

УДК 539.373

ИССЛЕДОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ИЗГИБА СТЕРЖНЯ СО СТУПЕНЧАТЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Бакушев Сергей Васильевич,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г.Пенза,*

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Аннотация

Рассматривается задача расчёта изгибаемого стержня, находящегося в условиях плоского поперечного упругопластического изгиба, в условиях полной пластичности. Оценивается несущая способность и жёсткость изгибаемого стержня, поперечное сечение которого отлично от прямоугольного и его ширина изменяется по высоте сечения дискретно. В качестве внешней нагрузки принимается в первом случае сосредоточенная сила, приложенная в середине пролёта; во втором случае – это равномерно-распределённая нагрузка, действующая по всей длине стержня. На основании выполненных численных исследований даются рекомендации для проектирования балок, работающих в условиях упругопластического изгиба.

Ключевые слова: пластичность, упругопластический изгиб, сечение с двумя осями симметрии.

STUDY ON ELASTIC-PLASTIC BENDING OF A ROD WITH STEPPED CROSS-SECTION

Bakushev Sergey Vasilevich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor of the department “Mechanics”.

Abstract

The task of calculating bending rod in the state of flat cross elastoplastic bend in the condition of complete plasticity is discussed. Bearing ability and rigidity of the bending rod are evaluated; its cross section differs from the rectangular one and its width changes along the height of section discretely. As an external loading in the first case we take concentrated force applied in the middle of a span; in the second case – it is uniformly loading acting along the whole length of the rod. According to the results of digital research some recommendations are given for designing beams working in the condition of elastoplastic bending.

Keywords: plasticity, plasto-elastic bend, section with two axes of symmetry.

Введение. Современные методы расчёта стальных конструкций предписывают выполнять расчёт с максимально полным использованием их несущей способности. Это обеспечивается учётом пластических свойств материала, что позволяет выявить скрытые резервы и прочности, и жёсткости. В СП 35.13330.2011 (Актуализированная редакция СНиП 2.05.03-84* «Мосты и трубы») в разделе 8 «Стальные конструкции», подразделах 8.26, 8.27, 8.28, 8.29 – «Расчёты на прочность» – изгибаемые, внецентренно сжатые, сжато-изгибаемые, внецентренно растянутые и растянуто-изогнутые элементы рассчитываются на прочность с учётом ограниченной пластической деформации путём введения коэффициента η , величина которого вычисляется в зависимости от соотношения среднего касательного напряжения в стенке балки и расчётного сопротивления материала элемента конструкции на сдвиг. Это положение справедливо, если стальная конструкция имеет простое поперечное сечение, например прямоугольное, прямоугольное коробчатое или двутавровое. Вместе с тем использование в практике проектирования балок с другими формами поперечного сечения, например сечения с двумя полками – внешней и внутренней, может выявить скрытые резервы и несущей способности и жёсткости таких конструкций.

Как известно при упругой работе балки её несущая способность и жёсткость обеспечивается, кроме всего прочего, развитыми в ширину полками при достаточно тонкой стенке. Этому условию удовлетворяют балки, поперечные сечения которых похоже на двутавровое. С другой стороны, если балка испытывает упругопластический изгиб, то наиболее эффективным является развитое в направлении нейтральной оси поперечное сечение, то есть похожее на ромб. Однако при этом балка будет обладать недостаточной жёсткостью. Таким образом, вопросы проектирования балок для работы в условиях упругопластического изгиба всё ещё требуют всесторонней проработки.

В данной работе оценивается несущая способность и жёсткость балки, поперечное сечение которой отлично от прямоугольного и его ширина изменяется по высоте сечения дискретно. На основании результатов выполненных численных исследований для различных размеров ширины и высоты внешней и внутренней полок даются рекомендации для проектирования балок, работающих в условиях упругопластического изгиба.

Исходные данные для расчёта. Плоский поперечный упругопластический изгиб стержней, поперечное сечение которых имеет две оси симметрии, на основе идеализированной диаграммой Прандтля, относят к простейшим задачам теории пластичности. Основные положения расчёта на изгиб упругопластического стержня с двумя осями симметрии достаточно подробно описаны в специальной литературе, например [1], [2], [3], [4], [5], а также изложены в статьях [6], [7], [8].

Исследование напряжённо-деформированного состояния стержня, находящегося в условиях упругопластического изгиба сталкивается со значительными математическими трудностями, связанными, прежде всего, с необходимостью построения аналитического выражения для высоты упругого ядра как функции продольной координаты. Если ширина поперечного сечения изменяется по его высоте дискретно, то аналитическое построение выражения для высоты упругого ядра как функции продольной координаты, практически

невозможно. Вместе с тем, если для расчёта стержня, находящегося в условиях упругопластического изгиба, воспользоваться готовыми математическими пакетами из библиотеки прикладных программ для персональных компьютеров, например пакетом MathCAD, то эти затруднения успешно, хотя и не просто, преодолеваются.

Будем рассматривать плоский упругопластический изгиб стального стержня на двух опорах (рисунок 1), нагруженный в одном случае сосредоточенной силой F , приложенной в середине пролёта; в другом – равномерно-распределённой нагрузкой q , приложенной на всей длине пролёта. Материал стержня работает в соответствии с идеализированной диаграммой Прандтля в условиях полной пластичности в опасном сечении.

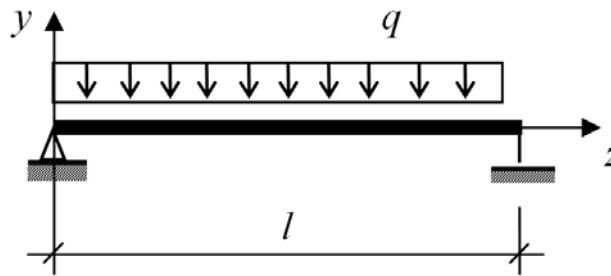


Рисунок 1 – Схема стержня

Поперечное сечение стержня имеет форму равнополочного двутавра с двумя полками (рисунок 2). Длина стержня $l = 6,0$ м; высота поперечного сечения $h = 0,4$ м; толщина стенки $b = 0,025$ м; предел текучести материала стержня $\sigma_T = 240 \cdot 10^6$ Па; модуль упругости $E = 200 \cdot 10^9$ Па. Ширина b_v и b_n , а также высота a_v и a_n полок варьируются.

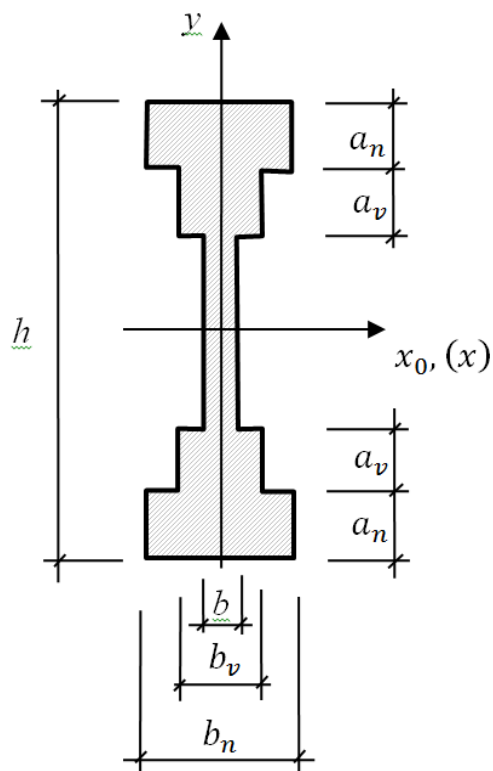


Рисунок 2 – Поперечное сечение стержня.

Рассматривается шесть вариантов (шесть типов) поперечных сечений стержня, показанных на рисунке 3. Соотношения геометрических размеров следующие:

тип 1: $a_n = 2b$; $a_v = 2b$; $b_n = 3b$; $b_v = 2b$;

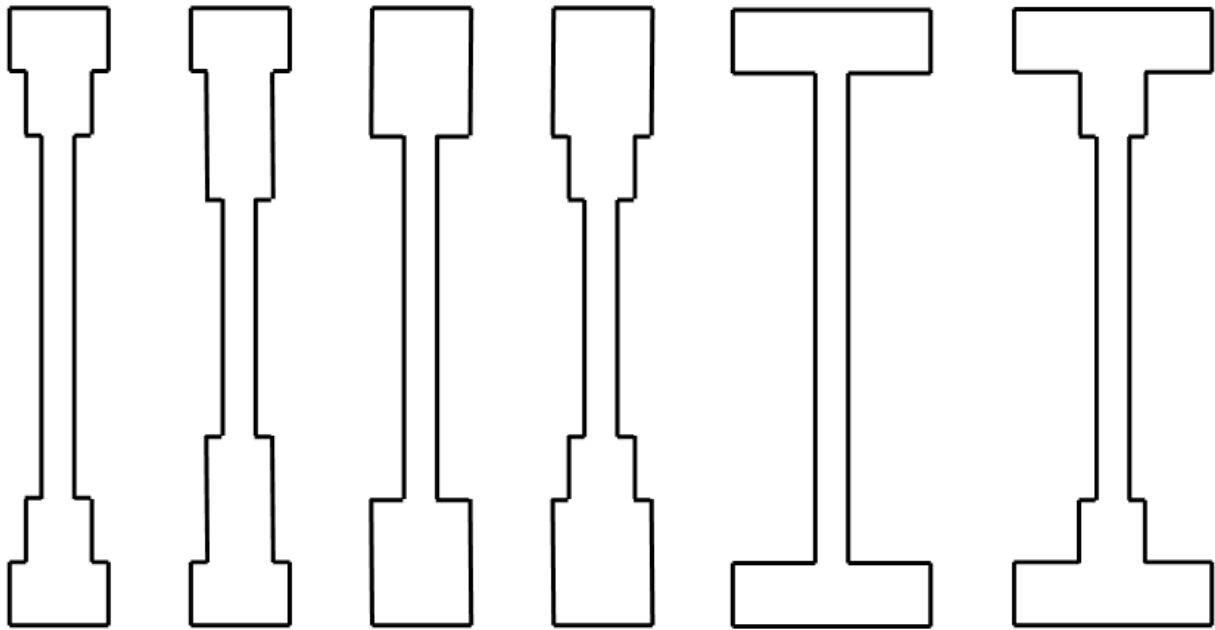
тип 2: $a_n = 2b$; $a_v = 4b$; $b_n = 3b$; $b_v = 2b$;

тип 3: $a_n = 2b$; $a_v = 2b$; $b_n = 3b$; $b_v = 3b$;

тип 4: $a_n = 4b$; $a_v = 2b$; $b_n = 3b$; $b_v = 2b$;

тип 5: $a_n = b$; $a_v = b$; $b_n = 6b$; $b_v = 6b$;

тип 6: $a_n = 2b$; $a_v = 2b$; $b_n = 6b$; $b_v = 2b$.



Тип 1

Тип 2

Тип 3

Тип 4

Тип 5

Тип 6

Рисунок 3 – Типы рассматриваемых поперечных сечений.

Анализ численных экспериментов. В результате расчётов определялись и анализировались следующие величины: I_{x_0} – момент инерции поперечного сечения относительно центральной оси (для поперечного сечения с двумя осями симметрии нейтральная ось в стадии упругопластического деформирования будет совпадать с центральной осью); $S_x^{n.c.}$ – статический момент полусечения; $M_{x_0}^T$ – изгибающий момент, при котором в опасном сечении появляется текучесть в фибровых волокнах; $M_{разр}$ – величина разрушающего момента, соответствующая шарниру пластичности; β – коэффициент повышение несущей способности изгибаемого стержня, рассчитанного по разрушающему моменту; F_y – нагрузка в виде сосредоточенной силы, при которой напряжения в фибровых волокнах опасном сечении достигают величины предела текучести; F_t – величина разрушающей нагрузки в виде сосредоточенной силы; q_y – равномерно-распределённая нагрузка, при которой напряжения в фибровых волокнах опасном сечении

достигают величины предела текучести; q_t – величина равномерно-распределённой разрушающей нагрузки; $z_{лев}$ и $z_{прав}$ – левая и правая границы упругопластической области, измеренные по фибровому волокну; V_{max}^t – максимальный прогиб изогнутой оси балки при образовании пластического шарнира; V_{max}^y – максимальный прогиб изогнутой оси балки при достижении напряжения в фибровых волокнах опасного сечения величины предела текучести; $V_{ост}^t$ – максимальная величина остаточного прогиба балки после её полной разгрузки от шарнира пластичности.

Все расчёты выполнены с использованием математического пакета MathCAD; построение функции высоты упругого ядра при сложном поперечном сечении стержня решается при помощи квадратичной сплайн-интерполяции [9]. Результаты расчётов приведены в таблице 1.

На основании численного эксперимента можно сделать следующие выводы:

1. При монотонном увеличении момента инерции поперечного сечения относительно центральной оси I_{x_0} изгибающий момент, при котором в фибровых волокнах напряжения достигают предела текучести $M_{x_0}^T$, также монотонно возрастает независимо от соотношения размеров полков поперечного сечения (см. строку 3 табл. 1). На рисунке 4 показан график зависимости момента инерции поперечного сечения относительно центральной оси I_{x_0} от типа сечения.

2. Такая же тенденция наблюдается и для величины разрушающего момента $M_{разр}$, при котором в опасном сечении образуется пластический шарнир, то есть при монотонном увеличении момента инерции поперечного сечения относительно центральной оси I_{x_0} , величина разрушающего момента также монотонно возрастает (см. строку 4 табл. 1). На рисунке 5 показан характер зависимости моментов $M_{x_0}^T$ и $M_{разр}$ от величины момента инерции I_{x_0} .

Таблица 1 – Результаты вычислений

		Тип сечения					
		Тип 1	Тип 2	Тип 3	Тип 4	Тип 5	Тип 6
Характеристики		$h = 0,4 \text{ м};$ $b = 0,025 \text{ м};$ $a_n = 2b;$ $a_v = 2b;$ $b_n = 3b;$ $b_v = 2b.$	$h = 0,4 \text{ м};$ $b = 0,025 \text{ м};$ $a_n = 2b;$ $a_v = 4b;$ $b_n = 3b;$ $b_v = 2b.$	$h = 0,4 \text{ м};$ $b = 0,025 \text{ м};$ $a_n = 2b;$ $a_v = 2b;$ $b_n = 3b;$ $b_v = 3b.$	$h = 0,4 \text{ м};$ $b = 0,025 \text{ м};$ $a_n = 4b;$ $a_v = 2b;$ $b_n = 3b;$ $b_v = 2b.$	$h = 0,4 \text{ м};$ $b = 0,025 \text{ м};$ $a_n = b;$ $a_v = b;$ $b_n = 6b;$ $b_v = 6b.$	$h = 0,4 \text{ м};$ $b = 0,025 \text{ м};$ $a_n = 2b;$ $a_v = 2b;$ $b_n = 6b;$ $b_v = 2b.$
$I_x, \text{ м}^4$		$3,271 \cdot 10^{-4}$	$3,417 \cdot 10^{-4}$	$3,667 \cdot 10^{-4}$	$3,813 \cdot 10^{-4}$	$5,188 \cdot 10^{-4}$	$5,583 \cdot 10^{-4}$
$S_x^{n.c.}, \text{ м}^3$		$1,094 \cdot 10^{-3}$	$1,188 \cdot 10^{-3}$	$1,250 \cdot 10^{-3}$	$1,344 \cdot 10^{-3}$	$1,594 \cdot 10^{-3}$	$1,750 \cdot 10^{-3}$
$M_{x_0}^T, \text{ Нм}$		$3,271 \cdot 10^5$	$3,417 \cdot 10^5$	$3,667 \cdot 10^5$	$3,813 \cdot 10^5$	$5,188 \cdot 10^5$	$5,583 \cdot 10^5$
$M_{разр}, \text{ Нм}$		$4,375 \cdot 10^5$	$4,750 \cdot 10^5$	$5,000 \cdot 10^5$	$5,375 \cdot 10^5$	$6,375 \cdot 10^5$	$7,000 \cdot 10^5$
β		1,338	1,390	1,364	1,410	1,229	1,254
$F_y, \text{ Н}$		$2,181 \cdot 10^5$	$2,278 \cdot 10^5$	$2,444 \cdot 10^5$	$2,542 \cdot 10^5$	$3,458 \cdot 10^5$	$3,722 \cdot 10^5$
$F_t, \text{ Н}$		$2,917 \cdot 10^5$	$3,167 \cdot 10^5$	$3,333 \cdot 10^5$	$3,583 \cdot 10^5$	$4,250 \cdot 10^5$	$4,667 \cdot 10^5$
$q_y, \text{ Н/м}$		$7,269 \cdot 10^4$	$7,593 \cdot 10^4$	$8,148 \cdot 10^4$	$8,472 \cdot 10^4$	$1,153 \cdot 10^5$	$1,241 \cdot 10^5$
$q_t, \text{ Н/м}$		$9,722 \cdot 10^4$	$1,056 \cdot 10^5$	$1,111 \cdot 10^5$	$1,194 \cdot 10^5$	$1,417 \cdot 10^5$	$1,556 \cdot 10^5$
$z_{лев},$ м	F	2,243	2,158	2,200	2,128	2,441	2,393
	q	1,493	1,411	1,145	1,383	1,705	1,650
$z_{прав},$ м	F	3,757	3,842	3,800	3,872	3,559	3,607
	q	4,507	4,589	4,549	4,617	4,295	4,350
$V_{max}^t,$ м	F	-0,026	-0,027	-0,025	-0,027	-0,022	-0,023
	q	-0,059	-0,060	-0,056	-0,058	-0,049	-0,048
$V_{max}^y,$ м	F	-0,015	-0,015	-0,015	-0,015	-0,015	-0,015
	q	-0,019	-0,019	-0,019	-0,019	-0,019	-0,019
$V_{осм}^t,$ м	F	$-5,596 \cdot 10^{-3}$	$-6,263 \cdot 10^{-3}$	$-5,056 \cdot 10^{-3}$	$-5,660 \cdot 10^{-3}$	$-3,934 \cdot 10^{-3}$	$-3,790 \cdot 10^{-3}$
	q	-0,034	-0,034	-0,031	-0,031	-0,026	-0,025

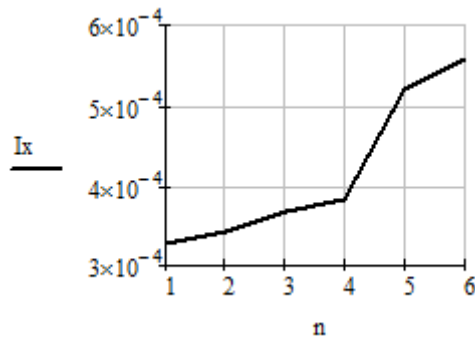


Рисунок 4 – График зависимости момента инерции поперечного сечения относительно центральной оси I_{x_0} от типа сечения

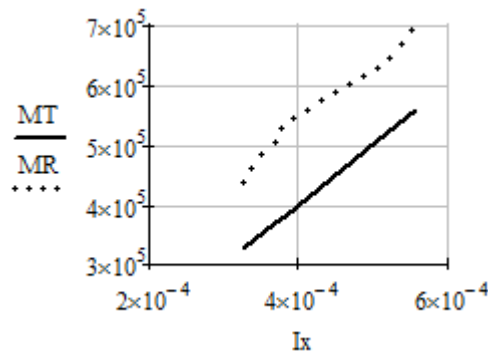


Рисунок 5 – Характер зависимости моментов $M_{x_0}^T$ и $M_{разр}$ от величины момента инерции I_{x_0} .

3. Коэффициент β , характеризующий повышение несущей способности пластически изгибаемого стержня, и рассчитываемый по разрушаемому моменту, отмеченному выше закону не подчиняется (см. строку 5 таблицы). Наименьший коэффициент β у того сечения, у которого полки наиболее развиты в ширину, а их толщина наименьшая; наибольший коэффициент у того сечения, у которого ширина полок наименьшая, а их толщина наибольшая, причём толщина внешней полки больше толщины внутренней полки. Характер зависимости коэффициента β от момента инерции I_{x_0} представлен на рисунке 6.

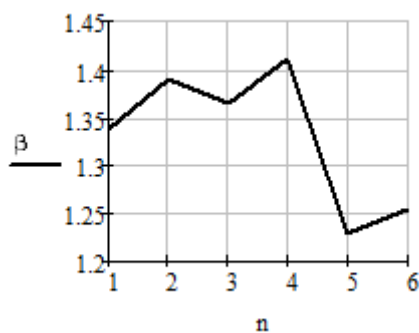


Рисунок 6 – Характер зависимости коэффициента β от момента инерции I_{x_0}

4. Величина нагрузки в виде сосредоточенной силы F_y , приложенной в середине пролёта, при которой в фибровых волокнах стержня возникает пластичность, также как и величина сосредоточенной силы F_t , приложенной в середине пролёта, при которой в опасном сечении возникает шарнир пластичности, при монотонном возрастании момента инерции поперечного сечения стержня также монотонно возрастают. При этом зависимость сосредоточенной силы F_y от момента инерции оказывается линейной.

5. Такая же тенденция наблюдается и для равномерно-распределённой нагрузки, то есть при монотонном возрастании момента инерции поперечного сечения стержня интенсивность нагрузки при образовании текучести в фибровых волокнах q_y и интенсивность нагрузки при образовании шарнира пластичности q_t , также монотонно возрастают. При этом зависимость нагрузки q_y от момента инерции оказывается линейной. На рисунках 7 и 8 показаны зависимости силовых воздействий F_y , F_t , q_y , q_t в зависимости от момента инерции I_{x_0} поперечного сечения балки.

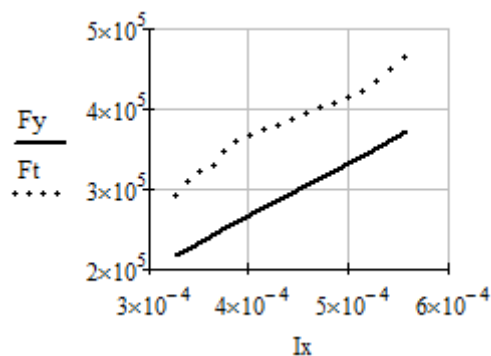


Рисунок 7 – Зависимости силовых воздействий F_y , F_t от момента инерции I_{x_0}

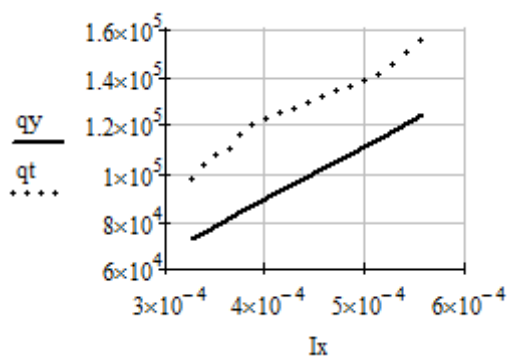


Рисунок 8 – Зависимости силовых воздействий q_y , q_t от момента инерции I_{x_0}

б. Длина упругопластического участка, измеренная вдоль фибрового волокна, существенно зависит от вида действующей на стержень нагрузки: для нагрузки в виде сосредоточенной силы по сравнению с равномерно-распределённой нагрузкой, она меньше более чем в два раза. Численное моделирование показывает, что чем более развита высота полок, тем длина упругопластического участка больше; чем более развиты полки в ширину, тем длина упругопластического участка меньше. На рисунке 9 показан характер зависимости длины упругопластического участка от момента инерции поперечного сечения балки.

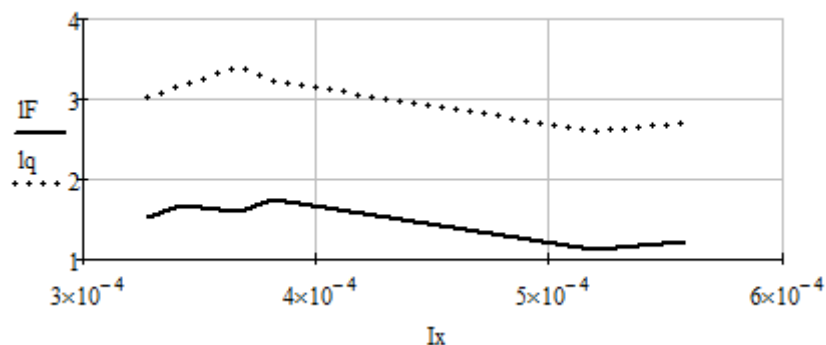


Рисунок 9 – Зависимость длины упругопластического участка от момента инерции поперечного сечения балки

7. Анализ прогибов балки показывает, что чем более развиты полки по ширине, тем и максимальные прогибы при образовании шарнира пластичности V_{\max}^t , и максимальные остаточные прогибы $V_{ост}^t$ меньше как при нагружении стержня сосредоточенной силой, так и при загрузке стержня равномерно-распределённой нагрузкой. Изменение прогибов при достижении в фибровых волокнах предела текучести V_{\max}^y в зависимости от момента инерции поперечного сечения стержня измеряются десятками долями миллиметра, то есть практически остаются постоянными. Характер прогибов в зависимости от момента инерции поперечного сечения показан на рисунках 10 и 11.

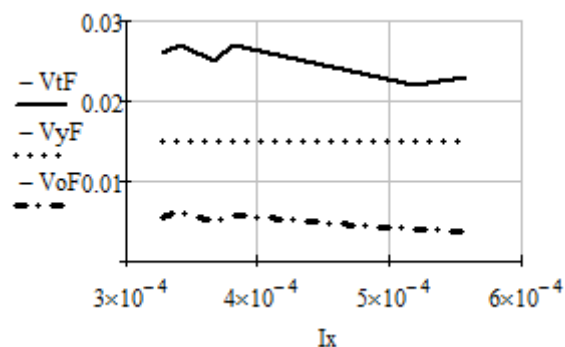


Рисунок 10 – Характер прогибов в зависимости от момента инерции поперечного сечения (для сосредоточенной силы)

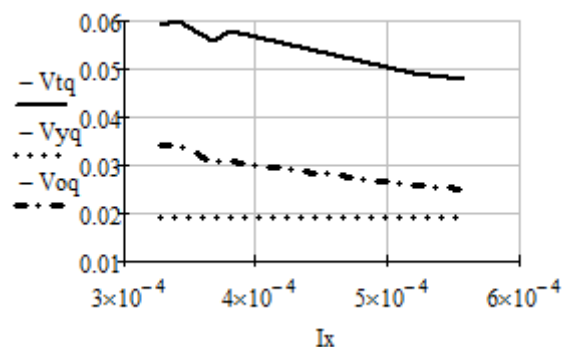


Рисунок 11 – Характер прогибов в зависимости от момента инерции поперечного сечения (для распределенной нагрузки)

Следует отметить, что прогибы при достижении в фибровых волокнах предела текучести V_{\max}^y , при нагружении стержня сосредоточенной силой больше остаточных прогибов, но меньше прогибов при образовании шарнира пластичности; при нагружении стержня равномерно-распределённой нагрузкой прогибы при достижении в фибровых волокнах предела текучести V_{\max}^y , меньше и прогибов при образовании шарнира пластичности, и остаточных прогибов.

Выводы. Подводя итог сказанному, отметим основные принципы и тенденции, которые следовало бы соблюдать при проектировании балок, предназначенных для работы в условиях упруго-пластического деформирования.

а) При проектировании балки, характеризующейся повышенной несущей способностью, следует полки проектировать небольшой ширины, но достаточно развитой толщины (типа 2 или 4). Однако при этом прогибы балки при образовании шарнира пластичности будут большими; значительными будут и остаточные прогибы.

б) При проектировании балки, характеризующейся повышенной жёсткостью, следует полки проектировать максимально развитыми в ширину (типа 5 или 6). Остаточные прогибы при этом будут минимальными. Повышение несущей способности стержня при его упругопластической работе

также будет минимальным. Минимальной также будет и длина упругопластического участка.

в) При проектировании балки, предназначенной нести как можно большую нагрузку, следует балку проектировать с возможно большим моментом инерции относительно нейтральной оси.

Библиографический список:

1. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Соппротивление материалов: учеб. пособие. М.: Наука, 1986. 560 с.

2. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести: учеб. для студентов вузов. М.: Машиностроение, 1968. 400 с.

3. Нил Б.Г. Расчёт конструкций с учётом пластических свойств материалов. М.: Госстройиздат, 1961. 315 с.

4. Ржаницын А.Р. Расчёт сооружений с учётом пластических свойств материалов. Изд. 2-е., перераб. М., 1954. 289 с.

5. Феодосьев В.И. Соппротивление материалов: учеб. для вузов. Изд. 10-е, перераб. и доп. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 592 с.

6. Бакушев С.В. Упругопластический изгиб стержня с двумя осями симметрии распределённой нагрузкой // Региональная архитектура и строительство. 2013. №2. С.71-80.

7. Бакушев С.В. Плоский поперечный упругопластический изгиб стержня с двумя осями симметрии // Строительная механика и расчёт сооружений. 2013. №4. С.2-9.

8. Бакушев С.В. Упругопластический поперечный изгиб стержня в условиях ограниченной пластической деформации // Дороги и мосты: сборник. М.: ФГУП «РОСДОРНИИ», 2013. Вып. 30/2. С.187-203.

9. Бакушев С.В. Моделирование упругопластического изгиба стержня со ступенчатым поперечным сечением и двумя осями симметрии [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2015. №1. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: <http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera->

[zhurnala/no1/stroitel'naya-mehanika/modelirovanie-uprugoplasticheskogo-izgiba-sterzhnya-so-stupenchatym-poperechnym-secheniem-i-dvumya-osyami-simmetrii/at_download/file](#)