

УДК 624.041

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТОНКОСТЕННОГО Z-ОБРАЗНОГО СТЕРЖНЯ С ЗАКРУГЛЕНИЕМ

***Волков Владимир Павлович,***

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,  
г. Пенза,*

*кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика».*

***Волкова Ольга Владимировна,***

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,  
г. Пенза,*

*аспирант.*

### **Аннотация**

Статья посвящена определению геометрических характеристик гнутого тонкостенного стержня Z-образного профиля с учетом закругления. Исследована зависимость между относительными геометрическими размерами Z-образного профиля и углом наклона стенки, при которой декартовы оси  $XU$  являются главными центральными осями и приведена таблица соответствующих значений. Приведены расчетные формулы для определения относительных значений длины контура, осевых моментов инерции.

**Ключевые слова:** гнутый тонкостенный стержень, Z-образный профиль, главные центральные оси сечения, моменты инерции.

## GEOMETRIC CHARACTERISTICS THIN-WALLED Z-SHAPED ROD WITH ANY CURVING

***Volkov Vladimir Pavlovich,***

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,*

*Candidate of Sciences, Associate Professor of the department «Mechanics».*

***Volkova Olga Vladimirovna,***

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,*

Post-graduate student.

## Abstract

Article is devoted to definition of the geometric characteristics of a buckler thin-walled rod Z-shaped profile with any curving. The paper studies the relationship between relative geometrical dimensions of Z-shaped profile and angle of incline wall, when axes  $XY$  is the main central axes section, and table of this values. To deduce a formula of calculation dimensions length of contours, axes moments of inertia.

**Keywords:** buckler thin-walled rod, Z-shaped profile, the main central axes section, moments of inertia.

Относительные геометрические размеры тонкостенного Z-образного сечения постоянной толщины  $\delta$  без учета закругления (рисунок 1) определяются из [1]:

$$\frac{B}{H} \Rightarrow \frac{1}{\tan \gamma} \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{3 \cos \gamma}};$$

$$\frac{L}{H} \Rightarrow \frac{B}{H} + \frac{1 + \cos \gamma}{\sin \gamma}.$$

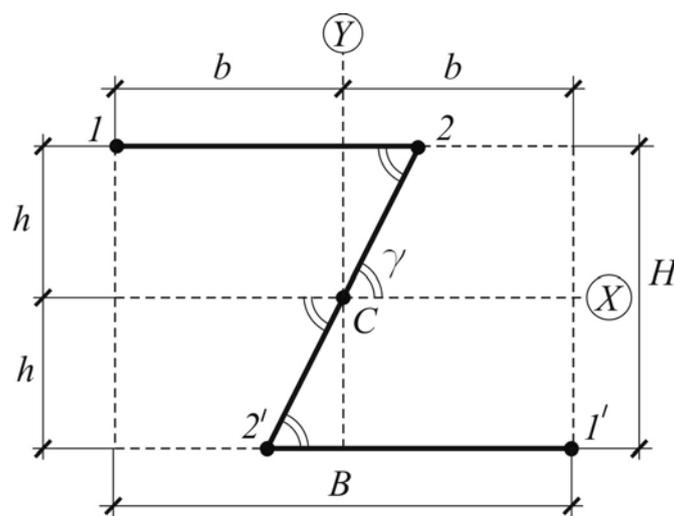


Рисунок 1 – Z-образное поперечное сечение без закруглений

Учитывая центральную симметрию, рассмотрим верхнюю половину Z-образного сечения с закруглениями (рисунок 2).

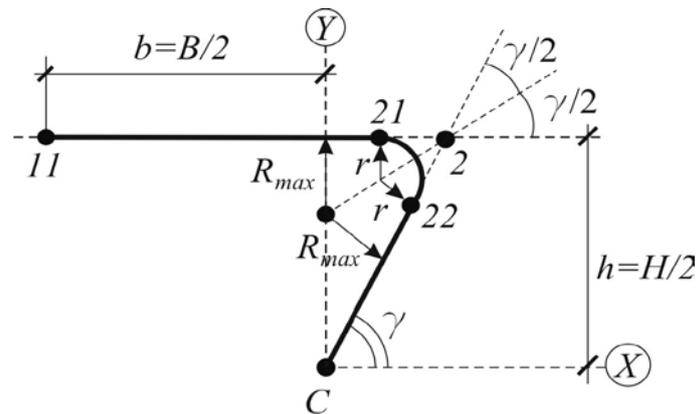


Рисунок 2 – Верхняя половина Z-образного поперечного сечения с закруглениями

$$R_{max} \Rightarrow h \cdot \frac{\tan\left(\gamma/2\right)}{\tan \gamma}.$$

Координаты  $x, y$  характерных точек и длины соответствующих участков  $l$ :

$$\begin{aligned} x_{11} &= -b; & y_{11} &= h; & l_{11} &= b; \\ x_{21} &= \frac{h}{\tan \gamma} - \frac{r}{\tan(\gamma/2)}; & y_{21} &= h; & l_{21} &= \frac{h}{\tan \gamma} - \frac{r}{\tan(\gamma/2)}; \\ x_{22} &= \frac{h}{\tan \gamma} - \frac{r \cdot \cos \gamma}{\tan(\gamma/2)}; & y_{22} &= h - \frac{r \cdot \sin \gamma}{\tan(\gamma/2)}; & l_{22} &= \frac{h}{\sin \gamma} - \frac{r}{\tan(\gamma/2)}. \end{aligned}$$

Условные обозначения:

$XU$  – главные центральные оси сечения;

$B=2b$  – габаритная ширина профиля сечения;

$H=2h$  – габаритная высота срединной линии профиля сечения;

$L$  – полная длина срединной линии профиля сечения;

$r$  – радиус закругления срединной линии профиля сечения.

Рассматривается задача определения геометрических размеров гнутого тонкостенного стержня Z-образного сечения постоянной толщины  $\delta$  с учетом закругления  $r$  (рисунок 2), при которых оси  $XU$  являются главными центральными осями, т.е. дано:  $H, 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq R_{max}$ ; найти:  $B$ .

Центральные оси  $XU$  (рисунок 2) являются главными [2], если

$$I_{XY} = \int_{L/2} \delta(s) \cdot x(s) \cdot y(s) \cdot ds \Rightarrow 0,$$

$$\frac{l_{11}^2 \cdot y_{11}}{2} = \frac{l_{21}^2 \cdot y_{21}}{2} + \frac{l_{22} \cdot x_{22} \cdot y_{22}}{3} + \int_0^{\pi-\gamma} (x_{21} + r \cdot \sin \alpha) \cdot (y_{21} - r \cdot (1 - \cos \alpha)) \cdot r \cdot d\alpha,$$

$$\frac{b^2 \cdot h}{2} = \frac{l_{21}^2 \cdot h}{2} + \frac{l_{22} \cdot x_{22} \cdot y_{22}}{3} +$$

$$+ r \cdot \left[ (x_{21} \cdot (\pi - \gamma) + r \cdot (1 + \cos \gamma)) \cdot (h - r) + \left( x_{21} + \frac{r \cdot \sin \gamma}{2} \right) \cdot r \cdot \sin \gamma \right].$$

Введем обозначения:

$$\psi = \frac{B}{H} \Rightarrow \frac{b}{h}; \quad \varepsilon = \frac{r}{R_{max}} \Rightarrow \frac{r}{h} \cdot \frac{\tan \gamma}{\tan(\gamma/2)}, \quad \text{где } 0 \leq \varepsilon \leq 1.$$

Относительные геометрические размеры тонкостенного Z-образного сечения постоянной толщины  $\delta$  с учетом закругления найдем из уравнения:

$$\psi^2 = \left( \frac{1 - \varepsilon}{\tan \gamma} \right)^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{(1 - \varepsilon \cdot \cos \gamma)^3}{\sin \gamma \cdot \tan \gamma} +$$

$$+ 2 \cdot \frac{\varepsilon \cdot \tan(\gamma/2)}{\tan \gamma} \cdot \left[ \left( \frac{1 - \varepsilon}{\tan \gamma} \cdot (\pi - \gamma) + \frac{\varepsilon \cdot \tan(\gamma/2)}{\tan \gamma} \cdot (1 + \cos \gamma) \right) \cdot \left( 1 - \frac{\varepsilon \cdot \tan(\gamma/2)}{\tan \gamma} \right) + \right.$$

$$\left. + \left( \frac{1 - \varepsilon}{\tan \gamma} + \frac{\varepsilon \cdot \tan(\gamma/2)}{\tan \gamma} \cdot \frac{\sin \gamma}{2} \right) \cdot \frac{\varepsilon \cdot \tan(\gamma/2)}{\tan \gamma} \cdot \sin \gamma \right]. \quad (1)$$

Относительная длина контура гнутого Z-образного профиля:

$$\frac{L}{H} = \frac{1}{h} \cdot (l_{11} + l_{21} + l_{22} + r \cdot (\pi - \gamma)) \Rightarrow \psi + \frac{1 + [(\pi - \gamma) \cdot \tan(\gamma/2) - 2] \cdot \varepsilon}{\tan \gamma} + \frac{1}{\sin \gamma}. \quad (2)$$

Зависимости между  $\gamma$ ,  $\varepsilon = \frac{r}{R_{max}}$  и  $\psi = \frac{B}{H}$  приведены в таблице 1.

Осевые моменты инерции определяются по формулам:

$$I_X = \int_L \delta(s) \cdot y^2(s) \cdot ds \Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot \int_{L/2} y^2(s) \cdot ds$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot \left\{ (l_{11} + l_{21}) \cdot h^2 + \frac{1}{3} \cdot l_{22} \cdot y_{22}^2 + \int_0^{\pi-\gamma} (y_{21} - r \cdot (1 - \cos \alpha))^2 \cdot r \cdot d\alpha \right\},$$

$$I_X \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^3} \Rightarrow \left( \psi + \frac{1 - \varepsilon}{\tan \gamma} \right) + \frac{(1 - \varepsilon \cdot \cos \gamma)^3}{3 \cdot \sin \gamma} + \frac{\varepsilon \cdot \tan(\gamma/2)}{\tan \gamma} \cdot \left[ \left( 1 - \frac{\varepsilon \cdot \tan(\gamma/2)}{\tan \gamma} \right)^2 \cdot (\pi - \gamma) + \right.$$

$$\left. + 2 \cdot \left( 1 - \frac{\varepsilon \cdot \tan(\gamma/2)}{\tan \gamma} \right) \cdot \frac{\varepsilon \cdot \tan(\gamma/2)}{\tan \gamma} \cdot \sin \gamma + \left( \frac{\varepsilon \cdot \tan(\gamma/2)}{\tan \gamma} \right)^2 \cdot \frac{\pi - \gamma - \sin \gamma \cdot \cos \gamma}{2} \right]; \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
I_Y &= \int_L \delta(s) \cdot x^2(s) \cdot ds \Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot \int_{L/2} x^2(s) \cdot ds \Rightarrow \\
&\Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot \left\{ \frac{l_{11} \cdot x_{11}^2}{3} + \frac{l_{21} \cdot x_{21}^2}{3} + \frac{l_{22} \cdot x_{22}^2}{3} + \int_0^{\pi-\gamma} (x_{21} + r \cdot \sin \alpha)^2 \cdot r \cdot d\alpha \right\}, \\
I_y \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^3} &\Rightarrow \frac{\psi^3}{3} + \left( \frac{1-\varepsilon}{\tan \gamma} \right)^3 \cdot \frac{1}{3} + \frac{(1-\varepsilon \cdot \cos \gamma)^3}{3 \cdot \sin \gamma \cdot \tan^2 \gamma} + \frac{\varepsilon \cdot \tan(\gamma/2)}{\tan \gamma} \cdot \left[ \left( \frac{1-\varepsilon}{\tan \gamma} \right)^2 \cdot (\pi - \gamma) + \right. \\
&\left. + 2 \cdot \frac{1-\varepsilon}{\tan \gamma} \cdot \frac{\varepsilon \cdot \tan(\gamma/2)}{\tan \gamma} \cdot (1 + \cos \gamma) + \left( \frac{\varepsilon \cdot \tan(\gamma/2)}{\tan \gamma} \right)^2 \cdot \frac{\pi - \gamma + \sin \gamma \cdot \cos \gamma}{2} \right]. \quad (4)
\end{aligned}$$

Таблица 1. Зависимости между геометрическими характеристиками

$\gamma$ , рад	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 0.25$	$\varepsilon = 0.5$	$\varepsilon = 0.75$	$\varepsilon = 1$
1,3467	0,455842	0,439015	0,42092	0,40157	0,381
1,31396	<b>0,5</b>	0,47886	0,45616	0,43193	0,40619
1,29134	0,530458	0,50604	0,47988	0,45198	0,42239
1,25967	0,57324	0,54386	0,51245	0,47901	0,44358
1,229	0,615	0,58042	0,54346	0,5042	0,46266
1,1864	0,6742	0,63146	0,58601	0,53787	0,48705
1,1267	0,76	0,70425	0,64526	0,58307	0,51763
1,09601	0,805905	0,74259	0,67583	0,60563	0,53189
$\pi/3$	0,881919	0,80532	0,72497	0,64084	0,55277
0,976632	<b>1</b>	0,90103	0,79804	0,69093	0,57941
0,910139	1,12256	0,99846	0,87038	0,7381	0,60113
0,826579	1,29712	1,1345	0,96856	0,79879	0,62436
$\pi/4$	1,39384	1,2089	1,021	0,829893	0,63433
0,5915	1,999	1,6623	1,3296	1	0,67024

Примечание: При промежуточных значениях  $\gamma$  и  $\varepsilon$  величина  $\psi = \frac{B}{H}$  определяется по линейной интерполяции.

### **Библиографический список:**

1. Волков В.П., Волкова О.В. Определение геометрических характеристик тонкостенного Z-образного стержня [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2015. №1. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader.

URL: [http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mehanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostennogo-z-obraznogo-sterzhnya/at\\_download/file](http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mehanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostennogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file) (дата обращения: 30.10.2015)

2. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов: учеб. для вузов/ под ред. А.В. Александрова. 3-е изд., испр. М.: Высшая Школа, 2003. 560 с.