

УДК 624.042:539.3

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИЗГИБАЕМОЙ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ БАЛКИ С УЧЕТОМ ТРЕЩИНООБРАЗОВАНИЯ**

***Земцова Ольга Григорьевна,***

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,  
г.Пенза,*

*кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика».*

***Шеин Александр Иванович,***

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,  
г.Пенза,*

*доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Механика».*

### **Аннотация**

Представлена разработка математической модели железобетонной балки, учитывающей влияние появления и развития трещин на работу конструкции.

**Ключевые слова:** трещина, железобетонная балка, математическая модель.

## **MATHEMATICAL MODEL OF REINFORCED CONCRETE BEAM BENDING WITH REGARD CRACKING**

***Zemtsova Olga Grigorevna,***

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,*

*Candidate of Sciences, Associate Professor of the department “Mechanics”.*

***Shein Alexander Ivanovich,***

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,*

*Doctor of Sciences, Professor, Head of the department “Mechanics”.*

### **Abstract**

The paper presents the development of a mathematical model of reinforced concrete beam, which takes into account the impact of the emergence and development of cracks in the construction work.

**Keywords:** crack, reinforced concrete beam, mathematical model.

Обследования эксплуатируемых конструкций показывают, что в их материале всегда присутствуют дефекты типа пустот или трещин. Эти трещины могут измеряться как микрометрами, так и иметь макроразмеры, измеряемые сантиметрами и даже десятками сантиметров в зависимости от масштаба конструкции. Возникает вопрос о том, насколько они опасны в отношении ее разрушения. Инженерная практика имеет примеры многих аварий, происшедших, на первый взгляд по непонятным причинам, поскольку разрушение хрупкого типа происходило при достаточно низком уровне напряжений. Во многих странах были проведены многочисленные исследования, позволившие установить, что ответственными за внезапные хрупкие разрушения являются дефекты типа трещин. В то же время обследования показывают, что трещины могут длительное время существовать в конструкции, оставаясь стабильными и не проявляя тенденции к росту.

Поэтому при расчетах необходимо использовать математическую модель, которая не только позволяет изучать вопросы появления и развития трещин в элементах конструкций в зависимости от уровня нагружения и других условий, но и дает возможность учитывать влияние трещин на работу конструкций.

Рассмотрим методику построения такой математической модели на примере изгибаемой железобетонной балки.

Напряжения в бетоне и арматуре описываются зависимостями

$$\sigma_b = E_b \varepsilon - A_3^b \varepsilon^3. \quad (1)$$

$$\sigma_a = E_a \varepsilon - A_3^a \varepsilon^3, \quad (2)$$

Коэффициенты  $A_3^a$  и  $A_3^b$  определяются по формулам:

$$A_3^b = \frac{4}{27} \cdot \frac{E_b^3}{R_b^2}, \quad (3)$$

$$A_3^a = \frac{4}{27} \cdot \frac{E_a^3}{\sigma_{\text{тп}(a)}^2}, \quad (4)$$

где  $E_a$  – модуль упругости стали;

$E_б$  – начальный модуль упругости бетона;

$\sigma_{\text{пн(а)}}$  – предел временного сопротивления стали;

$R_б$  – расчетная прочность бетона,  $R_б = \sigma_{\text{пн(б)}}$ .

Деформация  $\varepsilon$  определяется с использованием гипотезы плоских сечений

$$\varepsilon_x = -y\ddot{v} + \frac{1}{2}\dot{v}^2, \quad (5)$$

где  $y$  – геометрическая координата;  $v$  – вертикальное перемещение (прогиб).

Второе слагаемое в формуле (5) настолько мало, что может не учитываться в расчете:

$$\varepsilon_x = -y\ddot{v}. \quad (6)$$

Дифференциальное уравнение равновесия балки получим в результате ряда преобразований:

$$\sum M_{\text{внеш}} = \sum M_{\text{внут}} \quad (7)$$

$$\sum M_б + \sum M_a - \sum M_{\text{внеш}} = 0. \quad (8)$$

Учет внутренних усилий в бетоне (рисунок 1)

$$\sum M_б = \int_A \sigma_x y dA = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x y dy = b \int_0^{h/2} \sigma_x y dy + b \int_{-h/2}^0 \sigma_x y dy. \quad (9)$$

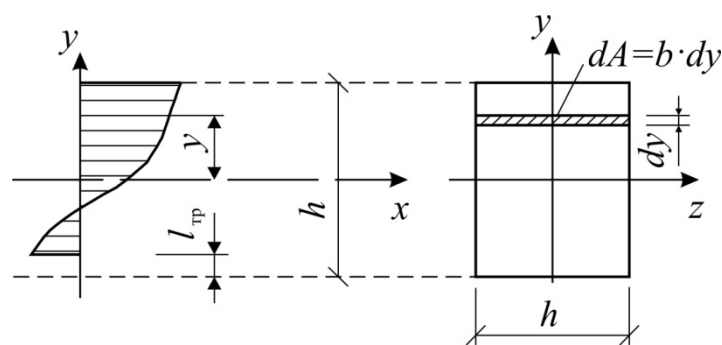


Рисунок 1 – Учет внутренних усилий в бетоне

Полагая, что дробление сжатой зоны при продольном изгибе не наступит, для быстроты вычисления момент в бетоне от изгиба можно вычислить при помощи интеграла:

$$\begin{aligned}
b \int_0^{h/2} \sigma_x y dy &= b \int_0^{h/2} (E_6 \varepsilon_x - A_3^6 \varepsilon_x^3) y dy = b E_6 \int_0^{h/2} (-y \ddot{v}) y dy - b A_3^6 \int_0^{h/2} (-y \ddot{v})^3 y dy = \\
&= -\ddot{v} E_6 b \int_0^{h/2} y^2 dy + \ddot{v}^3 A_3^6 b \int_0^{h/2} y^4 dy = -\ddot{v} E_6 \frac{bh^3}{24} + \ddot{v}^3 A_3^6 \frac{bh^5}{160}.
\end{aligned} \tag{10}$$

Обозначим

$$E_6 \frac{bh^3}{24} = k_1, \tag{11}$$

$$A_3^6 \frac{bh^5}{160} = k_2. \tag{12}$$

Тогда первое слагаемое в формуле (9) примет вид:

$$b \int_0^{h/2} \sigma_x y dy = -\ddot{v} k_1 + \ddot{v}^3 k_2. \tag{13}$$

Для определения момента в бетоне растянутой зоны, где возможно образование трещин, численное интегрирование заменяем суммированием. Для этого делим площадь сечения балки в случае плоского изгиба на  $\beta$  участковых полос (для практического расчета  $\beta=100$  или больше) шириной  $d$ .

$$\begin{aligned}
b \int_{-h/2}^0 \sigma_x y dy &\approx b \sum_{j=1}^{\beta/2} db \sigma_j \left( jd - \frac{d}{2} \right) = db^2 \sum_{j=1}^{\beta/2} \sigma_j \left( jd - \frac{d}{2} \right) = db^2 \sum_{j=1}^{\beta/2} (-E_6 y \ddot{v} + \\
&+ A_3^6 y^3 \ddot{v}^3) \left( jd - \frac{d}{2} \right) = -db^2 \sum_{j=1}^{\beta/2} \left( E_6 \ddot{v} - A_3^6 \left( jd - \frac{d}{2} \right)^2 \ddot{v}^3 \right) \left( jd - \frac{d}{2} \right)^2
\end{aligned} \tag{14}$$

Формула (9) приобретает вид:

$$\sum M_6 = -\ddot{v} k_1 + \ddot{v}^3 k_2 - db^2 \sum_{j=1}^{\beta/2} \left( E_6 \ddot{v} - A_3^6 \left( jd - \frac{d}{2} \right)^2 \ddot{v}^3 \right) \left( jd - \frac{d}{2} \right)^2. \tag{15}$$

Учет внутренних усилий в арматуре

$$\sum M_a = 2N'_s h_1 + 2N_s h_2 \tag{16}$$

$$N'_s = \sigma'_a A'_s, \tag{17}$$

$$N_s = \sigma_a A_s. \tag{18}$$

$$\sigma_a = E_a \varepsilon - A_3^a \varepsilon^3, \tag{19}$$

Тогда

$$\sum M_a = 2 \left[ E_a (-h_1^2 \ddot{v}) - A_3^a (-h_1^2 \ddot{v})^3 \right] A'_s + 2 \left[ E_a (h_2^2 \ddot{v}) - A_3^a (h_2^2 \ddot{v})^3 \right] A_s. \tag{20}$$

Дифференциальное уравнение равновесия балки имеет вид:

$$\begin{aligned}
 & -\ddot{v}k_1 + \ddot{v}^3k_2 - db^2 \sum_{j=1}^{\beta/2} \left( E_6 \ddot{v} - A_3^6 \left( jd - \frac{d}{2} \right)^2 \ddot{v}^3 \right) \left( jd - \frac{d}{2} \right)^2 + \\
 & + 2 \left[ E_a \left( -h_1^2 \ddot{v} \right) - A_3^a \left( -h_1^2 \ddot{v} \right)^3 \right] A'_s + 2 \left[ E_a \left( h_2^2 \ddot{v} \right) - A_3^a \left( h_2^2 \ddot{v} \right)^3 \right] A_s - \sum M_{\text{внеш}} = 0.
 \end{aligned} \quad (21)$$

Для решения дифференциального уравнения используем конечно-разностную аппроксимацию производных; для этого делим балку на  $n$  участков длиной  $\Delta$  (рисунок 2):

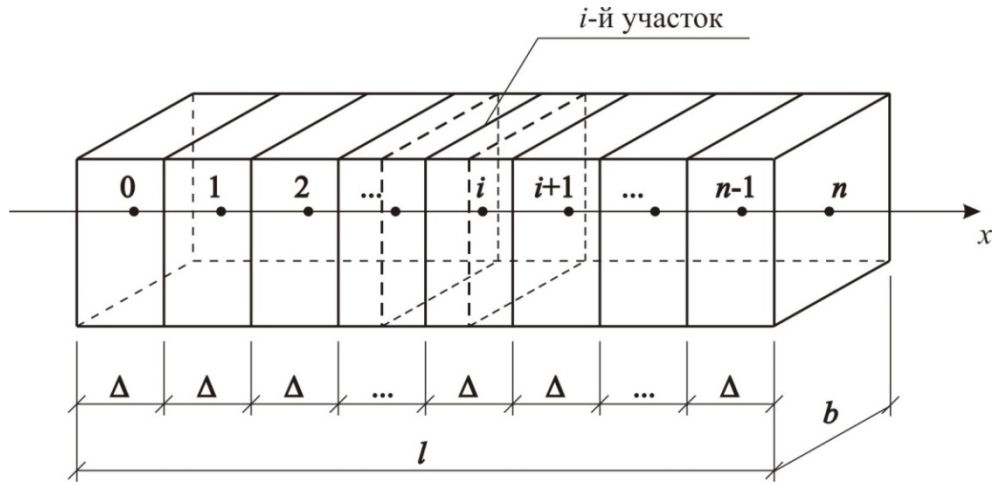


Рисунок 2 –Разбиение балки на  $n$  участков длиной  $\Delta$

$$\ddot{v} = \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2}. \quad (22)$$

Дифференциальное уравнение (21) заменяем системой нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} k_1 + \left( \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} \right)^3 k_2 - \\
 & - db^2 \sum_{j=1}^{\beta/2} \left( E_6 \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} - A_3^6 \left( jd - \frac{d}{2} \right)^2 \left( \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} \right)^3 \right) \left( jd - \frac{d}{2} \right)^2 + \\
 & + 2 \left[ E_a \left( -h_1^2 \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} \right) - A_3^a \left( -h_1^2 \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} \right)^3 \right] A'_s + \\
 & + 2 \left[ E_a \left( h_2^2 \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} \right) - A_3^a \left( h_2^2 \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} \right)^3 \right] A_s - \sum M_{\text{внеш}} = 0.
 \end{aligned} \quad (23)$$

Хрупкое разрушение связано с образованием и развитием трещин. В дальнейшем будем рассматривать трещины нормального отрыва. В задачах

динамики высоконагруженных систем в отличие от усталостного трещинообразования, трещинообразование вызывается величиной нагрузки, а развивается вследствие ее переменного воздействия. Эту задачу можно рассматривать как задачу малоциклового усталости

До достижения в крайних волокнах растягивающими напряжениями (или деформациями) некоторых предельных значений, внутреннюю статическую неопределимость будем раскрывать на основе обычной гипотезы плоских сечений и условий равновесия твердого нелинейно деформируемого композита.

После достижения в некотором сечении деформаций, равных предельным, в растянутых волокнах образуется трещина, которая может быстро развиваться. Сдерживающее влияние при этом оказывает в основном растянутая стальная арматура.

Для учета трещинообразования используется соотношение

$$\varepsilon^+ \leq [\varepsilon^+] \quad (24)$$

где  $[\varepsilon^+]$  – нормативное значение деформации при растяжении.

Учет возможного дробления сжатой зоны балки можно проводить по неравенству

$$|\varepsilon^-| \leq [|\varepsilon^-|] \quad (25)$$

где  $[|\varepsilon^-|]$  – нормативное значение деформации при сжатии по абсолютной величине.

При невыполнении условия (24) участок-полоса (или участки) исключается из расчетной части бетонного сечения (рисунок 3) [1].

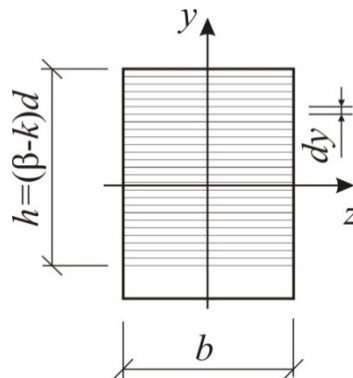


Рисунок 3 – Исключение части сечения из расчета

Полученная система нелинейных уравнений (23) и система ограничений (24-25) используется для определения напряженно-деформированного состояния при действии статической нагрузки.

Математическая модель в общем виде представляет собой систему из уравнений напряженно-деформированного состояния и двух условий равновесия балки как твердого тела:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n M_{i, \text{внут}} - \sum_{i=1}^n M_{i, \text{внеш}} &= 0; \\ \sum F_{ky} &= 0; \\ \sum M_A &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\varepsilon \leq [\varepsilon]$$

или, в развернутом виде:

$$\left. \begin{aligned} & - \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} k_1 + \left( \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} \right)^3 k_2 - \\ & - db^2 \sum_{j=1}^{\beta/2} \left( E_6 \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} - A_3^6 \left( jd - \frac{d}{2} \right)^2 \left( \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} \right)^3 \right) \left( jd - \frac{d}{2} \right)^2 + \\ & + 2 \left[ E_a \left( -h_1^2 \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} \right) - A_3^a \left( -h_1^2 \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} \right)^3 \right] A'_s + \\ & + 2 \left[ E_a \left( h_2^2 \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} \right) - A_3^a \left( h_2^2 \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\Delta^2} \right)^3 \right] A_s - \sum M_{\text{внеш}} = 0; \\ & R_A + R_B - \sum P - ql = 0; \\ & R_B l - M_p - \frac{ql^2}{2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\varepsilon \leq [\varepsilon]$$

### Библиографический список:

1. Шеин А.И., Земцова О.Г. Моделирование и исследование динамики железобетонных балок в условиях трещинообразования: моногр. Пенза: ПГУАС, 2014. 123 с.

2. Шеин А.И. Математическое моделирование механических систем на примере задачи гашения колебаний высотных сооружений [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2015. №1. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: [http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/matematicheskoe-modelirovanie-chislennye-metody-i-kompleksy-programm/matematicheskoe-modelirovanie-mehanicheskikh-sistem-na-primere-zadachi-gasheniya-kolebaniy-vysotnyh-sooruzhenii/at\\_download/file](http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/matematicheskoe-modelirovanie-chislennye-metody-i-kompleksy-programm/matematicheskoe-modelirovanie-mehanicheskikh-sistem-na-primere-zadachi-gasheniya-kolebaniy-vysotnyh-sooruzhenii/at_download/file).

3. Земцова О.Г., Володин В.А. Комплексы программ, применяемые для моделирования и расчета конструкций зданий и сооружений [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2015. №1. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: [http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/matematicheskoe-modelirovanie-chislennye-metody-i-kompleksy-programm/kompleksy-programm-primenyaemye-dlya-modelirovaniya-i-rascheta-konstrukcii-zdaniy-i-sooruzhenii/at\\_download/file](http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/matematicheskoe-modelirovanie-chislennye-metody-i-kompleksy-programm/kompleksy-programm-primenyaemye-dlya-modelirovaniya-i-rascheta-konstrukcii-zdaniy-i-sooruzhenii/at_download/file)