

УДК 539.3/.6

РАСЧЁТ БАЛКИ НА ДЕЙСТВИЕ СОБСТВЕННОГО ВЕСА

Бакушев Сергей Васильевич,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Бричкина Елизавета Григорьевна,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

студент.

Аннотация

Рассматриваются вопросы определения нормальных и касательных напряжений в упругом стержне, находящемся в условиях плоского поперечного изгиба, от действия собственного веса. Рассматриваются прямоугольное и трапециевидное поперечные сечения. Показано, что в определении нормальных σ_z и касательных τ_{zy} напряжений от собственного веса особенностей нет. Что касается нормальных напряжений на горизонтальных площадках σ_y от собственного веса, напряжение σ_y изменяется по высоте сечения по закону кубической параболы; в прямоугольном сечении нормальное напряжение на горизонтальных площадках σ_y от собственного веса равно нулю как на нейтральной линии, так и в фибровых волокнах; в сжатой части поперечного сечения нормальное напряжение на горизонтальных площадках положительно, а растянутой части – отрицательно; наибольшая величина нормального напряжения на горизонтальных площадках σ_y примерно на порядок меньше величины нормальных σ_z и касательных τ_{zy} напряжений. Таким образом, при оценке прочности изгибаемых стержней нормальным напряжением на горизонтальных площадках можно пренебречь.

Ключевые слова: стержень, упругий изгиб, собственный вес, нормальные и касательные напряжения.

DESIGN OF A BEAM FOR ITS OWN WEIGHT

Bakushev Sergey Vasilevich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor of the department “Mechanics”.

Brichkina Elizaveta Grigorievna,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

student.

Abstract

The problems of determining normal and shear stresses in an elastic member under conditions of planar transverse bending from the action of its own weight are considered. Rectangular and trapezoidal cross-sections are considered. It is shown that in the definition of normal, σ_z and tangents, τ_{zy} . There are no special stresses due to its own weight. As for the normal stresses on horizontal pads, σ_y from its own weight, the tension is σ_y changes in the height of the section according to the law of the cubic parabola; In the rectangular cross-section, the normal stress on the horizontal platforms is σ_y of its own weight is zero both on the neutral line and in the fibers; In the compressed part of the cross-section, the normal stress on the horizontal platforms is positive, and in the tensile part – negative; The maximum value of normal stress on horizontal platforms is σ_y about an order of magnitude smaller than the normal σ_z and tangents, τ_{zy} Stress. Thus, when evaluating the strength of bending members, normal stress on horizontal platforms can be neglected.

Keywords: member, elastic bending, self-weight, normal and shear stresses.

Введение

Рассмотрим плоский поперечный изгиб однопролётной балки на двух опорах, поперечное сечение которой, постоянное по длине, имеет одну вертикальную, или две – вертикальную и горизонтальную оси симметрии [1]. Балка нагружена только собственным весом. Обозначим: объёмный вес материала балки — ρ , длину балки — l , площадь поперечного сечения — A . Опорные реакции на опорах А и В будут равны:

$$R_A = R_B = \frac{1}{2}\rho l A. \quad (1)$$

Внутренние усилия – изгибающий момент и поперечная сила – будут определяться соотношениями:

$$M_x(z) = \frac{1}{2}\rho A z(l-z); \quad Q_y(z) = \rho A \left(\frac{1}{2}l - z \right). \quad (2)$$

В соответствии с гипотезой плоских сечений нормальные напряжения в продольных волокнах будут вычисляться по формуле:

$$\sigma_z(y, z) = \frac{M_x(z)}{I_x} y. \quad (3)$$

Для касательных напряжений имеем формулу Журавского:

$$\tau_{zy}(y, z) = \frac{Q_y(z) S_x^{omc}(y)}{I_x b_y}. \quad (4)$$

Найдём нормальные напряжения на горизонтальных площадках. Вырежем из балки элемент длиной dz . Проведём в этом элементе горизонтальное сечение на расстоянии y от нейтральной оси Z и рассмотрим равновесие верхней отсечённой части этого элемента (рис. 1).

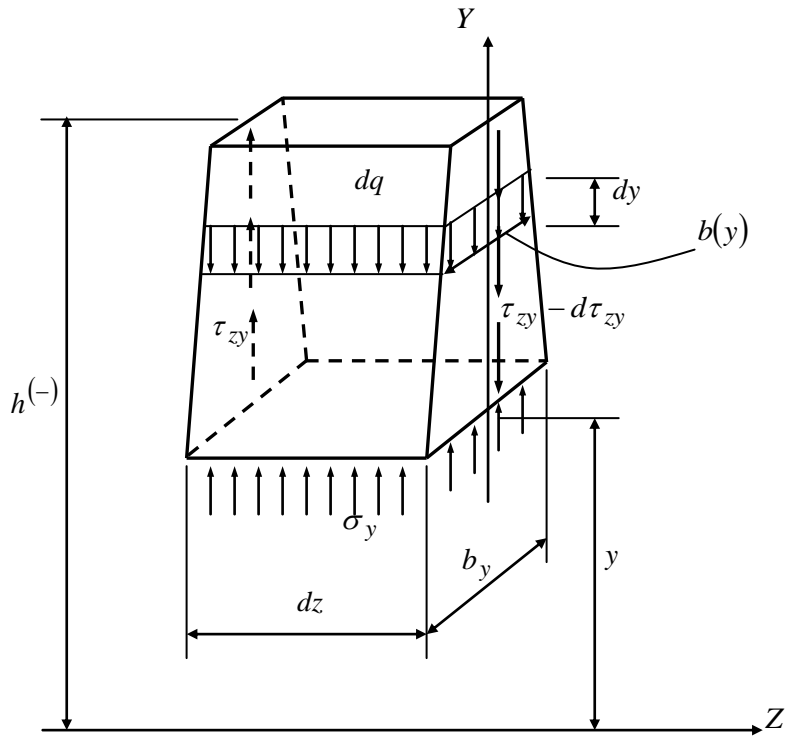


Рисунок 1 – Верхняя отсечённая часть элемента

На отсечённую часть действует нормальные и касательные напряжения. На рис. 1 показаны напряжения, дающие отличные от нуля проекции на вертикальную ось Y : касательные напряжения τ_{zy} по левой боковой грани, касательные напряжения $\tau_{zy} - d\tau_{zy}$ по правой боковой грани, нормальные напряжения σ_z по нижней грани, давление от собственного веса отсечённой части.

Давление собственного веса на единицу площади от слоя dy будет равно:

$$dz = \rho dy.$$

Тогда давление от собственного веса отсечённой части на уровне y на единицу площади будет определяться соотношением:

$$q = \int_y^{h^{(-)}} \rho dy = \rho \int_y^{h^{(-)}} dy = \rho(h^{(-)} - y),$$

и будет равномерно распределено по площади $b_y dz$.

Условие равновесия отсечённой части в проекции на ось Y , при условии равномерного распределения нормального напряжения $\sigma_y(y, z)$ по площади $b_y dz$ получает вид:

$$-q \cdot b_y dz + \sigma_y(y, z) \cdot b_y dz + \int_{A^{omc}} d\tau_{zy}(y, z) dA = 0.$$

Отсюда получаем величину нормального напряжения от собственного веса балки на горизонтальной площадке на уровне y :

$$\sigma_y(y, z) = \rho(h^{(-)} - y) - \frac{1}{b_y} \int_{A^{omc}} \frac{d\tau_{zy}(y, z)}{dz} dA. \quad (5)$$

Нагрузим балку *равномерно-распределённой нагрузкой*, эквивалентной собственному весу балки $P = \rho l A$. Тогда нагрузка, приходящаяся на единицу длины балки, будет равна:

$$q_n = \frac{P}{l} = \rho A. \quad (6)$$

Нагрузка, приходящаяся на единицу площади верхней стороны балки, будет равна:

$$q = \frac{P}{l b_e} = \rho \frac{A}{b_e}. \quad (7)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи поперечных сечений.

I. Прямоугольное поперечное сечение (сечение с двумя осями симметрии).

Для прямоугольного поперечного сечения $b \times h$ нормальное σ_z и касательное τ_{zy} напряжения будут вычисляться по одним и тем же формулам как для нагрузки от собственного веса, так и для равномерно-распределённой нагрузки:

$$\sigma_z(y, z) = \frac{M_x(z)}{I_x} y = \frac{6\rho z(l-z)}{h^2} y; \quad (8)$$

$$\tau_{zy}(y, z) = \frac{Q_y(z) S_x^{omc}(y)}{I_x b_y} = \frac{6\rho \left(\frac{1}{2}l - z \right)}{h^2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right). \quad (9)$$

Эпюры нормальных $\sigma_z \left(y, \frac{1}{2}l \right)$ и касательных $\tau_{zy}(y, 0)$ напряжений в опасных поперечных сечениях балки прямоугольного поперечного сечения, построенные в соответствии с формулами (8) и (9), показаны на рис. 2.

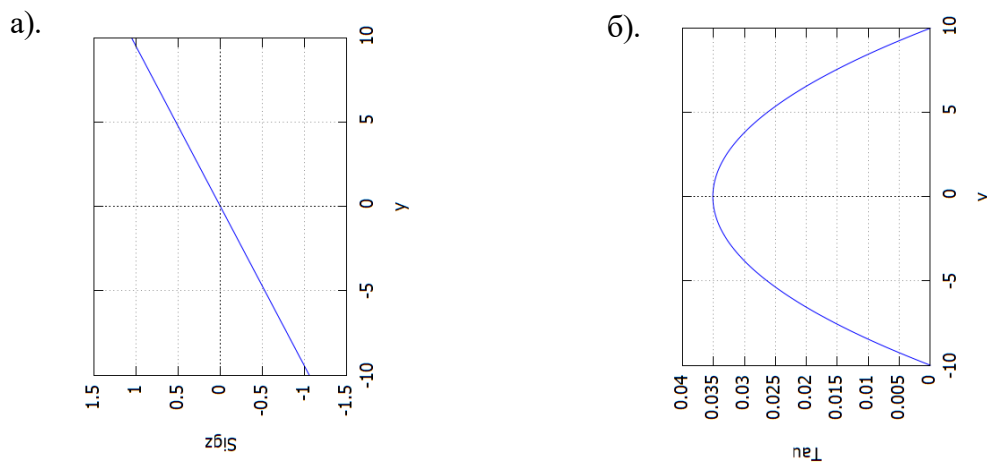


Рисунок 2 – Графики нормальных и касательных напряжений в прямоугольном поперечном сечении:

а) Эпюра напряжений $\sigma_z \left(y, \frac{1}{2}l \right)$;

б) Эпюра напряжений $\tau_{zy}(y, 0)$

Теперь, в соответствии с формулой (9), получаем:

$$\frac{d\tau_{zy}(y_1, z)}{dz} = \frac{6}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \rho A = \frac{6}{h^2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \rho.$$

Следовательно, формула (5) получает вид:

$$\begin{aligned}\sigma_y(y, z) &= \rho(h^{(-)} - y) - \frac{1}{b} \int_y^{h^{(-)}} \frac{6}{h^2} \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) \rho b dy_1 = \\ &= \rho(h^{(-)} - y) - \rho \frac{6}{h^2} \left\{ \frac{h^2}{4} (h^{(-)} - y) - \frac{1}{3} \left[(h^{(-)})^3 - y^3 \right] \right\}.\end{aligned}\quad (10)$$

Нормальное напряжение на горизонтальных площадках от *равномерно-распределённой* по верхней стороне балки нагрузки будет вычисляться по формуле:

$$\begin{aligned}\sigma_y(y, z) &= \rho \frac{A}{b_e} - \frac{1}{b} \int_{A^{omc}} \frac{d\tau_{zy}(y, z)}{dz} dA = \\ &= \rho h - \rho \frac{6}{h^2} \left\{ \frac{h^2}{4} (h^{(-)} - y) - \frac{1}{3} \left[(h^{(-)})^3 - y^3 \right] \right\}.\end{aligned}\quad (11)$$

На рис. 3 показано распределение нормальных напряжений σ_y на горизонтальных площадках в прямоугольном поперечном сечении балки ($b = 5$ см, $h = 20$ см) на двух опорах.

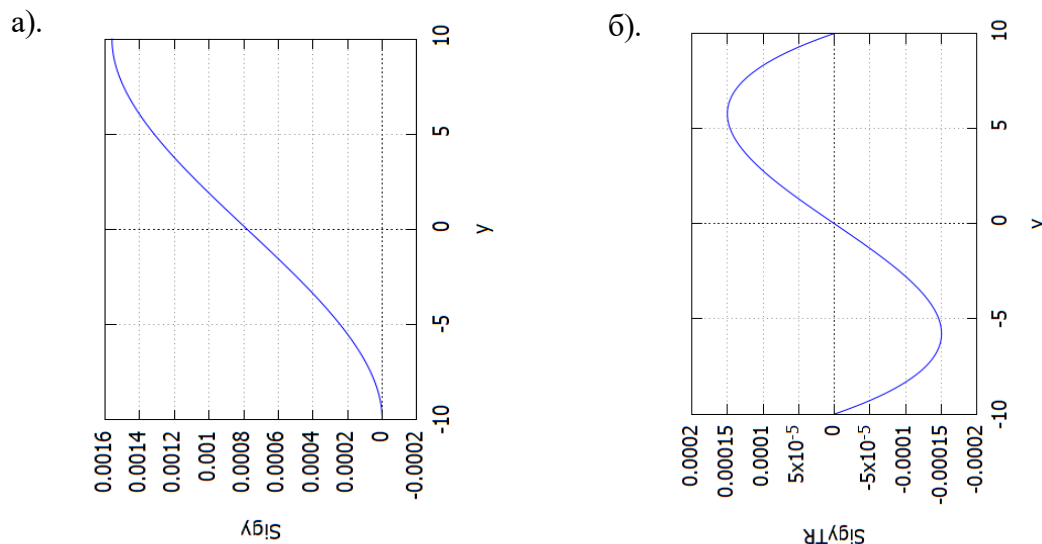


Рисунок 3 – Графики нормальных напряжений на горизонтальных площадках в прямоугольном поперечном сечении:

а) От равномерно-распределённой нагрузки;

б) От собственного веса

II. Трапецевидное поперечное сечение (сечение с одной осью симметрии) (рис. 4).

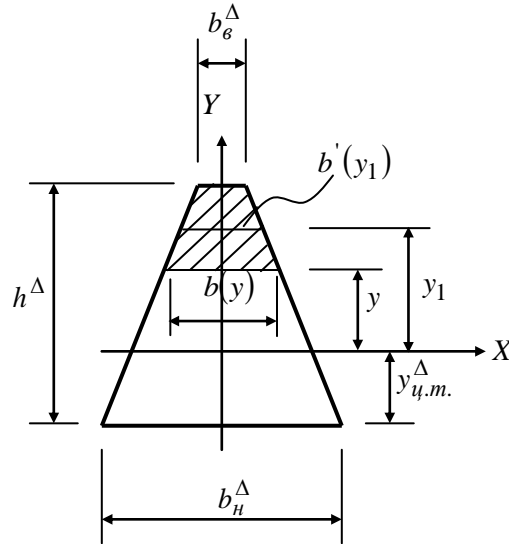


Рис. 4. Трапецевидное сечение.

Рисунок 4 – Трапецевидное сечение

Величины b_n^Δ , b_6^Δ , h^Δ – известны.

Для трапеции $y_{ц.м.}^\Delta = h^\Delta \frac{b_n^\Delta + 2b_6^\Delta}{3(b_n^\Delta + b_6^\Delta)}$.

Ширина сечения на уровне y :

$$b(y) = b_n^\Delta \frac{h^\Delta + \frac{b_6^\Delta h^\Delta}{b_n^\Delta - b_6^\Delta} - y_{ц.м.}^\Delta - y}{h^\Delta + \frac{b_6^\Delta h^\Delta}{b_n^\Delta - b_6^\Delta}} = a_3 (a_1 - y). \quad (12)$$

Здесь $a_1 = h^\Delta + \frac{b_6^\Delta h^\Delta}{b_n^\Delta - b_6^\Delta} - y_{ц.м.}^\Delta$; $a_2 = h^\Delta + \frac{b_6^\Delta h^\Delta}{b_n^\Delta - b_6^\Delta}$; $a_3 = \frac{b_n^\Delta}{a_2}$.

Статический момент отсечённой (заштрихованной) части сечения (рис. 4) относительно оси X равен:

$$S_x^{омс}(y) = \frac{1}{2} [b(y) + b_n^\Delta] (h^\Delta - y_{ц.м.}^\Delta - y) \left[y + (y_{ц.м.}^\Delta)^{омс}(y) \right], \quad (13)$$

$$\text{где } (y_{u.m.}^\Delta)^{omc}(y) = (h^\Delta - y_{u.m.}^\Delta - y) \frac{b(y) + 2b_\epsilon^\Delta}{3[b(y) + b_\epsilon^\Delta]}.$$

Статический момент отсечённой части выше уровня y_1 равен:

$$S_x^{omc}(y_1) = \frac{1}{2} [b'(y_1) + b_n^\Delta] (h^\Delta - y_{u.m.}^\Delta - y_1) \left[y_1 + (y_{u.m.}^\Delta)^{omc}(y_1) \right], \quad (14)$$

$$\text{где } (y_{u.m.}^\Delta)^{omc}(y_1) = (h^\Delta - y_{u.m.}^\Delta - y_1) \frac{b'(y_1) + 2b_\epsilon^\Delta}{3[b'(y_1) + b_\epsilon^\Delta]}.$$

Момент инерции сечения относительно оси X равен:

$$I_x = \frac{(h^\Delta)^3 \left[(b_n^\Delta)^2 + 4b_n^\Delta b_\epsilon^\Delta + (b_\epsilon^\Delta)^2 \right]}{36(b_n^\Delta + b_\epsilon^\Delta)}. \quad (15)$$

Для трапециевидного поперечного сечения нормальное σ_z и касательное τ_{zy} напряжения будут вычисляться по формулам (3) и (4) с учётом соотношений (2), (12), (13) и (15).

Эпюры нормальных $\sigma_z \left(y, \frac{1}{2}l \right)$ и касательных $\tau_{zy}(y, 0)$ напряжений в опасных поперечных сечениях балки трапециевидного поперечного сечения балки вершиной вверх ($b_n = 5$ см, $b_\epsilon = 1$ см, $h = 20$ см) на двух опорах, показаны на рис. 5.

Эпюры нормальных $\sigma_z \left(y, \frac{1}{2}l \right)$ и касательных $\tau_{zy}(y, 0)$ напряжений в опасных поперечных сечениях балки трапециевидного поперечного сечения балки вершиной вниз ($b_n = 1$ см, $b_\epsilon = 5$ см, $h = 20$ см) на двух опорах, показаны на рис. 6.

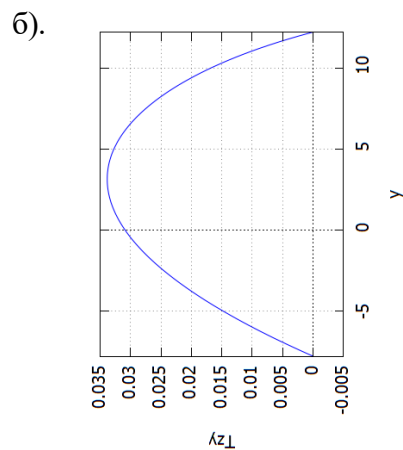
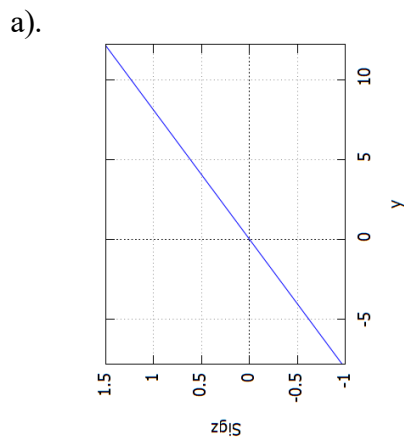


Рисунок 5 – Графики нормальных и касательных напряжений в трапециевидном поперечном сечении балки ($b_n = 5$ см, $b_g = 1$ см, $h = 20$ см) вершиной вверх (графики перевернуть):

а) Эпюра напряжений $\sigma_z\left(y, \frac{1}{2}l\right)$; б) Эпюра напряжений $\tau_{zy}(y, 0)$

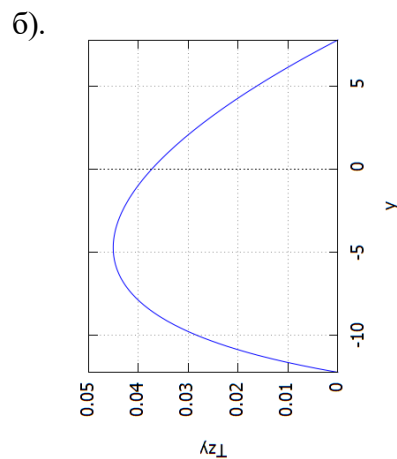
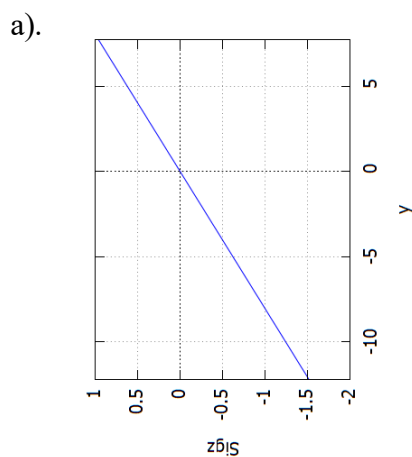


Рисунок 6 – Графики нормальных и касательных напряжений в трапециевидном поперечном сечении балки ($b_n = 1$ см, $b_g = 5$ см, $h = 20$ см)

вершиной вниз (графики перевернуть): а) Эпюра напряжений $\sigma_z\left(y, \frac{1}{2}l\right)$;

б) Эпюра напряжений $\tau_{zy}(y, 0)$

Касательное напряжение на уровне y_1 (рис. 4) вычисляем по формуле (4):

$$\tau_{zy}(y_1, z) = \frac{Q_y(z) S_x^{omc}(y_1)}{I_x b'(y_1)}. \quad (16)$$

Производная от касательного напряжения с учётом (2₂) получает вид:

$$\frac{d\tau_{zy}(y_1, z)}{dz} = \frac{S_x^{omc}(y_1)}{I_x b'(y_1)} \cdot \frac{dQ_y(z)}{dz} = \rho A \frac{S_x^{omc}(y_1)}{I_x b'(y_1)} = \rho \frac{1}{2} (b_h^\Delta + b_e^\Delta) h^\Delta \frac{S_x^{omc}(y_1)}{I_x b'(y_1)}.$$

Следовательно, нормальное напряжение на горизонтальной площадке на уровне y будет определяться соотношением:

$$\begin{aligned} \sigma_y(y, x) = & \rho (h^{(-)} - y) - \frac{1}{b_y} \int_{A^{omc}} \frac{d\tau_{zy}(y_1, z)}{dz} dA = \rho (h^{(-)} - y) - \\ & - \frac{\rho}{2 I_x b(y)} (b_h^\Delta + b_e^\Delta) h^\Delta \left[\frac{1}{2} \int_y^{h^\Delta - y_{u.m.}^\Delta} (a_4 - a_3 y_1)(a_5 - y_1) y_1 dy_1 + \right. \\ & \left. + \frac{1}{6} \int_y^{h^\Delta - y_{u.m.}^\Delta} (a_5 - y_1)^2 (a_6 - a_3 y_1) dy_1 \right]. \quad (17) \end{aligned}$$

Здесь $h^{(-)} = h^\Delta - y_{u.m.}^\Delta$; $a_4 = a_3 a_1 + b_e^\Delta$;

$$a_5 = h^\Delta - y_{u.m.}^\Delta; \quad a_6 = a_3 a_1 + 2b_{u.m.}^\Delta.$$

Нормальное напряжение на горизонтальных площадках от *равномерно-распределённой нагрузки*, равной весу балки и приложенной по верхней стороне балки, будет определяться по формуле:

$$\begin{aligned} \sigma_y(y, z) = & \frac{q}{b(y)} - \frac{1}{b(y)} \int_{A^{omc}} \frac{d\tau_{zy}(y_1, z)}{dz} dA = \\ = & \frac{1}{b(y)} \rho \frac{1}{2} (b_h^\Delta + b_e^\Delta) h^\Delta \frac{1}{b_e} - \frac{1}{b(y)} \int_{A^{omc}} \frac{d\tau_{zy}(y_1, z)}{dz} dA = \\ = & \frac{\rho}{2b(y)} (b_h^\Delta + b_e^\Delta) h^\Delta \left\{ \frac{1}{b_e} - \frac{1}{I_x} \left[\frac{1}{2} \int_y^{h^\Delta - y_{u.m.}^\Delta} (a_4 - a_3 y_1)(a_5 - y_1) y_1 dy_1 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{6} \int_y^{h^\Delta - y_{u.m.}^\Delta} (a_5 - y_1)^2 (a_6 - a_3 y_1) dy_1 \right] \right\}. \quad (18) \end{aligned}$$

На рис. 7 показано распределение нормальных напряжений на горизонтальных площадках в трапецевидном поперечном сечении балки вершиной вверх ($b_n = 5$ см, $b_e = 1$ см, $h = 20$ см) на двух опорах.

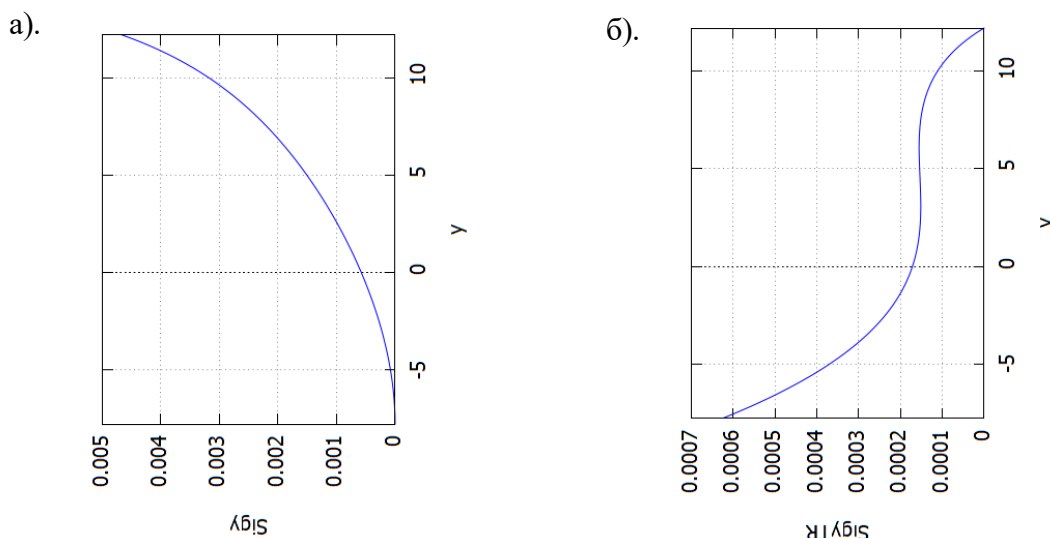


Рисунок 7 – Графики нормальных напряжений на горизонтальных площадках в трапецевидном поперечном сечении ($b_n = 5$ см, $b_e = 1$ см, $h = 20$ см) вершиной вверх:

- а) От равномерно-распределённой нагрузки;
- б) От собственного веса

На рис. 8 показано распределение нормальных напряжений на горизонтальных площадках в трапецевидном поперечном сечении балки вершиной вверх ($b_n = 5$ см, $b_e = 4$ см, $h = 20$ см) на двух опорах.

На рис. 9 показано распределение нормальных напряжений на горизонтальных площадках в трапецевидном поперечном сечении балки вершиной вниз ($b_n = 1$ см, $b_e = 5$ см, $h = 20$ см) на двух опорах.

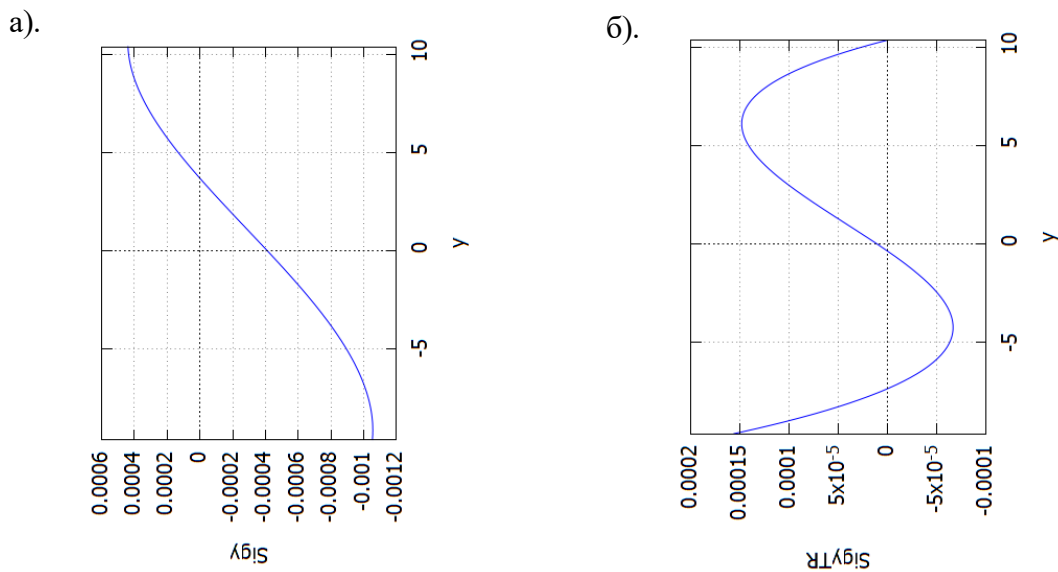


Рисунок 8 – Графики нормальных напряжений на горизонтальных площадках в трапецевидном поперечном сечении ($b_n = 5$ см, $b_e = 4$ см, $h = 20$ см) вершиной вверх: а) От равномерно-распределённой нагрузки; б) От собственного веса

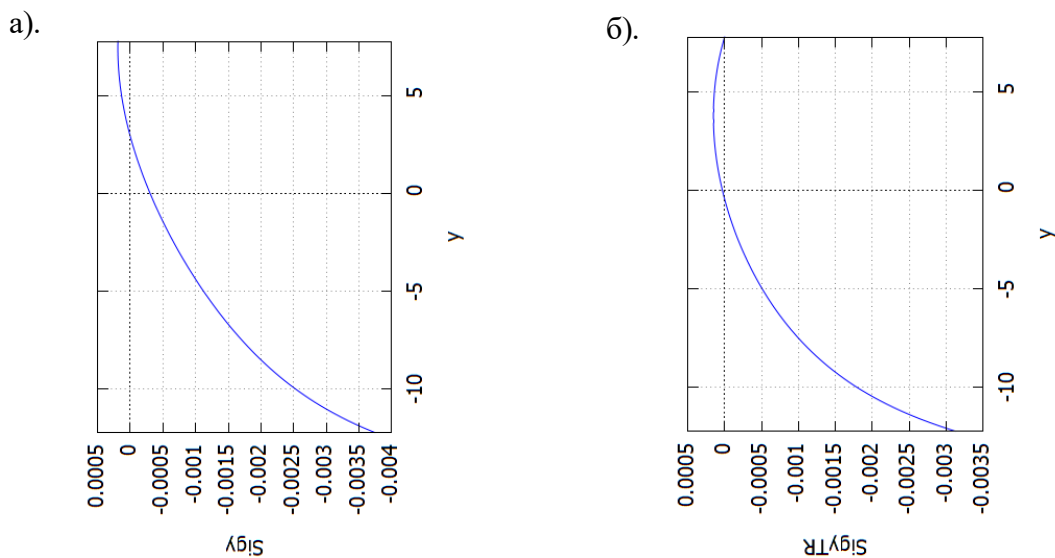


Рис. 9. Графики нормальных напряжений на горизонтальных площадках в трапецевидном поперечном сечении ($b_n = 1$ см, $b_e = 5$ см, $h = 20$ см) вершиной вниз: а) От равномерно-распределённой нагрузки; б) От собственного веса.

На рис. 10 показано распределение нормальных напряжений на горизонтальных площадках в трапециевидном поперечном сечении балки вершиной вниз ($b_n = 4$ см, $b_g = 5$ см, $h = 20$ см) на двух опорах.

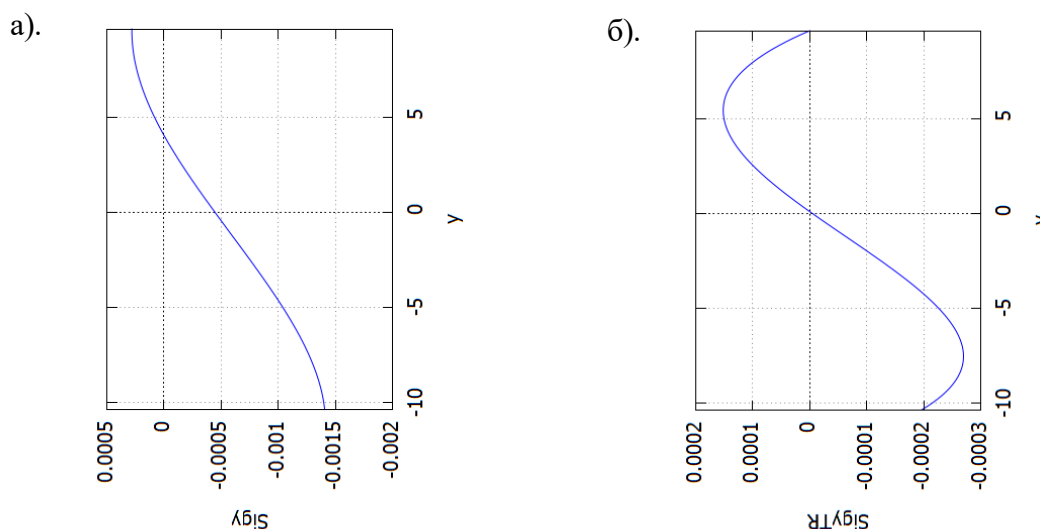


Рис. 10. Графики нормальных напряжений на горизонтальных площадках в трапециевидном поперечном сечении ($b_n = 4$ см, $b_g = 5$ см, $h = 20$ см) вершиной вниз: а) От равномерно-распределённой нагрузки; б) От собственного веса

Выводы

1. В определении нормальных σ_z и касательных τ_{zy} напряжений от собственного веса особенностей нет.
2. Нормальное напряжение на горизонтальных площадках σ_y от собственного веса изменяется по высоте сечения по закону кубической параболы.
3. В сечениях с двумя осями симметрии (прямоугольное сечение) нормальное напряжение на горизонтальных площадках σ_y от собственного веса равно нулю как на нейтральной линии, так и в фибровых волокнах. В сжатой части поперечного сечения нормальное

напряжение на горизонтальных площадках положительно, а растянутой части – отрицательно.

4. В сечении с одной осью симметрии (трапециевидное сечение) нормальное напряжение на горизонтальных площадках равно нулю лишь в верхних фибровых волокнах и на нейтральной линии. В сжатой части поперечного сечения нормальное напряжение на горизонтальных площадках положительно, а растянутой части – отрицательно.
5. Чем больше отличается рассматриваемое сечение от прямоугольного, тем больше искажается эпюра нормальных напряжений на горизонтальных площадках по сравнению с эпюрой для прямоугольного сечения.
6. Наибольшая величина нормального напряжения на горизонтальных площадках σ_y примерно на порядок меньше величины нормальных σ_z и касательных τ_{zy} напряжений. Таким образом, при оценке прочности изгибаемых стержней нормальным напряжением на горизонтальных площадках можно пренебречь.

Библиографический список:

1. Александров А.В. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.П. Державин; Под ред. А.В. Александрова. – 6-е изд., стер. – М.: Высш. Шк., 2008. 560 с.: ил.