

УДК 624.042.8:534.1

КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ВЫКЛЮЧАЮЩИМИСЯ СВЯЗЯМИ

Потапов Александр Николаевич,

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск,

доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Строительная механика», профессор кафедры.

Аннотация

Приведены математические модели и алгоритм расчёта в рамках теории временного анализа дискретных диссипативных систем при внезапном выключении связи. Дан вывод разрешающих уравнений реакции системы, находящейся до выключения связи в положении статического равновесия. Результаты иллюстрируются на примере свободных колебаний двухпролётной балки, вызванных внезапным разрушением промежуточной опоры.

Ключевые слова: конструктивно нелинейная система, разрушение, связь, динамическая реакция, перемещение, колебание, матрица жёсткости.

OSCILLATIONS OF SYSTEMS WITH SHUT-OFF TIES

Potapov Alexander Nikolaevich,

South Ural State University, Chelyabinsk,

Doctor of Sciences, Associate Professor, Head of the Department "Structural Mechanics", Professor of the Department.

Abstract

Mathematical models and algorithm of calculation of discrete dissipative systems under the sudden breakdown of the tie are presented in the framework of the interim analysis. The derivation of determinant equations of the dynamic response of the system, which is in equilibrium before the shut-off of the tie, is given. Results are illustrated by the example of free oscillations of the double-flight beam that are caused by sudden breakdown of the intermediate support.

Keywords: structurally nonlinear system, destruction, tie, dynamic disconnection, displacement, oscillation, matrix of stiffness.

Введение. Работа конструкции с выключающимися (разрушающимися) связями приводит к изменению расчётной схемы сооружения, что характеризует систему как конструктивно нелинейную [1]. Выключение связи представляет собой деструктивный процесс, изменяющий соотношение между внутренними и внешними силами системы. Этот процесс имеет вид нестационарного воздействия, следствием которого является нарушение баланса между внутренними и внешними силами, поэтому от системы требуется быстрая перестройка внутренних сил, направленная на сохранение её живучести.

Необходимо ясно представлять теоретическую основу происходящих процессов в повреждённой системе, поскольку это – важная предпосылка для создания физических и математических моделей, а также последующего алгоритма исследований. Однако, приходится констатировать, что в настоящее время пока еще не создано строго обоснованной теории, позволяющей с единых научных позиций объяснять (и моделировать) происходящие процессы в конструктивно нелинейных системах, что, безусловно, является серьёзным препятствием в создании эффективных методов решения прикладных задач динамики повреждённых систем. В нормативных документах практически отсутствуют методы расчёта сооружений при их внезапных повреждениях, в то время как, вопросы надёжности и безопасности сооружений требуют от специалистов оценок, обеспечивающих необходимый уровень надёжности строительных конструкций [1-3]. Поэтому разработка аналитических методов построения динамической реакции системы, учитывающих эффект разрушения связей представляется исключительно важной и актуальной задачей.

В статье рассматривается конструктивно нелинейная система, находящаяся до выключения связи в положении статического равновесия. Вывод уравнений динамической реакции проводится в рамках теории временного анализа дискретных диссипативных систем (ДДС) [4]. Некоторые

аспекты данной проблемы рассматривались в статье [5].

1. Предварительные замечания. Выключение связи в некотором конструктивном элементе системы, находящейся до этого события в положении статического равновесия, влечет за собой снижение жёсткости данного элемента и общей жесткости конструкции в целом. При этом, вследствие нарушения баланса между внешними и внутренними силами, нарушается статическое равновесие системы. Всё это требует быстрой перегруппировки внутренних сил, которая, учитывая внезапный характер изменения жесткости конструкции, не может протекать статическим путем.

Переход системы из статического состояния в режим движения сопровождается возникновением динамических сил, что можно рассматривать как вынужденную и необходимую меру системы, предупреждающую её от угрозы возможных разрушений последующих связей, и как попытку восстановить новое положение равновесия. Это, своего рода, защитная реакция конструкции (сродни «инстинкту самосохранения»), направленная на обеспечение своей целостности и создание нового равновесного баланса сил.

Характер движения системы после выключения связи зависит от общей несущей способности конструкции в текущий момент. При условии сохранения резерва прочности узлы конструкции будут совершать свободные затухающие колебания. С течением времени, когда колебания прекратятся, в системе установится новое положение статического равновесия. Если же сопротивляемость системы к разрушению окажется не обеспеченной, то продолжится дальнейшее последовательное выключение несущих элементов и процесс разрушения примет необратимый характер, переходящий в лавинообразный.

2. Вывод уравнения статической реакции. Введем векторы Q и Y_{st} узловых статических воздействий и перемещений

$$Y_{st} = K^{-1}Q, \quad (1)$$

где K – матрица жесткости заданной системы.

Для построения реакции системы, вызванной действием неподвижной нагрузки, воспользуемся уравнениями динамической реакции. Дифференциальное уравнение движения ДДС в рамках линейной модели вязкого сопротивления записываются так

$$M\ddot{Y}(t) + C\dot{Y}(t) + KY(t) = P(t), \quad (2)$$

где $M = \text{diag} (m_1, \dots, m_n)$, $C = C^T$, $K = K^T = [r_{ij}] \in M_n(\mathbf{R})$ – матрицы масс, демпфирования и жесткости; $Y(t)$, $P(t)$ – векторы перемещений и внешней нагрузки.

Уравнение реакции упругой ДДС в матричной форме интеграла Дюамеля имеет вид [4]:

$$\left. \begin{aligned} Y(t) &= 2\text{Re} \{ Z_0(t-t_0) + Z^P(t-t_0) \}, & \dot{Y}(t) &= 2\text{Re} \{ S[Z_0(t-t_0) + Z^P(t-t_0)] \}, \\ Z_0(t-t_0) &= \Phi(t-t_0)U^{-1}M[-\bar{S} Y_0 + \dot{Y}_0], & Z^P(t-t_0) &= U^{-1} \int_{t_0}^t \Phi(t-\tau)^T P(\tau) d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где векторная величина $Z_0(t-t_0)$ выражает реакцию ДДС при свободных колебаниях, вызываемую начальными условиями задачи (перемещениями и скоростями узлов системы в начальный момент времени t_0):

$$Y_0 = Y(t_0), \quad \dot{Y}_0 = \dot{Y}(t_0); \quad (4)$$

вектор $Z^P(t-t_0)$ выражает реакцию при вынужденных колебаниях от действия внешней нагрузки. В частности, при внезапном действии сил постоянной величины $P(t) = P_0 = \text{const}$ эта реакция записывается в виде уравнения [4]

$$Z^P(t-t_0) = [\Phi(t-t_0) - E](US)^{-1}P_0. \quad (5)$$

Фундаментальная матрица в (3) $\Phi(t) = e^{St}$ содержит матрицу внутренних динамических характеристик ДДС $S \in M_n(\mathbf{C})$, которая удовлетворяет характеристическому матричному квадратному уравнению (МКУ)

$$MS^2 + CS + K = 0 \quad (6)$$

и имеет аналитическое представление в виде корневой пары

$$S_{1,2} = M^{-1}(-C + V \pm U) / 2,$$

где $V = -V^T$, $U = U^T$.

Для упругой ДДС с малой диссипацией элементы матриц V , U являются соответственно вещественными и мнимыми: $V, iU \in M_n(R)$, поэтому матричные корни $S_1 = S$, $S_2 = \bar{S}$ – комплексно сопряжённые (i – мнимая единица):

$$S = M^{-1}(-C + V + U)/2, \quad \bar{S} = M^{-1}(-C + V - U)/2. \quad (7)$$

Матрица S обладает множеством замечательных свойств, позволяющих связать эту матрицу и её характеристику U (в структуре решения (7)) с исходными матрицами M , C , K в различные соотношения [5]. Ниже приведём некоторые из этих соотношений, необходимые в последующем анализе:

$$\left. \begin{aligned} A = \operatorname{Re}\{(US)^{-1}\} &= -K^{-1}/2, & B = \operatorname{Re}\{SU^{-1}\} &= M^{-1}/2, \\ G = U^{-1}M\bar{S} &= (US)^{-1}K, & \operatorname{Re}\{G\} &= -E/2, & U &= 2iM \cdot \operatorname{Im}S, & \operatorname{Re}\{U^{-1}\} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Покажем, что условия статического равновесия (1) можно получить из уравнений динамической реакции (3). Для этого необходимо учесть следующее. В состоянии покоя расчётной модели начальные условия (4) принимают вид

$$Y_0 = Y_{st}, \quad \dot{Y}_0 = 0, \quad (9)$$

а в реакции при вынужденных колебаниях (5) вектор P_0 заменяется на вектор Q статических воздействий. После проведённых преобразований будем иметь

$$\left. \begin{aligned} Y(t) &= 2\operatorname{Re}\{Z(t)\}, & \dot{Y}(t) &= 2\operatorname{Re}\{SZ(t)\}, \\ Z(t) &= -\Phi(t-t_0)U^{-1}M\bar{S}Y_{st} + [\Phi(t-t_0) - E](US)^{-1}Q. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Для упрощения выражения вектора $Z(t)$ проведем группировку слагаемых с матричной экспонентой $\Phi(t-t_0)$. Принимая во внимание формулу (1) и свойство G в (8), находим $U^{-1}M\bar{S}Y_{st} = (US)^{-1}KY_{st} = (US)^{-1}Q$. Отсюда следует:

$$Z(t) = \Phi(t-t_0)[-U^{-1}M\bar{S}Y_{st} + (US)^{-1}Q] - (US)^{-1}Q = - (US)^{-1}KY_{st}.$$

Полученное выражение не зависит от времени. Окончательно, используя свойство A и U в (8), приходим к выражению реакции (10):

$$Y(t) = 2\operatorname{Re}\{Z(t)\} = Y_{st}, \quad \dot{Y}(t) = 0.$$

Таким образом, динамическая реакция ДДС в форме (10), эквивалентна

приведённой записи, представляющей собой выражение статической реакции системы от действия неподвижной нагрузки. Нетрудно видеть, что выражение полученной реакции модели совпадает с записью начальных условий (9). В более полной записи эти соотношения дополняются очевидным соотношением: $\ddot{Y}(t) = 0$. Поскольку уравнения статического равновесия вытекают из более общих по своей природе уравнений движения, это позволяет в рамках теории временного анализа использовать единый подход. Открывается возможность построения эффективных оценок динамической реакции конструкции независимо от характера деформирования системы и условий её нагружения.

3. Реакция статически нагруженной системы при разрушении связи.

Рассмотрим теперь расчётную модель конструкции в положении статического равновесия, в которой при $t = t_0$ происходит внезапное разрушение связи. Обозначим матрицу жёсткости после выключения связи через $K(t_0)$. Тогда уравнение движения расчётной модели (2) примет вид ($t \geq t_0$)

$$M\ddot{Y}(t) + C\dot{Y}(t) + K(t_0)Y(t) = Q. \quad (11)$$

Начальные условия для этого случая записываются в форме (9).

Моделирование процесса внезапного изменения жесткости конструкции обеспечивается с помощью МКУ (4) при $K = K(t_0)$, из решения которого находятся матричные корни S_0, \bar{S}_0 по типу (7) и на их основе другие характеристики собственных колебаний (матрицы $U_0, \Phi_0(t) = \exp(S_0 t)$). Далее следуя системе уравнений реакции (10), сформированной при постоянном законе действия сил (вектор Q), получим систему уравнений реакции ($t \geq t_0$)

$$\left. \begin{aligned} Y(t) &= 2\operatorname{Re} \{Z(t)\}, \quad \dot{Y}(t) = 2\operatorname{Re} \{S_0 Z(t)\}, \\ Z(t) &= -\Phi_0(t-t_0) U_0^{-1} M \bar{S}_0 Y_{st} + Z^Q(t-t_0), \\ Z^Q(t-t_0) &= [\Phi_0(t-t_0) - E](U_0 S_0)^{-1} Q. \end{aligned} \right\} (12)$$

Так как эти уравнения соответствуют новому (повреждённому) состоянию расчётной модели, то все её изменённые параметры записываются с индексом «0». Для упрощения выражения вектора $Z(t)$ снова группируем слагаемые с

величиной $\Phi_0(t-t_0)$, учитывая (1) и свойство G_B (8): $U_0^{-1}M\bar{S}_0 = (U_0S_0)^{-1}K(t_0)$:

$$\begin{aligned} Z(t) &= \Phi_0(t-t_0)[-U_0^{-1}M\bar{S}_0 Y_{st} + (U_0S_0)^{-1}Q] - (U_0S_0)^{-1}Q = \\ &= \Phi_0(t-t_0) (U_0S_0)^{-1}\Delta K(t_0)Y_{st} - (U_0S_0)^{-1}Q, \end{aligned}$$

где $\Delta K(t_0)$ – невязка матрицы жесткости, представляющая разность матриц до и после повреждения системы:

$$\Delta K(t_0) = K - K(t_0). \quad (13)$$

Следуя (1), выразим вектор Q через векторы Y_{st} и $Y_{st}(t_0)$ статических перемещений исходной и повреждённой ДДС, соответственно:

$$Q = KY_{st} = K(t_0)Y_{st}(t_0). \quad (14)$$

Используя эту формулу, введём переобозначение для вектора $Z(t)$:

$$Z(t) = X(t) - (U_0S_0)^{-1}K(t_0)Y_{st}(t_0),$$

где матрица $(U_0S_0)^{-1}$ обладает свойством A в (8): $\text{Re} (U_0S_0)^{-1} = -K(t_0)^{-1}/2$.

Тогда система разрешающих уравнений реакции (12), совместно с вектором ускорений, примет вид

$$\left. \begin{aligned} Y(t) &= 2\text{Re} \{ X(t) \} + Y_{st}(t_0), \dot{Y}(t) = 2\text{Re} \{ S_0 X(t) \}, \ddot{Y}(t) = 2\text{Re} \{ S_0^2 X(t) \}, \\ X(t) &= \Phi_0(t-t_0)(U_0S_0)^{-1}\Delta K(t_0)Y_{st}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Структура вектора $Y(t)$ в (15) показывает, что в результате выключения связи расчётная модель перешла из состояния покоя, характеризуемого условиями статического равновесия в форме (1), в режим свободных колебаний, которые совершаются относительно нового положения статического равновесия, определяемого компонентами вектора $Y_{st}(t_0)$.

Вычитая реакцию перемещений в (15) из соответствующей статической реакции (1), получим

$$\Delta Y(t) = 2\text{Re} \{ \Phi_0(t-t_0) (U_0S_0)^{-1} \Delta K(t_0) Y_{st} + \Delta Y_{st}(t_0) \}, \quad (16)$$

где векторная величина

$$\Delta Y_{st}(t_0) = Y_{st}(t_0) - Y_{st}$$

суть статическая невязка узловых перемещений расчётной модели,

представляющая разность векторов статических перемещений системы, соответственно, после и до внезапного выключения связи.

Векторную величину (16) можно рассматривать как *дополнительную реакцию* расчётной модели в ответ на выключение связи, состоящую из динамической и статической составляющей. Динамическая составляющая реакции (первое слагаемое в (16)) описывает свободные колебания системы, вызванные внезапным изменением жёсткости ДДС (невязка $\Delta K(t_0)$). Статическая составляющая (векторная невязка $\Delta Y_{st}(t_0)$) характеризует изменение положения статического равновесия системы в момент её повреждения. Данный теоретический результат не подтверждает мнение авторов [2] о том, что дополнительный эффект, возникающий от разрушения связи, имеет вид импульсного воздействия.

Так как процесс свободных колебаний, описываемый уравнениями (15), является затухающим, то с течением времени (при $t \rightarrow \infty$) величины $\Phi_0(t-t_0) = \exp(S_0(t-t_0))$, $X(t) \rightarrow 0$, поэтому из (15) следует:

$$Y(t_\infty) = Y_{st}(t_0), \quad \dot{Y}(t_\infty) = \ddot{Y}(t_\infty) = 0.$$

Векторы восстанавливающих, диссипативных и инерционных сил ($t \geq t_0$):

$$R(t) = K(t_0)Y(t), \quad F(t) = C\dot{Y}(t), \quad I(t) = -M\ddot{Y}(t), \quad (17)$$

учитывая (14) и $Y(t_\infty) = Y_{st}(t_0)$, принимают значения ($t \rightarrow \infty$)

$$R(t_\infty) = K(t_0)Y_{st}(t_0) = Q, \quad F(t_\infty) = C\dot{Y}(t_\infty) = 0, \quad I(t_\infty) = -M\ddot{Y}(t_\infty) = 0.$$

Следовательно, после завершения колебаний в системе устанавливается новый баланс сил, в котором внутренние усилия, определяемые компонентами вектора $R(t)$, уравновешивают неподвижную статическую нагрузку (вектор Q).

4. Реакция ДДС в момент разрушения связи. Определим реакцию расчётной модели в момент её повреждения (при t_0) в двух состояниях: до выключения связи и после её выключения. Это позволит в аналитическом виде получить оценку динамической реакции, связанную с эффектом выключения связи. В частности, позволит дать ответ на вопрос о наличии или отсутствии скачков у параметров реакции повреждённой ДДС и определить от каких

условий это зависит. С этой целью для критической точки t_0 введём обозначения: t_0^- – время до выключения связи и t_0^+ – время после её выключения.

Учитывая (1), (9), (17), получаем параметры реакции расчётной модели в момент времени t_0^- , предшествующий отказу связи:

$$\left. \begin{aligned} Y(t_0^-) &= Y_{st}, & \dot{Y}(t_0^-) &= 0, & \ddot{Y}(t_0^-) &= 0; \\ R(t_0^-) &= KY_{st}, & F(t_0^-) &= 0, & I(t_0^-) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Уравнения реакции повреждённой ДДС следуют из (15) при t_0^+ :

$$\begin{aligned} Y(t_0^+) &= 2\operatorname{Re} \{X(t_0^+)\} + Y_{st}(t_0), & \dot{Y}(t_0^+) &= 2\operatorname{Re} \{S_0 X(t_0^+)\}, & \ddot{Y}(t_0^+) &= 2\operatorname{Re} \{S_0^2 X(t_0^+)\}, \\ X(t_0^+) &= (U_0 S_0)^{-1} \Delta K(t_0) Y_{st}. \end{aligned}$$

Упростим правые части этих выражений, используя вектор $X(t_0^+)$ и свойства (8): $\operatorname{Re} \{(U_0 S_0)^{-1}\} = -K(t_0)^{-1}/2$, $\operatorname{Re} \{U_0^{-1}\} = 0$, $\operatorname{Re} \{S_0 U_0^{-1}\} = M^{-1}/2$. Тогда выражения реакций повреждённой ДДС примут вид:

$$\begin{aligned} Y(t_0^+) &= 2\operatorname{Re} \{X(t_0^+)\} + Y_{st}(t_0) = 2\operatorname{Re} \{(U_0 S_0)^{-1}\} \Delta K(t_0) Y_{st} + Y_{st}(t_0) = \\ &= -K(t_0)^{-1} [K - K(t_0)] Y_{st} + Y_{st}(t_0) = -K(t_0)^{-1} Q + Y_{st} + Y_{st}(t_0) = Y_{st}, \\ \dot{Y}(t_0^+) &= 2\operatorname{Re} \{S_0 X(t_0^+)\} = 2\operatorname{Re} \{U_0^{-1}\} \Delta K(t_0) Y_{st} = 0, \\ \ddot{Y}(t_0^+) &= 2\operatorname{Re} \{S_0^2 X(t_0^+)\} = 2\operatorname{Re} \{S_0 U_0^{-1}\} \Delta K(t_0) Y_{st} = M^{-1} \Delta K(t_0) Y_{st}. \end{aligned}$$

Окончательно кинематические и силовые параметры реакции повреждённой ДДС при $t = t_0^+$ записываются так:

$$\left. \begin{aligned} Y(t_0^+) &= Y_{st}, & \dot{Y}(t_0^+) &= 0, & \ddot{Y}(t_0^+) &= M^{-1} \Delta K(t_0) Y_{st}, \\ R(t_0^+) &= K(t_0) Y_{st}, & F(t_0^+) &= 0, & I(t_0^+) &= -\Delta K(t_0) Y_{st}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

5. Анализ результатов. Для оценки качества полученных решений составим невязки величин, определяющих кинематические и силовые параметры реакции ДДС в момент отказа связи (при t_0), по следующим формулам:

$$\Delta Y(t_0) = Y(t_0^+) - Y(t_0^-), \quad \Delta \dot{Y}(t_0) = \dot{Y}(t_0^+) - \dot{Y}(t_0^-), \dots, \quad \Delta I(t_0) = I(t_0^+) - I(t_0^-).$$

Данные невязки представляют собой разности параметров реакции,

взятых в критической точке t_0 соответственно после и до выключения связи.

Учитывая в этих выражениях формулы (18), (19), будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \Delta Y(t_0) = 0, \quad \Delta \dot{Y}(t_0) = 0, \quad \Delta \ddot{Y}(t_0) = M^{-1} \Delta K(t_0) Y_{st}, \\ \Delta R(t_0) = -\Delta K(t_0) Y_{st}, \Delta F(t_0) = 0, \quad \Delta I(t_0) = -\Delta K(t_0) Y_{st}, \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

где $\Delta K(t_0)$ – невязка матрицы жесткости (13).

Из анализа формул невязок (20) следует, что в момент выключения связи (при t_0) часть параметров динамической реакции (перемещения, скорости и диссипативные силы) являются непрерывными функциями времени. Остальные параметры реакции (ускорения, восстанавливающие и инерционные силы) имеют скачки, зависящие от невязки матрицы жесткости $\Delta K(t_0)$.

В случае консервативной системы с 1-й степенью свободы невязка ускорения в (20) совпадает с формулой (7), приведенной в статье [6], где также делается правильный вывод о том, что дополнительный эффект от внезапного отказа связи, не может иметь характер импульсного воздействия.

6. Пример колебаний стальной балки, вызванных разрушением средней опоры. Расчетная схема балки (двутавр № 50) показана на рисунке 1 до (а) и после (б) разрушения промежуточной опоры. Жесткость балки $EJ = 79,454 \text{ МН} \cdot \text{м}^2$, жесткость средней опоры $r_0 = kEJ/l^3$, где $k = 10^5$. Расчет выполнялся при разбивке пролета $l = 15$ м на 10 участков ($a = 1,5$ м). Число степеней свободы балки равно $n = 9$. Элементы вектора статической узловой нагрузки Q , включающей собственный вес балки, составляют $Q_i = 4,148 \text{ кН}$.

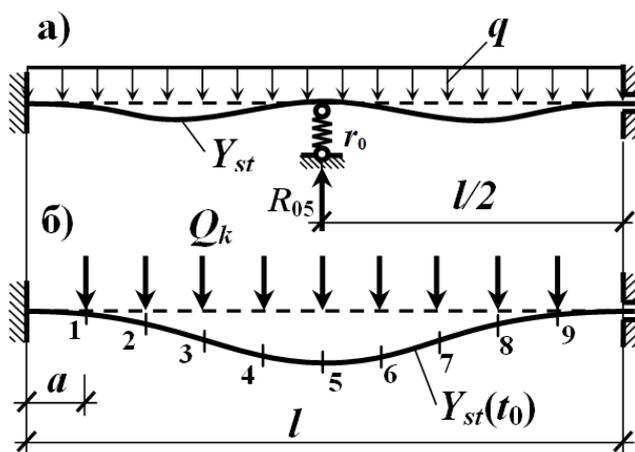


Рисунок 1 – Расчетная схема балки до (а) и после (б) разрушения опоры

Внутреннее трение материала учитывается моделью непропорционального демпфирования [5]: $C = \alpha(KT + TK)/2 + (1-\alpha)MV$, где: $T = \gamma W_0^{-1}$, $V = \gamma W_0$, $W_0 = \text{diag}(w_{01}, \dots, w_{0n})$, $w_{0i} = \sqrt{r_{ii}/m_i}$ (r_{ii} m_i – диагональные элементы матриц K и M), $\gamma = \delta/\pi$ ($\delta = 0,07$ – логарифмический декремент колебаний), $\alpha = 0,9045$.

На рисунке 2 показан треугольный импульс, моделирующий реакцию в промежуточной опоре с амплитудой $R_{05} = 20,6991$ кН, которая представляет реакцию в данной опоре перед её разрушением.

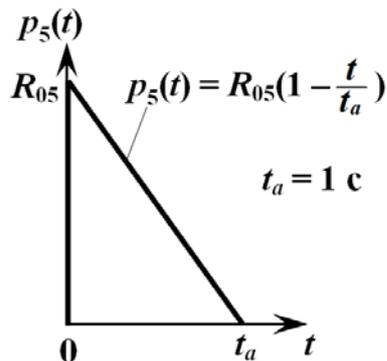


Рисунок 2 – Треугольный импульс, моделирующий реакцию в средней опоре

На рисунке 3 приведены осциллограммы кинематических параметров реакции балки. Цифры на графиках – номера сечений. Видно, что кривые перемещений при t_0^+ имеют значения, соответствующие компонентам вектора Y_{st} статических перемещений исходной расчётной модели. При $t \gg t_0$ эти кривые асимптотически стремятся к статическим перемещениям $Y_{st}(t_0)$ повреждённой ДДС (штрихпунктирные горизонтальные прямые на рисунке 3а). Кривые скоростей (рисунок 3б) и ускорений (рисунок 3в) всех узлов балки при t_0^+ имеют нулевые значения, за исключением ускорения 5-го узла: $A_5(t_0^+) = 4895,6$ кН; при $t \rightarrow \infty$ данные кривые стремятся к нулевым асимптотам.

На рисунке 3г сравниваются перемещения центрального узла для балки при внезапном разрушении опоры (сплошная кривая) и для балки без опоры, когда в узле 5 действует импульсная нагрузка, изменяющаяся по линейному закону (пунктир). Действие убывающего импульса моделирует исчезновение реакции вместе со средней опорой в течение отрезка времени $t_a = 1$ с

(рисунок 2). Кривые перемещений в балке с внезапным разрушением опоры и от действия треугольного импульса в балке без опоры асимптотически стремятся к разным статическим перемещениям. Первая кривая стремится к значению $y_{st,05} = 0,4588$ см (для повреждённой балки), вторая – к значению $y_{st,5} = 0,8792 \cdot 10^{-3}$ см (для неповреждённой системы). Это говорит о принципиальном различии результатов при данных вариантах моделирования задачи и о том, что характер поведения динамической реакции балки при втором варианте моделирования мало соответствует реальному характеру колебаний расчётной модели.

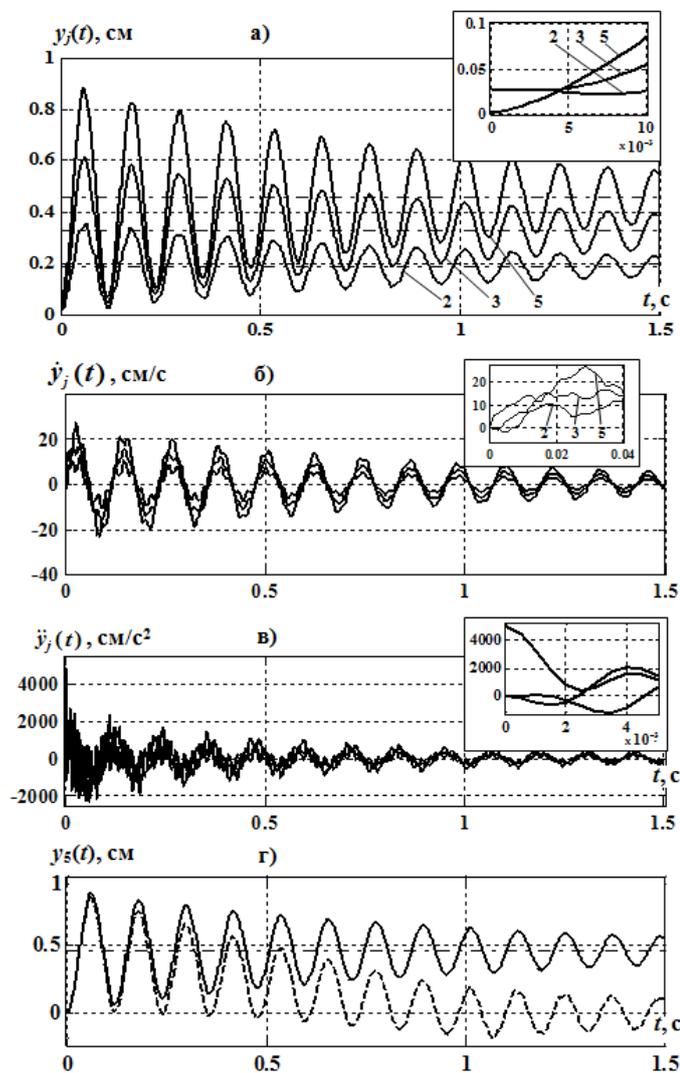


Рисунок 3 – Кинематические параметры реакции балки при внезапном разрушении средней опоры: а, б, в – осциллограммы перемещений, скоростей и ускорений узлов соответственно; г – перемещения 5-го узла (пунктир – то же от действия треугольного импульса)

Осциллограммы силовых параметров реакции: восстанавливающих $R_j(t)$, диссипативных $F_j(t)$ и инерционных $I_j(t)$ сил, вычисляемых по формулам (17), приведены на рисунке 4 а, б, в, соответственно. Восстанавливающие (упругие) силы до разрушения опоры во всех сечениях равны статическому значению нагрузки $R_i(t_0^-) = Q_i = 4,148\text{кН}$. После разрушения опоры (при t_0^+) значения упругих сил остались прежними, кроме 5-го сечения, где $R_5(t_0^+) = -16,5513\text{ кН}$.

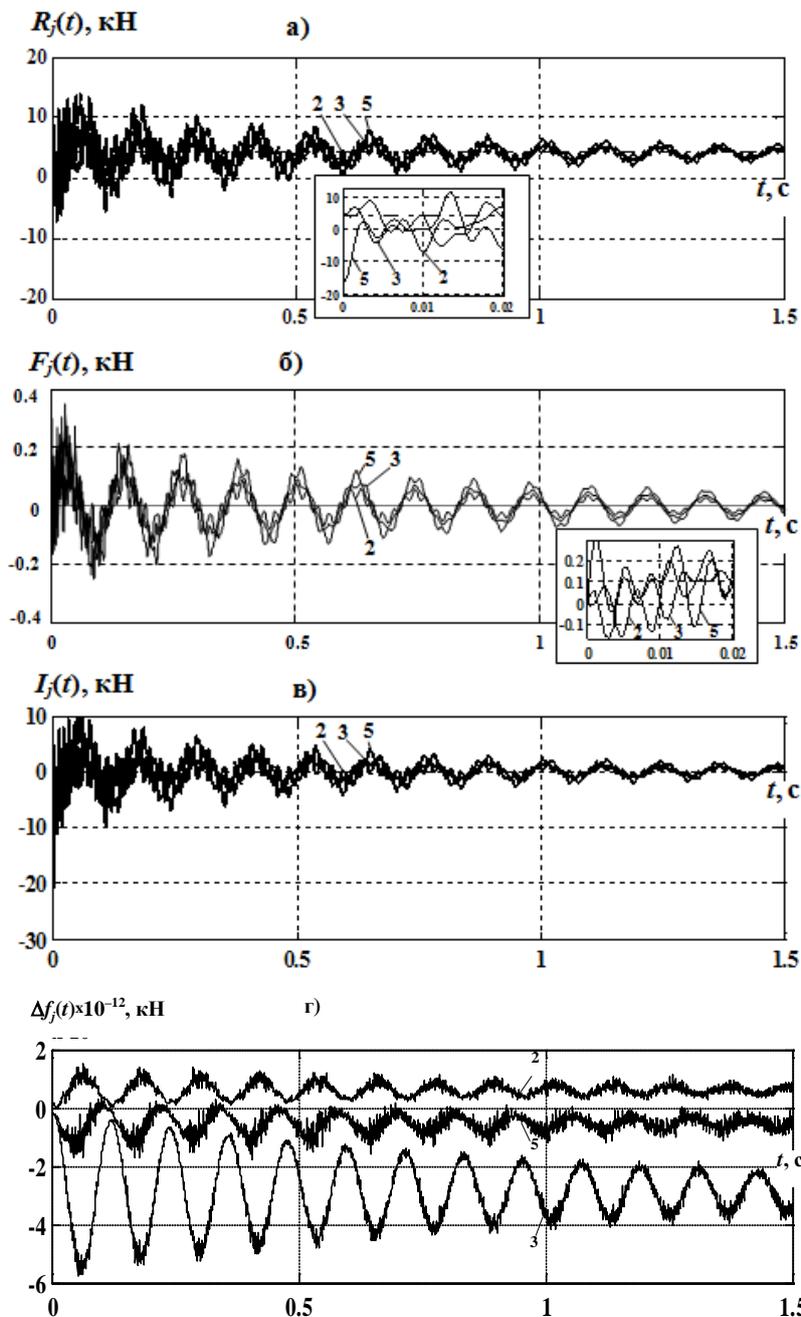


Рисунок 4 – Осциллограммы силовых параметров реакции балки при разрушении средней опоры: а, б, в – восстанавливающие, диссипативные и инерционные силы соответственно; г – невязка сил левой и правой частей уравнения движения ДДС

Таким образом, скачок данной силы в 5-м сечении равен $\Delta R_5(t_0) = -20,699$ кН. При $t \gg t_0$ все кривые восстанавливающей силы асимптотически стремятся к значению нагрузки Q_j . Инерционные силы во всех сечениях, кроме 5-го, при t_0^+ равны нулю, в 5-м сечении эта сила равна $I_5(t_0^+) = -20,699$ кН (рисунок 4в). Все значения скачков при t_0 согласуются с аналитическими выражениями (20).

Качество полученного решения оценивается с помощью вектор-функции $f(t)$, представляющей алгебраическую сумму всех сил левой части дифференциального уравнения движения (11): $f(t) = R(t) + F(t) - I(t)$. Характер сходимости решения показан на осциллограммах невязок сил левой и правой частей уравнения движения: $\Delta f_j(t) = f_j(t) - Q_j$ (рисунок 4г). Представленные графики свидетельствуют о высокой точности решения, погрешность которого не превышает величины $\varepsilon \leq 6 \cdot 10^{-12}$ кН.

Все вычисления проводились в математической системе MatLab. Шаг временного анализа – $\Delta t = 0,0005$ с.

Выводы. В рамках теории временного анализа предложен математический аппарат (модели, алгоритм исследований) применительно к анализу дискретных систем с выключающимися связями.

Для системы, находящейся в положении статического равновесия:

– показано, что дополнительный эффект от разрушения связи проявляется в виде внезапного изменения жёсткости системы и зависит от матрицы-невязки, определяемой как разность матриц жесткости расчетной модели конструкции до и после выключения связи;

– получены аналитические выражения невязок параметров динамической реакции системы в момент выключения связи;

– показано, что перемещения, скорости и диссипативные силы в момент выключения связи не имеют скачков, а ускорения, восстанавливающие и инерционные силы имеют скачки, зависящие от невязки матрицы жесткости.

Приведенные результаты анализа колебаний балки при разрушении опоры свидетельствуют о высокой эффективности метода. Открывается возможность

детального изучения поведения строительных конструкций в условиях выключения (разрушения) связей и получения надежных оценок прочности и живучести, необходимых при расчете и проектировании зданий и сооружений.

Библиографический список

1. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Расчётные модели сооружений и возможность их анализа. М.: ДМК Пресс, 2007. 600 с.

2. Андросова Н.Б., Ключева Н.В., Колчунов В.И. Некоторые предложения к нормированию параметров живучести сооружений // Вестник отделения строительных наук. Москва-Орёл-Курск: РААСН, 2011. Вып. № 15. С. 17-25.

3. Еремеев П.Г. Предотвращение лавинообразного (прогрессирующего) обрушения несущих конструкций уникальных большепролетных сооружений при аварийных воздействиях // Строительная механика и расчет сооружений. М.: ФГУП НИЦ «Строительство», 2006. № 2. С. 65-72.

4. Потапов А.Н. Динамический анализ дискретных диссипативных систем при нестационарных воздействиях. Челябинск: Изд. ЮУрГУ, 2003. 167 с.

5. Потапов А.Н. Анализ колебаний поврежденных конструкций // Интеграция, партнерство и инновации в строительной науке и образовании: Сб. трудов Международной научной конференции (Москва, 19-21 октября, 2011 г.) в 2 т. Т. 2. М.: МГСУ, 2011. 795 с.

6. Чернов Ю.Т. К расчету систем с выключающимися связями // Строительная механика и расчет сооружений. М.: ФГУП НИЦ «Строительство», 2010. № 4. С. 53-57.

7. Потапов А.Н. Соотношения ортогональности собственных форм колебаний в упругопластических диссипативных системах [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2015. №1. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mehanika/sootnosheniya-ortogonalnosti-sobstvennyh-form-kolebaniy-v-uprugoplasticheskikh-dissipativnyh-sistemah/at_download/file