

УДК 624.31

АНАЛИТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ РЕШЕТЧАТОЙ ФЕРМЫ

Кирсанов Михаил Николаевич,

Национальный исследовательский университет «МЭИ», г.Москва,

доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики и мехатроники.

Аннотация

При определении прогиба статически определимой плоской балочной фермы замечено, что для чисел панелей, кратных трем, определитель системы уравнений равновесия узлов обращается в ноль. Найдено распределение возможных скоростей узлов в этом случае. Для кинематически неизменяемых вариантов схемы фермы получено точное выражение зависимости прогиба середины пролета от числа панелей при равномерном нагружении нижнего пояса. Расчеты усилий в стержнях выполнены в пакете символьной математики Maple. Найдено обобщение решения на произвольное число панелей методом индукции. Для последовательности коэффициентов в формуле прогиба было получено и решено рекуррентное уравнение девятого порядка. Выявлена характерная для решетчатых ферм скачкообразность кривой зависимости прогиба от числа панелей.

Ключевые слова: балочная ферма, прогиб, Maple, индукция, число панелей, асимптотика

ANALYTICAL CALCULATION OF LATTICE TRUSS

Kirsanov Mikhail Nikolaevich,

National Research University "MPEI", Moscow,

Doctor of Sciences, Professor of the department "Theoretical Mechanics and Mechatronics".

Abstract

In the determination of deflection of statically determinate planar girder was noted that a number of panels, three times the determinant of a system of equilibrium equations of the nodes vanishes. The distribution of possible velocities of the nodes in this case is found. For kinematically invariant schemes truss obtained an accurate expression of the dependence of deflection mid-span on the number of panels with a uniform loading of the lower chord. Estimates of effort in the rods is made in the symbolic mathematics package Maple. Found a generalization of the solution for an arbitrary number of panels by the method of induction. For the sequence of coefficients of the solution was obtained and solved the recurrent equation of the ninth order. The identified characteristic of the truss girders saltatory curve of the deflection from the number of panels.

Keywords: braced girder, the deflection, Maple, induction, number of panels, asymptotics

Постановка задачи. Некоторые схемы стержневых систем, в частности плоских и пространственных ферм, могут скрывать конструктивные дефекты. Так, в [1] показано, что многорешетчатая плоская ферма может быть изменяемой конструкцией даже при наличии лишнего стержня. Это зависит от соотношения числа шарниров по ее сторонам. Ранее аналогичный эффект обнаружен в плоской [2] и в пространственной ферме [3].

В настоящей работе изучается напряженное состояние и прогиб балочной фермы. На рисунках 1 и 2 изображены две фермы, внешне почти неразличимые. В одной ферме восемь панелей, в другой – девять. Для большего числа панелей разница между двумя такими фермами, отличающимися на одну панель, еще меньше заметна.

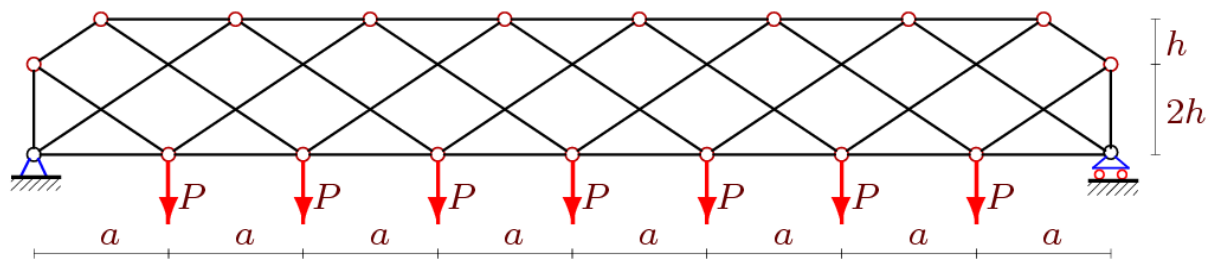


Рисунок 1 – Ферма, число панелей $n = 8$

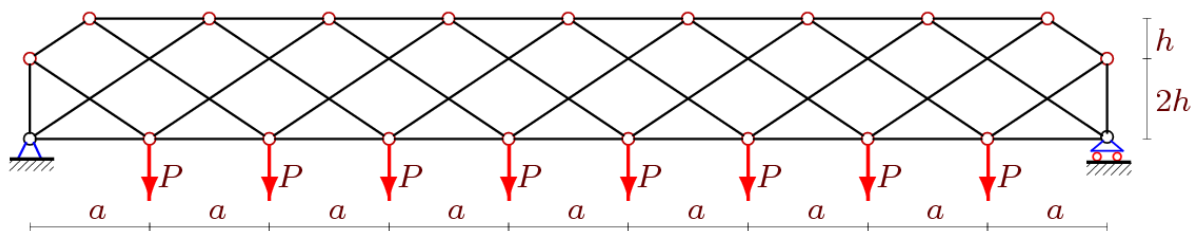


Рисунок 2 – Ферма, число панелей $n = 9$

Фермы схематически подобные и отличаются только числом панелей. На первый взгляд кажется, что и расчет, выполненный и проверенный для одной фермы, подходит и для другой. Однако это не так. В первом случае ферма статически определима и кинематически неизменяема, во втором случае – нет. Первоначально эта особенность была замечена при численном расчете усилий в стержнях методом вырезания узлов по стандартной программе. Решение вело себя странным образом для ферм с числом панелей, кратном трем, и сначала этот эффект был связан с погрешностями округления. При более внимательном же рассмотрении схемы и аналитическом (символьном) решении, где погрешностей округления принципиально не существует, было обнаружено, что фермы с тремя, шестью и т. д. числом панелей имеют кинематически непротиворечивое распределение скоростей узлов. На примере $n = 6$ эта картина изображена на рисунке 3.

Часть стержней на представленной схеме совершают мгновенно поступательное движение, часть – плоское. Некоторые узлы и правая опора (теоретически подвижная) в этой схеме скоростей не имеют.

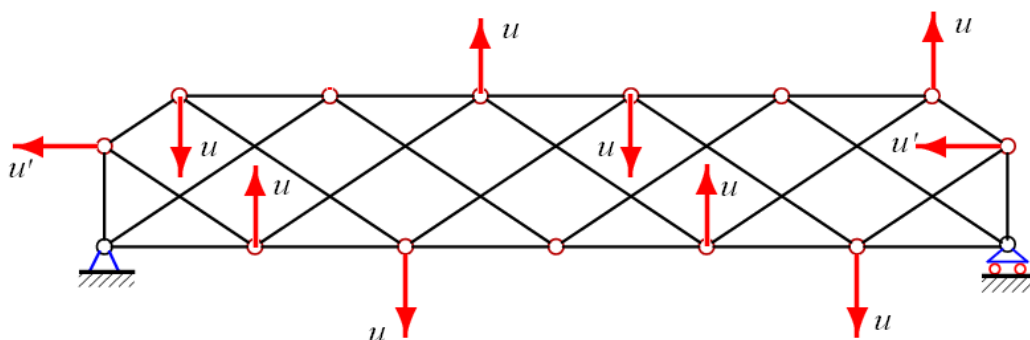


Рисунок 3 – Распределение возможных скоростей, число панелей $n = 6$

Очевидна связь скоростей: $2u / a = u' / h$. Для того чтобы указанная схема могла быть реализована, необходимо, чтобы по нижнему поясу разместилось целое число «троек» стержней, в которых крайние узлы неподвижны, а два средних перемещаются в противоположных направлениях (рисунок 4).

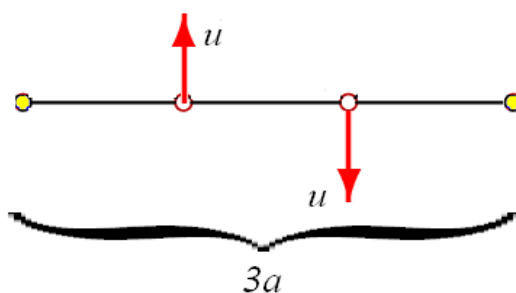


Рисунок 4 – Ячейка периодичности кинематической схемы

Отсюда и вытекает условие на число панелей в кинематически неизменяемой ферме.

Вычислим усилия в стержнях и прогиб этой фермы в аналитической форме. В число параметров задачи введем число панелей. Для этого применим метод индукции. Ранее предлагаемая схема фермы аналитически не исследовалась и опыт применения таких ферм в строительстве не известен. Однако, интерес к такой ферме не только чисто теоретический. Точные решения, содержащие в себе число панелей как параметр, позволяют и анализировать особенности конструкции, и предлагать простые оценки для численных методов.

Проблема расчетов и анализа схем статически определимых ферм отражена в [4]. Простые аналитические решения для плоских ферм балочных и консольных, с различными очертаниями верхнего и нижнего пояса в конечной форме получены в [5-15]. Метод индукции, примененный в этих работах, доказал свою эффективность, а найденные формулы для прогиба в зависимости от числа панелей позволили получить некоторые оптимальные по жесткости конструктивные решения и указали на особенности конструкции (в том числе и чувствительность к четности числа панелей).

Расчет. Рассмотрим плоскую статически определимую балочную ферму с числом панелей $n = (6k - 3 - (-1)^k) / 2$, $k=1,2,3,\dots$ (рисунок 1). Стержни фермы предполагаем упругими (модуль упругости E) одинакового сечения F . Поставим задачу получить аналитическое решение для прогиба фермы при произвольном числе панелей n . Ферма нагружена по верхнему поясу вертикальными силами P . Ферма содержит $2n + 3$ шарниров и $m = 4n + 3$ стержней.

Для определения усилий в стержнях фермы используем метод вырезания узлов. Система $4n + 6$ уравнений для $m + 3 = 4n + 6$ неизвестных (включая три реакции опорных шарниров) будет замкнута. Алгоритм составления уравнений и вычисление усилий в аналитической форме разработан в [1-3, 16] применительно к системе аналитических вычислений Maple [16]. Пронумеруем шарниры фермы (нижний пояс слева направо, затем верхний пояс). Выбирая начало координат в левой шарнирной опоре, получим:

$$\begin{aligned} x_i &= (i - 1)a, \quad y_i = 0, \quad i = 1, \dots, n + 1, \\ x_{i+n+2} &= x_i + a / 2, \quad y_{i+n+2} = 3h, \quad i = 1, \dots, n, \\ x_{n+2} &= 0, \quad y_{n+2} = 2h, \quad x_{2n+3} = na, \quad y_{2n+3} = 2h. \end{aligned}$$

Для составления конфигурации решетки фермы стержни фермы представим условными векторами \bar{N}_i , $i = 1, \dots, m$, координатами которых являются номера шарниров по концам стержней. Направления этих векторов

произвольны и никак не связаны со знаком усилий в них. Для стержней нижнего пояса имеем следующие вектора:

$$\bar{N}_i = [i, i + 1], \quad i = 1, \dots, n, \quad .$$

Для векторов верхнего пояса:

$$\bar{N}_{i+n} = [i + n + 1, i + n + 2], \quad i = 1, \dots, n + 1,$$

Векторы решетки:

$$\bar{N}_{i+2n+1} = [i + 1, i + n + 1], \quad \bar{N}_{i+3n+1} = [i, i + n + 3], \quad i = 1, \dots, n.$$

Векторы боковых стоек:

$$\bar{N}_{4n+2} = [1, n + 2], \quad \bar{N}_{4n+3} = [2n + 3, n + 1].$$

Для вычисления направляющих косинусов, входящих в уравнения узлов фермы, потребуются длины стержней и проекции их векторных представлений на оси координат

$$l_i = \sqrt{l_{1,i}^2 + l_{2,i}^2}, \quad l_{1,i} = x_{N_{2,i}} - x_{N_{1,i}}, \quad l_{2,i} = y_{N_{2,i}} - y_{N_{1,i}}, \quad i = 1, \dots, m_0,$$

где $m_0 = m + 3$ – число стержней фермы, включая три стержня, которые моделируют неподвижные шарнирные опоры (по два стержня на каждую опору). Первый индекс в номере $N_{j,i}$ имеет значение 1 или 2 и означает номер компоненты вектора \bar{N}_i , т. е. номер начала стержня или номер его конца; второй индекс i в $N_{j,i}$ – номер стержня. Матрица направляющих косинусов имеет следующие элементы

$$G_{k,i} = -l_{j,i} / l_i, \quad k = 2N_{2,i} - 2 + j, \quad k \leq m_0, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, m_0,$$

$$G_{k,i} = l_{j,i} / l_i, \quad k = 2N_{1,i} - 2 + j, \quad k \leq m_0, \quad j = 1, 2, \quad i = 1, \dots, m_0.$$

Задача определения усилий в стержнях фермы сводится к решению системы линейных уравнений, которую запишем в матричной форме

$$G\bar{S} = \bar{B}.$$

Здесь \bar{S} – вектор неизвестных усилий, \bar{B} – вектор нагрузок. Горизонтальные нагрузки, приложенные к узлу i записываются в нечетные элементы B_{2i-1} (в данной постановке их не будет), вертикальные – в четные B_{2i} . Прогиб

центрального узла верхнего пояса фермы определяем по формуле Максвелла-Мора

$$\Delta = \sum_{k=1}^m \frac{S_k s_k l_k}{EF},$$

где S_k, s_k – усилия в k -м стержне фермы от приложенной нагрузки и от единичной вертикальной силы, приложенной к центральному узлу нижнего пояса, l_k – длина стержня. Суммирование ведется по всем стержням фермы, опорные стержни приняты жесткими и в эту сумму не входят. Последовательное решение задачи с использованием системы символьной математики для ферм с одной, тремя, пятью и т. д. панелями в пролете ($k=1,2,3,\dots$) позволило методом индукции (по аналогии с [1-3]) получить следующее выражение

$$\Delta EF = P \frac{A_k a^3 + C_k c^3 + H_k h^3}{8h^2}, \quad (1)$$

где $A_k = (30k^4 - 60k^3 + 38k^2 - 8k - (-1)^k (20k^3 - 30k^2 + 40k - 15)) / 16$,

$$C_k = 3(2k^2 - 2k + 5 + 3(-1)^k (1 - 2k)) / 8,$$

$$H_k = 16(2k - 1 - (-1)^k),$$

где $c = \sqrt{a^2 + 4h^2}$. Зависимости коэффициентов при a^3 , c^3 и h^3 от числа панелей оказались довольно сложными. Так для нахождения общего члена C_k немонотонной последовательности 3, 0, 12, 3, 27, 12, 48, 27, 75, 48, 108, 75, ... с помощью оператора **rgf_findrecur** системы Maple [16] было найдено рекуррентное уравнение пятого порядка

$$C_k = C_{k-1} + 2C_{k-2} - 2C_{k-3} - C_{k-4} + C_{k-5}.$$

Решение этого уравнения с помощью оператора **rsolve** дает общий член последовательности. Коэффициент A_k удовлетворяет уравнению девятого порядка, H_k – третьего. Наличие «мигающего» слагаемого $(-1)^k$ в решениях есть следствие немонотонности последовательностей.

Введем обозначение $\tilde{\Delta} = \Delta EF / P_0$, где $P_0 = (n - 1)P$, а P – нагрузка на узел.

Таким образом, с изменением числа панелей суммарная нагрузка на ферму не меняется. Обозначим фиксированную длину пролета фермы $L = an$. Пусть для примера $L = 50$ м. График зависимости (1) от числа панелей (рисунок 5) условен, прогиб вычисляется только при целых значениях k , линейная интерполяция использована лишь для наглядности представления. Кроме того, не следует забывать, что параметр k и число панелей связаны формулой $n = (6k - 3 - (-1)^k) / 2$. Экстремум приходится на $k=2$, что соответствует четырем панелям длиной 12,5 м каждая. Если высота фермы при этом колеблется от $3h = 9$ м до $3h = 15$ м, то пропорции такой фермы вполне близки к реальным. Еще большую точность задачи оптимизации можно получить, если подбирать распределение сечений поясов и стержней решетки.

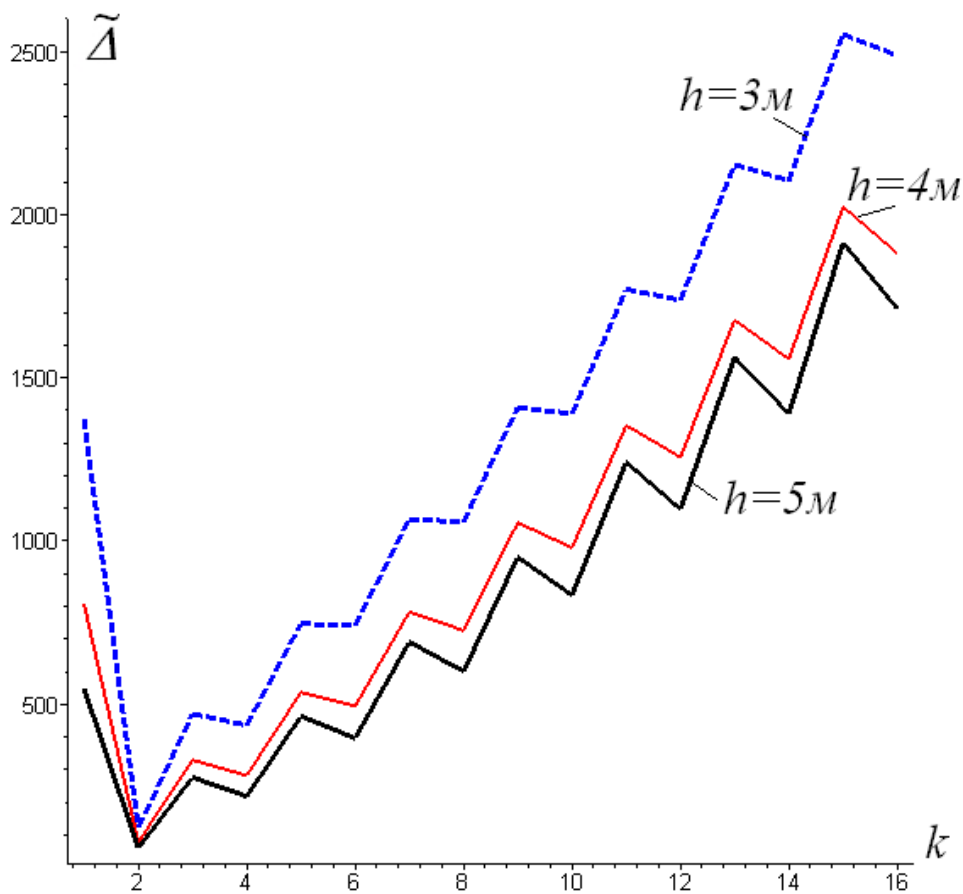


Рисунок 5 – Зависимость прогиба от числа панелей

Заключение. Аналитическое решение задачи о деформации фермы выявило неожиданную и опасную особенность конструкции, незнание которой и формальный перенос решения с одной фермы на другую, с другим числом панелей, может привести к тем ошибкам проектирования, которые приводят к разрушению конструкции. Численное решение задачи такой эффект не всегда может обнаружить. Формула (1) для прогиба может служить тестовой для численных методов и простой оценкой жесткости системы для проектировщика.

Библиографический список:

1. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет многорешетчатой фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. №6. С. 2-6.
2. Кирсанов М.Н. Скрытая особенность и асимптотические свойства одной плоской балочной фермы // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 4. С. 9-12.
3. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. № 5 (49). С. 37-43.
4. Hutchinson R. G., Fleck N. A. Microarchitected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 2005. №9. P. 607-617.
5. Реутов Д.О. Индуктивный анализ прогиба фермы регулярной структуры в системе Maple // Международная научно-практическая конференция ИТОН-2014. IV-й международный семинар и международная школа "Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики": материалы конференции и труды семинара. Казань: Изд-во ООО "Фолиант", 2014. С. 256-261.
6. Реутов Д.О. Аналитическое выражение прогиба слабо вспарушенной балочной фермы // Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по

материалам Международной научно-практической конференции 31 октября 2014 г. в 17 частях. Часть 3. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания «Юком», 2014. С. 128-129.

7. Кужелев П.А. Оптимизация прогиба плоской балочной фермы // Вопросы образования и науки: теоретический и методический аспекты: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 мая 2014 г.: в 11 частях. Часть 11. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания «Юком», 2014. С. 109-110.

8. Дзабиев А.А., Черепанов С.П. Формулы для расчета прогиба арочной фермы // Вопросы образования и науки: теоретический и методический аспекты: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 31 мая 2014 г.: в 11 частях. Часть 4. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания «Юком», 2014. С. 63-64.

9. Бадертдинов Р.Р. Формула для прогиба плоской балочной фермы // Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г.: в 11 частях. Часть 7. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания «Юком», 2014. С. 21-22.

10. Дегтярев Н.Р., Трошило А.П. Прогиб балочной фермы шпренгельного типа // Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г.: в 11 частях. Часть 10. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания «Юком», 2014. С. 52-54.

11. Кабрера П.Х.Х., Поддубный-Литвинов М.А. Индуктивный метод определения прогиба многопролетной плоской фермы // Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г.: в 11 частях. Часть 10. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания «Юком», 2014. С. 78-80.

12. Афанасьев В.А., Бойко О.О. Прогиб составной плоской балочной фермы с параллельными поясами // Актуальные вопросы образования и науки:

сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г.: в 11 частях. Часть 10. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания «Юком», 2014. С. 15-16.

13. Сайпулаев Г.Р. Расчет регулярных стержневых систем на примере арок фермы // Актуальные вопросы образования и науки: сборник научных трудов по материалам Международной научно-практической конференции 30 сентября 2014 г.: в 11 частях. Часть 4. Тамбов: ООО «Консалтинговая компания «Юком», 2014. С. 128-130.

14. Заборская Н. В. О горизонтальном смещении опоры плоской балочной фермы // Перспективы развития науки и образования: сб. науч. тр. по материалам Междунар. науч.-практ. конф. 28 февраля 2015 г.: Часть 9. Тамбов, 2015. С. 58 - 60.

15. Лебедев А.В. Аналитическое исследование деформации составной фермы с прямоугольной решеткой под действием равномерной нагрузки // Наука и образование в жизни современного общества: сб. науч. тр. по материалам Междунар. науч.-практ. конф. 30 апреля 2015 г.: Часть 13. Тамбов, 2015. С. 93-94.

16. Кирсанов М.Н. Практика программирования в системе Maple. М.: Издательский дом МЭИ, 2011. 208 с.