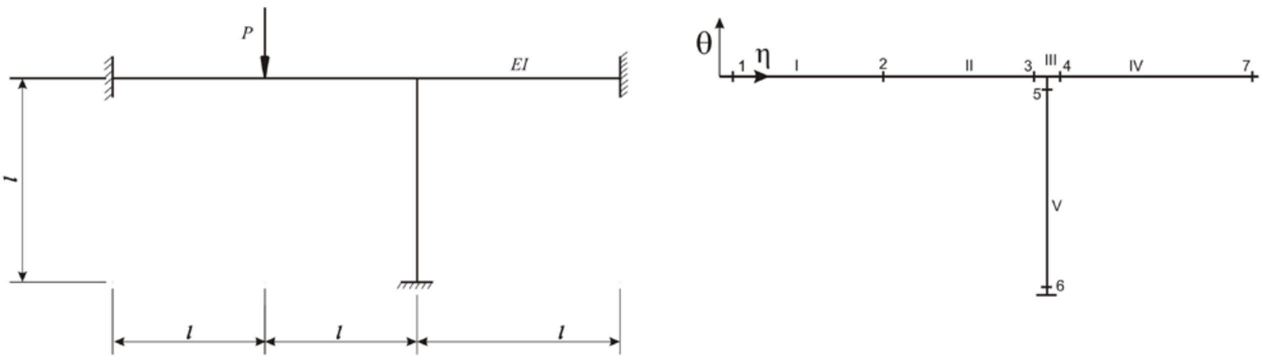
$$\overline{\chi}=[\mathit{\Gamma}]\overline{\zeta}, \qquad (2)$$

где $\overline{\chi}$ – вектор-столбец сосредоточенных деформаций в узлах, как угловых, так и линейных, $[\Gamma]$ – геометрическая матрица, $\overline{\zeta}$ – вектор-столбец узловых перемещений, заданных в глобальной системе координат $\eta\Omega\theta$, и

– физическими зависимостями

$$\overline{N}=[r]\overline{\chi}, \qquad (3)$$

устанавливающими связь между усилиями и деформациями; здесь $\overline{N}=[r]\overline{\chi}$ – квазидиагональная матрица внутренней жёсткости системы, составленная из ячеек жёсткости отдельных элементов.



а) б)

Рисунок 1 – Стержневая система в виде набора отдельных упругих элементов, связанных в точках дискретизации упругоподатливыми «шарнирами»

На основе уравнений состояния распределение внутренних усилий в стержневой системе может быть установлено в одной из форм:

1. $$\overline{N} = [r][\Gamma]\left([\Gamma]^T[r][\Gamma]\right)^{-1}\overline{P}, \tag{4}$$

либо

2. $$\overline{N} = [r][V]^T\left([V][r][V]^T\right)^{-1}\overline{P} \tag{5}$$

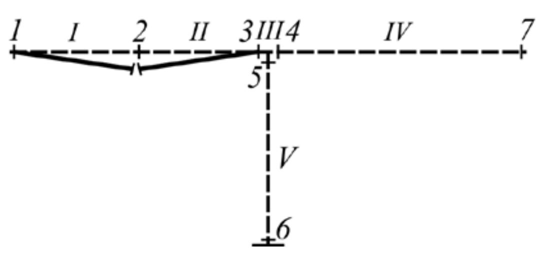
либо

3. $$\overline{N} = [\Lambda]\overline{P}, \tag{6}$$

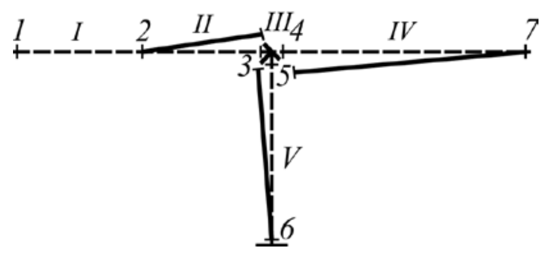
поскольку матрицы влияния усилий $[\Lambda]$, равновесия системы $[V]$ и геометрическая матрица $[\Gamma]$ в силу принципа двойственности связаны между собой.

При определении несущей способности стержневую систему следует представить в виде непрерывной цепи жёсткопластических звеньев, связанных в узлах «пластическими шарнирами» (рисунок 1,б) [2]. В соответствии с алгоритмом определения предельной нагрузки на основе статической теоремы теории предельного равновесия из вышеуказанных уравнений состояния понадобятся только условия равновесия, т.е. уравнение $[V]\overline{N} = \overline{P}$, где $[V]=\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\frac{2EI}{l}$ – матрица равновесия рамы, которая на основании принципа двойственности находится путём транспонирования геометрической матрицы [3], $\overline{P}=(P,\quad 0)^T$ – вектор-столбец внешнего воздействия, в котором в качестве одной из компонент служит сила P; $\overline{N}$ – вектор-столбец изгибающих моментов в расчётных сечениях (в шарнирных узлах) стержневой системы; порядок вектора $\overline{P}$, очевидно, равен 7, а порядок вектора $\overline{N}$ совпадает с числом узлов.

Для описания предельного состояния необходимо дополнительно сформировать ещё условия, при соблюдении которых происходит потеря несущей способности вследствие возникновения пластичности в наиболее напряжённых сечениях стержней рамы. Минимальное количество опасных сечений в общем случае определяется степенью статической неопределимости рамы плюс единица $k=n+1$, т. к. в момент потери несущей способности рама превращается в механизм с одной степенью свободы. При $k>1$ наблюдается избыточная схема разрушения; если $k<1$ – частичная. Очевидно, в рассматриваемой раме ($n=6$) скорее всего, возникнет частичное разрушение «по балочной схеме» вследствие образования всего лишь трёх пластических шарниров в 1, 2, 3 сечениях левого ригеля (рисунок 2, а). Другая возможная схема (схема б) здесь нереализуема, т. к. узел рамы не нагружен. В общем случае узловой механизм всё же следует принимать во внимание, т. к. он может сочетаться с балочным. При этом возможен ещё вариант поворота узла в направлении, противоположном указанному на схеме б.



а)



б)

Рисунок 2 – Схемы разрушения рамы

Условия текучести стержня также следует представить в матричной форме. Для стержней прямоугольного поперечного сечения справедливо нелинейное условие текучести вида

$$g(\varphi) = \pm m + n^2 - 1 = 0\,, \qquad (7)$$

где $m_j = M_j / M_{jT}$ и $n_j = N_j / N_{jT}$ – безразмерные величины изгибающих моментов и продольных сил в произвольном j-ом сечении стержня (кривая – парабола а) на рисунке 3).

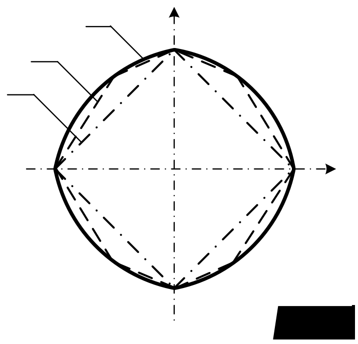


Рисунок 3 – Условие текучести стержня

При решении практических задач, да и в теоретических исследованиях, часто используется аппроксимация нелинейного условия текучести (7), сводимая к замене параболы (кривой линии а) на рисунке 3) вписанным восьмиугольником (прямые б) или даже квадратом (прямые в). В частности, уравнения сторон восьмиугольника текучести:

$$\left.\begin{aligned} &\pm m_j \pm \frac{1}{2} n_j \le 1\ , \\ &\pm \frac{2}{3} m_j + n_j \le 1\ , \end{aligned}\right. \qquad (j = 1,\ 2,\ldots,k) \qquad (8,а)$$

или квадрата

$$|m_j| + |n_j| \le 1 \qquad (j = 1,\ 2,\ldots,k) \qquad (8,б)$$

при численном расчёте рамы следует перевести в матричную форму. Например, линеаризованные условие текучести (8,а) отдельного стержня можно записать в матричном виде

$$[\eta_{Hj}]\,\overline{F}_j \le 1 \qquad (j = 1,2,\ldots,k), \qquad (9)$$

если воспользоваться ячейкой сита, структура которой позволяет разом выделять продольные силы и моменты

$$
[\eta_{Hj}] = \begin{bmatrix}
1/2 & 0 & 1 & & & \\
1/2 & 0 & -1 & & & \\
-1/2 & 0 & 1 & & & \\
-1/2 & 0 & -1 & & 0 & \\
1 & 0 & 2/3 & & & \\
1 & 0 & -2/3 & & & \\
-1 & 0 & 2/3 & & & \\
-1 & 0 & -2/3 & & & \\
 & & & 1/2 & 0 & 1 \\
 & & & 1/2 & 0 & -1 \\
 & & & -1/2 & 0 & 1 \\
 & 0 & & -1/2 & 0 & -1 \\
 & & & 1 & 0 & 2/3 \\
 & & & 1 & 0 & -2/3 \\
 & & & -1 & 0 & 2/3 \\
 & & & -1 & 0 & -2/3
\end{bmatrix} \qquad (10)
$$

Обобщённый вектор усилий j-го стержня

$$
\overline{F}_j = \begin{pmatrix} \bar{f}_j \\ \lambda_j \; \bar{f}_j \end{pmatrix} = [T_j^0]\overline{T}_j = \begin{pmatrix} N_j/N_{jT} \\ Q_j/Q_{jT} \\ M_j/M_{jT} \\ N_j/N_{jT} \\ Q_j/Q_{jT} \\ (dQ_j + M_j)/M_{jT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_j \\ q_j \\ m_j \\ n_j \\ q_j \\ c_j q_j + m_j \end{pmatrix}
$$

содержит три безразмерных параметра: поперечных и продольных сил и изгибающих моментов: $q_j = Q_j/Q_{jT}$, $n_j = N_j/N_{jT}$, $m_j = M_j/M_{jT}$ на торцах стержня; N_{jT}, Q_{jT}, M_{jT} – предельные значения поперечных и продольных сил и изгибающих моментов; $c_j = Q_{jT} l/M_{jT}$ – параметр геометрических размеров j-го звена известен из расчётной схемы.

Структура ячейки $\lfloor \eta_{Hj} \rfloor$ $(j = 1,2,...,k)$ в условии текучести (8,б) выглядит намного проще:

$$\left[\eta_{Hj}\right]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (11)$$

В том случае, когда продольные силы не оказывают существенного влияния на напряжённое состояние рамы, применяется простейшее условие текучести

$$\left|m_j\right| \le 1. \qquad \left(j=1,\ 2,\ldots,k\right) \qquad (12)$$

Для всей рамы, представленной многозвенной цепью из k участков, используется квазидиагональная матрица ранжирования:

$$\left[E_H\right]=\begin{bmatrix} \left[\eta_{H1}\right] & & & & & \\ & \left[\eta_{H2}\right] & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \left[\eta_{Hj}\right] & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \left[\eta_{Hk}\right] \end{bmatrix},$$

состоящая из k одинаковых ячеек типа $\left[\eta_{Hj}\right]$ продольных сил и моментов $n_j,\ m_j\ \ \left(j=1,2,\ldots,k\right)$ отдельных звеньев.

Условие текучести рамы в целом имеет вид $\left[E_H\right]\overline{R} \le 0$, где $\overline{R}$ – вектор внутренних усилий системы.

Применение матричного условия текучести при определении предельных нагрузок стержневых систем численным способом сводится к решению задачи математического (линейного) программирования, представленной в матричной форме. Согласно статической теореме теории предельного равновесия нагрузка, соответствующая статически возможному состоянию механической системы, меньше, чем предельная. Следовательно, определив максимальное значение параметра нагрузки при одновременном соблюдении условий равновесия и текучести, с помощью методов математического программирования можно установить его предельное значение.

Система разрешающих уравнений записывается в матричной форме

$$[U]\overline{Y} = \overline{Q}, \qquad (13)$$

где первые i=7 строк матрицы [U] предельного состояния рамы косвенно выражают ограничения (12). Косвенно, поскольку в соответствии со стандартной программой присоединённой задачи линейного программирования (ЛП) следует перейти от условий текучести в виде неравенств к равенствам. Указанный переход осуществляется путём введения дополнительных неизвестных X_{i+k}. В таком случае неизвестные изгибающие моменты в опасных сечениях рамы находятся по формуле

$$m_i = X_{i+k} - M_T \quad (i = 1,2,...,7;\; k = 7),$$

и тогда, очевидно, все $X_{i+k} \geq 0 \quad (i = 7;\; k = 1,2,...,7)$, а условия текучести принимают новую форму

$$X_{i+k} \leq 2M_T.$$

С позиций теории линейного программирования величина $X_{i+k+1} = p$ является целевой функцией задачи ЛП. В соответствии с используемой в статье программой решения (присоединённой) задачи симплекс-метода ЛП её следует взять с отрицательным знаком.

В результате вычисления целевой функции по программе ЛП определена величина предельной нагрузки рамы $P_T = 2M_T$. Механизм разрушения рамы показан на рисунке 2,а.

Библиографический список:

1. Ржаницын А.Р. Расчёт стержневых систем на основе принципа двойственности // Исследования по теории сооружений: сб.ст. М.: Стройиздат, 1980. Вып. XXIV. С. 10-23.

2. Ерхов М.И. Теория идеально пластических тел и конструкций: Монография. М.: Наука, 1978. 352 с.

3. Монахов В.А., Зернов В.В., Тульчинская О. Приложение принципа двойственности к формированию матрицы равновесия стержневой системы //

Актуальные проблемы механики в современном строительстве: материалы II международ. науч.-техн. конф. Пенза: ПГУАС, 2014. С. 124-133.

4. Монахов В.А. О несущей способности пологих арок // Строительная механика и расчет сооружений. 1976. №5. С. 29-34.