

УДК 539.374.1

К ВОПРОСУ ОБ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОМ ИЗГИБЕ ПРИ БИЛИНЕЙНОЙ ДИАГРАММЕ РАСТЯЖЕНИЯ

Бакушев Сергей Васильевич,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Раткин Роман Александрович,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

студент.

Аннотация

Рассматривается упругопластический изгиб балки, материал которой подчиняется билинейной диаграмме растяжения (диаграмма Прандтля с упрочнением). Поперечное сечение может иметь одну или две оси симметрии. Записывается условие предельного состояния балки. Определяются внутренние усилия – продольные силы и изгибающие моменты в упругой и упругопластической областях балки, нормальные напряжения в упругой и пластической зонах поперечного сечения, кривизна изогнутой оси, границы зон упругого и пластического деформирования. Рассмотрен пример построения границ зон упругого и пластического деформирования для стержня с прямоугольным поперечным сечением и нагруженного сосредоточенной силой; определена его несущая способность по временному сопротивлению.

Ключевые слова: стержень, упругопластический изгиб, билинейная диаграмма растяжения.

ON THE QUESTION OF ELASTOPLASTIC BENDING IN A BILINEAR TENSILE DIAGRAM

Bakushev Sergey Vasilevich,

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,
Doctor of Sciences, Professor of the department "Mechanics".*

Ratkin Roman Aleksandrovich,

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,
student.*

Abstract

The elastoplastic bending of a beam whose material obeys a bilinear tensile diagram (Prandtl diagram with hardening) is considered. A cross-section can have one or two axes of symmetry. The limit state condition of the beam is recorded. Internal forces are determined: longitudinal forces and bending moments in the elastic and elastoplastic regions of the beam, normal stresses in the elastic and plastic zones of the cross-section, curvature of the curved axis, boundaries of the elastic and plastic deformation zones. An example of constructing the boundaries of elastic and plastic deformation zones for a member with a rectangular cross-section and loaded with a concentrated force is considered; Its load-bearing capacity by time resistance is determined.

Keywords: rod, elastoplastic bending, biline stretch diagram.

Введение

Основные положения расчёта на изгиб упругопластического стержня с двумя осями симметрии достаточно подробно описаны в специальной литературе, например [1], [2], [3], [4], [5]. Решение практических задач расчёта балок при упругопластическом изгибе изложены в статьях [6], [7], [8], [9], [10], [11]. Моделирование и расчёт стержня со ступенчатым поперечным сечением при упругопластическом изгибе в соответствии с диаграммой Прандтля приводятся в работах [12], [13], [14], [15].

Плоский поперечный изгиб

Рассмотрим плоский поперечный изгиб стержня, поперечное сечение которого, постоянное по его длине, имеет одну или две оси симметрии. Материал стержня подчиняется билинейной диаграмме растяжения (сжатия) (рис. 1). При этом предполагается, что диаграмма растяжения симметрична диаграмме сжатия относительно начала координат (точка 0). Разгрузка осуществляется по упругому закону, то есть $E = E_{разгр}$. Предельное

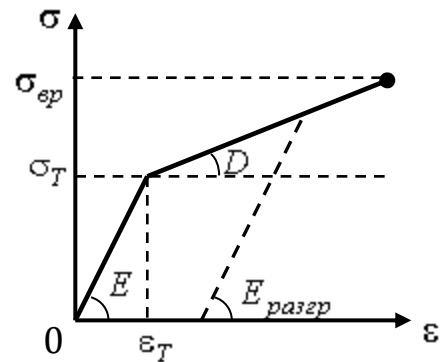


Рисунок 1 – Билинейная диаграмма растяжения (сжатия)

состояние стержня достигается, когда максимальное нормальное напряжение в фибровых волокнах стержня σ_z^{\max} становится равным пределу прочности $\sigma_{вр}$.

Прочность стержня оценивается по двум критериям.

1. По условию прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_z^{\max}(y_{\sigma}^{\max}, z_{\sigma}^{on}) \leq R_t \gamma_c. \quad (1)$$

2. По условию прочности по касательным напряжениям:

$$\tau_{zy}^{\max}(y_{\tau}^{\max}, z_{\tau}^{on}) \leq R_s \gamma_c. \quad (2)$$

В формулах (1) и (2) обозначено:

y_{σ}^{\max} – координата, соответствующая максимальному нормальному напряжению в опасном сечении;

y_{τ}^{\max} – координата, соответствующая максимальному касательному напряжению в опасном сечении;

z_{σ}^{on} – координата опасного сечения по нормальным напряжениям;

z_{τ}^{on} – координата опасного сечения по касательным напряжениям;

R_t – расчётное сопротивление материала при растяжении-сжатии (определяется по временному сопротивлению материала стержня);

R_s – расчётное сопротивление материала при сдвиге.

На упругом участке деформирования, когда $\sigma \leq \sigma_T$, зависимость между напряжениями и деформациями описывается законом Гука:

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (1)$$

На пластическом участке деформирования, когда $\sigma > \sigma_T$, зависимость между напряжениями и деформациями описывается, как это легко показать, линейной зависимостью:

$$\sigma = D\varepsilon + \left(1 - \frac{D}{E}\right)\sigma_T. \quad (2)$$

Возможное распределение нормальных напряжений по длине балки, показано на рис. 2. Напряжения в пластической области по высоте сечения изменяются (увеличиваются) от значения σ_T на границе упругой и пластической областей до величины временного сопротивления σ_{BP} в фибровых волокнах балки.

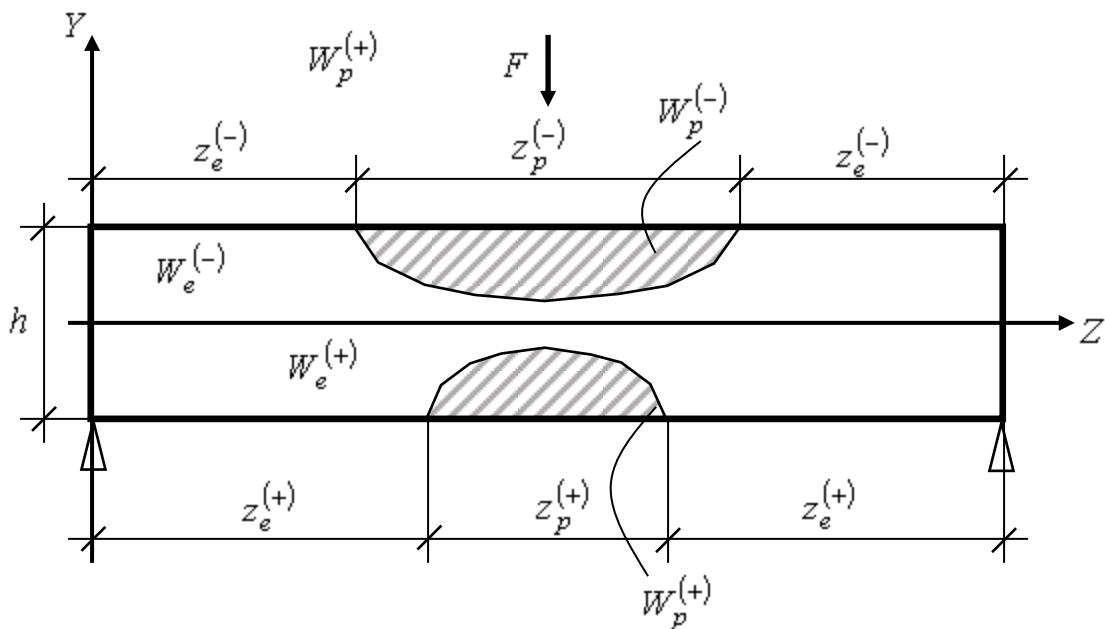


Рисунок 2 – Распределение нормальных напряжений по длине балки

Здесь рассматривается случай, когда длина интервала $z_p^{(-)}$ больше длины интервала $z_p^{(+)}$.

В балке выделяется 2-е области в поперечном сечении в зоне упругих деформаций (на интервале $z_e^{(-)}$): область упругой деформации растяжения $W_e^{(+)}$ (область ниже нейтральной линии Z), и область упругой деформации сжатия $W_e^{(-)}$ (область выше нейтральной линии Z). Здесь нормальное напряжение в поперечных сечениях определяется по формуле (1).

В зоне упругопластических деформаций (на интервале $z_e^{(+)} - z_e^{(-)}$) в поперечном сечении выделяется три области: область упругой деформации растяжения $W_e^{(+)}$ (область ниже нейтральной линии Z), область упругой деформации сжатия $W_e^{(-)}$ (область выше нейтральной линии Z), и область пластических деформаций $W_p^{(-)}$. В области пластических деформаций нормальное напряжение в поперечных сечениях определяется по формуле (2).

В зоне пластических деформаций (на интервале $z_p^{(+)}$) в поперечном сечении выделяется 4-е области: область упругой деформации растяжения $W_e^{(+)}$ (область ниже нейтральной линии Z), где напряжения определяются по формуле (1); область упругой деформации сжатия $W_e^{(-)}$ (область выше нейтральной линии Z), где напряжения также определяются по формуле (1); область пластического деформирования растяжения $W_p^{(+)}$, где напряжения определяются по формуле (2); область пластического деформирования сжатия $W_p^{(-)}$, где напряжения также определяются по формуле (2).

На границе между областями упругого и упругопластического деформирования нормальное напряжение в продольных волокнах равно пределу текучести σ_T .

На рис. 2 ось Z (нейтральная линия) показана прямолинейной, что характерно для поперечных сечений, симметричных относительно и горизонтальной и вертикальной осей симметрии. Если сечение несимметрично

относительно горизонтальной оси, то нейтральная линия в зоне упругопластических деформаций является, вообще говоря, криволинейной и не проходит через центры тяжести поперечных сечений.

На рис. 3 показано поперечное сечение балки в области пластического деформирования.

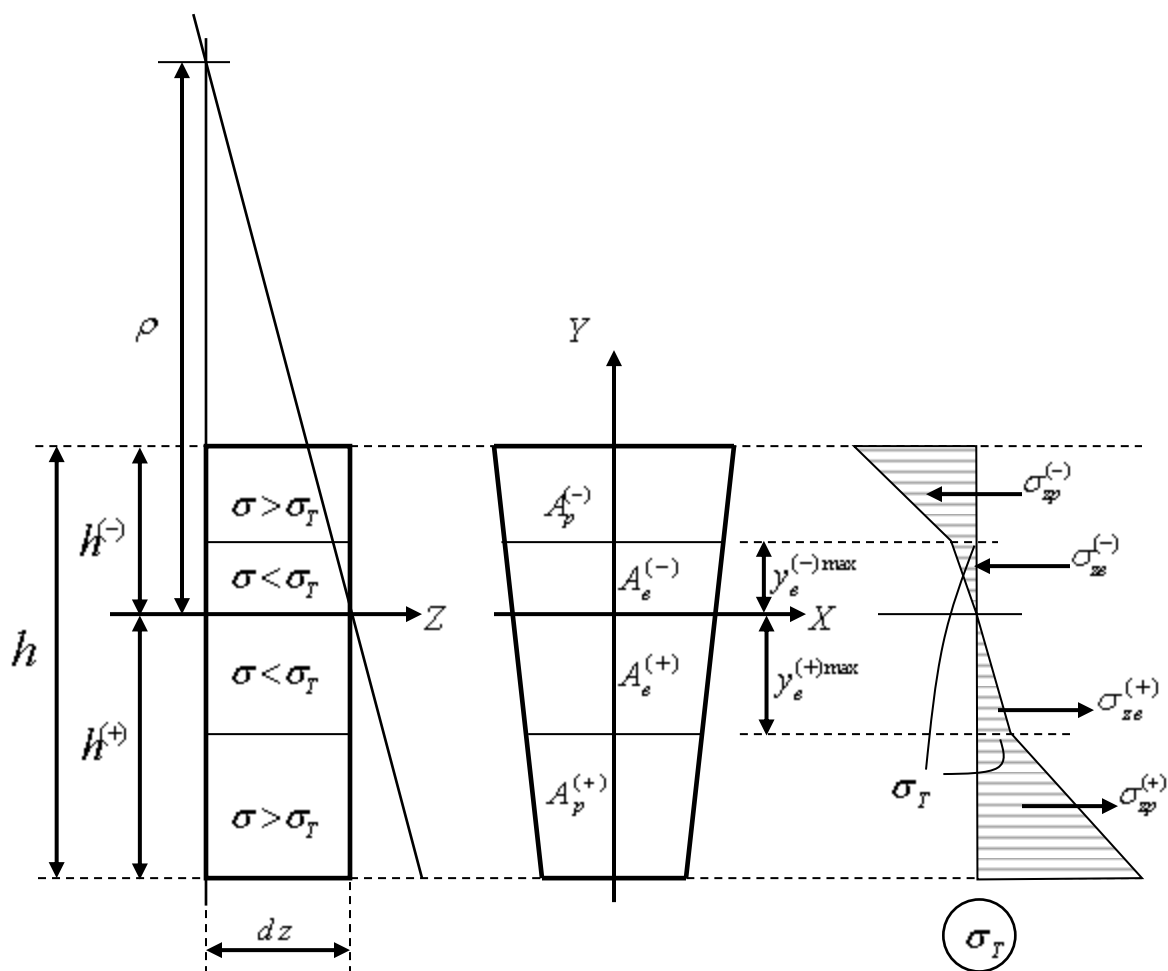


Рисунок 3 – Поперечное сечение балки в области пластического деформирования

Здесь имеют место быть четыре зоны: зона пластической деформации растяжения с площадью $A_p^{(+)}$; зона упругой деформации растяжения с площадью $A_e^{(+)}$; зона упругой деформации сжатия с площадью $A_e^{(-)}$; зона пластической деформации сжатия с площадью $A_p^{(-)}$. Нормальное напряжение в

продольных волокнах балки на расстоянии $y_e^{(+)\max}$ и $y_e^{(-)\max}$ от нейтральной линии равно пределу текучести σ_T .

Вполне понятно, что величины

$$h^{(+)}, h^{(-)}, y_e^{(+)\max}, y_e^{(-)\max}, A_p^{(+)}, A_e^{(+)}, A_e^{(-)}, A_p^{(-)}$$

являются функциями координаты z .

Оставаясь в рамках гипотезы плоских сечений, определяем относительные линейные деформации продольных волокон изгибаемого стержня как в упругой, упругопластической, так и в пластической зонах поперечного сечения по формуле:

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}. \quad (3)$$

Здесь y – расстояние от нейтрального слоя деформированного стержня до рассматриваемого волокна; ρ – радиус кривизны нейтрального слоя изгибаемого стержня.

Нормальное напряжение в продольных волокнах в упругой зоне поперечного сечения (область W_e на рис. 2) определяем в соответствии с законом Гука (1):

$$\sigma_{ze} = E\varepsilon = \frac{E}{\rho} y_e. \quad (4)$$

Нормальное напряжение в продольных волокнах в пластической зоне поперечного сечения (области $W_p^{(+)}$ и $W_p^{(-)}$ на рис. 2) определяется по формуле (2):

$$\sigma_{zp} = \left[\frac{D}{\rho} y_p + \left(1 - \frac{D}{E} \right) \sigma_T \right]. \quad (5)$$

Внутренние усилия

Найдём внутренние усилия в упруго пластически изгибаемом стержне (рис. 2).

Для продольной силы N в области упругого деформирования, когда координата z изменяется в пределах интервала $z_e^{(-)}$, получим:

$$N = \int_{A_e^{(+)}} \sigma_{ze}^{(+)} da - \int_{A_e^{(-)}} \sigma_{ze}^{(-)} da = 0. \quad (6)$$

С учётом зависимостей (4) и (5), формула (6) приводится к виду:

$$\frac{E}{\rho} (S_{xee}^{(+)} - S_{xee}^{(-)}) = 0. \quad (7)$$

При этом величина внутреннего изгибающего момента M_x будет определяться соотношением:

$$M_x = \int_{A_e^{(+)}} \sigma_{ze}^{(+)} y_e^{(+)} da + \int_{A_e^{(-)}} \sigma_{ze}^{(-)} y_e^{(-)} da. \quad (8)$$

Или

$$M_x(z) = \frac{E}{\rho} (I_{xee}^{(+)} - I_{xee}^{(-)}). \quad (9)$$

Для продольной силы N в области упругопластического деформирования, когда координата z изменяется в пределах интервала $z_e^{(+)} - z_e^{(-)}$, получим:

$$N = \int_{A_e^{(+)}} \sigma_{ze}^{(+)} da - \int_{A_e^{(-)}} \sigma_{ze}^{(-)} da - \int_{A_p^{(-)}} \sigma_{zp}^{(-)} da = 0. \quad (10)$$

Или

$$\frac{E}{\rho} [S_{xe}^{(+)}(z) - S_{xe}^{(-)}(z)] - \frac{D}{\rho} S_{xp}^{(-)}(z) - (1 - \frac{D}{E}) A_p^{(-)}(z) \sigma_T = 0. \quad (11)$$

Внутренний изгибающий момент при этом будет равен:

$$M_x = \int_{A_e^{(+)}} \sigma_{ze}^{(+)} y_e^{(+)} da + \int_{A_e^{(-)}} \sigma_{ze}^{(-)} y_e^{(-)} da + \int_{A_p^{(-)}} \sigma_{zp}^{(-)} y_p^{(-)} da. \quad (12)$$

Или

$$M_x(z) = \frac{D}{\rho} I_{xp}^{(-)}(z) + \frac{E}{\rho} [I_{xe}^{(+)}(z) + I_{xe}^{(-)}(z)] + (1 - \frac{D}{E}) S_{xp}^{(-)}(z) \sigma_T. \quad (13)$$

Для продольной силы N в области упругопластического деформирования, когда координата z изменяется в пределах интервала $z_p^{(+)}$, получим:

$$N = \int_{A_p^{(+)}} \sigma_{zp}^{(+)} da + \int_{A_e^{(+)}} \sigma_{ze}^{(+)} da + \int_{A_e^{(-)}} \sigma_{ze}^{(-)} da - \int_{A_p^{(-)}} \sigma_{zp}^{(-)} da = 0. \quad (14)$$

С учётом зависимостей (4) и (5), формула (14) приводится к виду:

$$\frac{D}{\rho} [S_{xp}^{(+)}(z) - S_{xp}^{(-)}(z)] + \frac{E}{\rho} [S_{xe}^{(+)}(z) - S_{xe}^{(-)}(z)] + (1 - \frac{D}{E}) [A_p^{(+)}(z) - A_p^{(-)}(z)] \sigma_T = 0. \quad (15)$$

При этом изгибающий момент будет определяться зависимостью:

$$M_x = \int_{A_p^{(+)}} \sigma_{zp}^{(+)} y_p^{(+)} da + \int_{A_e^{(+)}} \sigma_{ze}^{(+)} y_e^{(+)} da + \int_{A_p^{(-)}} \sigma_{zp}^{(-)} y_p^{(-)} da + \int_{A_e^{(-)}} \sigma_{ze}^{(-)} y_e^{(-)} da. \quad (16)$$

Или

$$M_x(z) = \frac{D}{\rho} [I_{xp}^{(+)}(z) + I_{xp}^{(-)}(z)] + \frac{E}{\rho} [I_{xe}^{(+)}(z) + I_{xe}^{(-)}(z)] + (1 - \frac{D}{E}) [S_{xp}^{(+)}(z) + S_{xp}^{(-)}(z)] \sigma_T. \quad (17)$$

В формулах (6)-(17) обозначено:

$S_{xp}^{(+)}(z)$ – статический момент, относительно нейтральной оси, растянутой части площади поперечного сечения упругопластической области стержня, находящейся в условиях пластического деформирования;

$S_{xp}^{(-)}(z)$ – статический момент, относительно нейтральной оси, сжатой части площади поперечного сечения упругопластической области стержня, находящейся в условиях пластического деформирования;

$S_{xe}^{(+)}(z)$ – статический момент, относительно нейтральной оси, растянутой части площади поперечного сечения упругопластической области стержня, находящейся в условиях упругого деформирования;

$S_{xe}^{(-)}(z)$ – статический момент, относительно нейтральной оси, сжатой части площади поперечного сечения упругопластической области стержня, находящейся в условиях упругого деформирования;

$A_p^{(+)}(z)$ – площадь растянутой части поперечного сечения упругопластической области стержня, находящейся в условиях пластического деформирования;

$A_p^{(-)}(z)$ – площадь сжатой части поперечного сечения упругопластической области стержня, находящейся в условиях пластического деформирования;

$I_{xp}^{(+)}(z)$ – осевой момент инерции, относительно нейтральной оси, растянутой части площади поперечного сечения упругопластической области стержня, находящейся в условиях пластического деформирования;

$I_{xp}^{(-)}(z)$ – осевой момент инерции, относительно нейтральной оси, сжатой части площади поперечного сечения упругопластической области стержня, находящейся в условиях пластического деформирования;

$I_{xe}^{(+)}(z)$ – осевой момент инерции, относительно нейтральной оси, растянутой части площади поперечного сечения упругопластической области стержня, находящейся в условиях упругого деформирования;

$I_{xe}^{(-)}(z)$ – осевой момент инерции, относительно нейтральной оси, сжатой части площади поперечного сечения упругопластической области стержня, находящейся в условиях упругого деформирования;

$S_{xee}^{(+)}(z)$ – статический момент, относительно нейтральной оси, растянутой части площади поперечного сечения упругой области стержня, находящейся в условиях упругого деформирования;

$S_{xee}^{(-)}(z)$ – статический момент, относительно нейтральной оси, сжатой части площади поперечного сечения упругой области стержня, находящейся в условиях упругого деформирования;

$I_{xp}^{(+)}(z)$ – осевой момент инерции, относительно нейтральной оси, растянутой части площади поперечного сечения упругой области стержня, находящейся в условиях упругого деформирования;

$I_{xp}^{(-)}(z)$ – осевой момент инерции, относительно нейтральной оси, сжатой части площади поперечного сечения упругой области стержня, находящейся в условиях упругого деформирования.

Нормальные напряжения в продольных волокнах

Исключая кривизну из соотношений (4) и (9), найдём зависимость между изгибающим моментом $M_x(z)$ и нормальным напряжением в упругой части поперечного сечения стержня σ_{ze} , когда координата z изменяется в пределах интервала $z_e^{(-)}$:

$$\sigma_{ze}(y_e, z) = \frac{M_x(z)}{I_{xee}^{(+)} + I_{xee}^{(-)}} y_e. \quad (18)$$

$$\text{Здесь } -\frac{h}{2} \leq y_e \leq +\frac{h}{2}.$$

Исключая кривизну из соотношений (4) и (13), найдём зависимость между изгибающим моментом $M_x(z)$ и нормальным напряжением в упругой части поперечного сечения стержня σ_{ze} , когда координата z изменяется в пределах интервала $z_e^{(+)} - z_e^{(-)}$:

$$\sigma_{ze}(y_e, z) = \frac{M_x(z) - (1 - \frac{D}{E}) S_{xp}^{(-)}(z) \sigma_T}{D * I_{xp}^{(-)}(z) + E [I_{xe}^{(+)}(z) + I_{xe}^{(-)}(z)]} E y_e. \quad (19)$$

$$\text{Здесь } -h^{(+)} \leq y_e \leq y_e^{(-)\max}.$$

Исключая кривизну из соотношений (5) и (13), найдём зависимость между изгибающим моментом $M_x(z)$ и нормальным напряжением в

пластической части поперечного сечения стержня σ_{zp} , когда координата z изменяется в пределах интервала $z_e^{(+)} - z_e^{(-)}$:

$$\sigma_{zp}(y_p, z) = \left(1 - \frac{D}{E}\right)\sigma_T + \frac{M_x(z) - \left(1 - \frac{D}{E}\right)S_{xp}^{(-)}(z) \cdot \sigma_T}{D \cdot I_{xp}^{(-)} + E \left[I_{xe}^{(+)}(z) + I_{xe}^{(-)}(z) \right]} D y_p. \quad (20)$$

Здесь $y_e^{(-)\max} \leq y_p \leq +h^{(-)}$.

Исключая кривизну из соотношений (4) и (17), найдём зависимость между изгибающим моментом $M_x(z)$ и нормальным напряжением в упругой части поперечного сечения стержня σ_{ze} , когда координата z изменяется в пределах интервала $z_p^{(+)}$:

$$\sigma_{ze}(y_e, z) = \frac{M_x(z) - \left(1 - \frac{D}{E}\right) \left[S_{xp}^{(+)}(z) + S_{xp}^{(-)}(z) \right] \sigma_T}{D \left[I_{xp}^{(+)}(z) + I_{xp}^{(-)}(z) \right] + E \left[I_{xe}^{(+)}(z) + I_{xe}^{(-)}(z) \right]} E y_e. \quad (21)$$

Здесь $y_e^{(+)\max} \leq y_e \leq y_e^{(-)\max}$.

Исключая кривизну из соотношений (5) и (17), найдём зависимость между изгибающим моментом $M_x(z)$ и нормальным напряжением в пластической части поперечного сечения стержня σ_{zp} , когда координата z изменяется в пределах интервала $z_p^{(+)}$:

$$\sigma_{zp}(y_p, z) = \left(1 - \frac{D}{E}\right)\sigma_T + \frac{M_x(z) - \left(1 - \frac{D}{E}\right) \left[S_{xp}^{(+)}(z) + S_{xp}^{(-)}(z) \right] \sigma_T}{D \left[I_{xp}^{(+)}(z) + I_{xp}^{(-)}(z) \right] + E \left[I_{xe}^{(+)}(z) + I_{xe}^{(-)}(z) \right]} D y_p \cdot \sigma. \quad (22)$$

Здесь $-h^{(+)} \leq y_p \leq y_e^{(+)\max}$ и $y_e^{(-)\max} \leq y_p \leq +h^{(-)}$.

Так как нормальное напряжение в продольных волокнах балки на расстоянии $y_e^{(+)\max}$ и $y_e^{(-)\max}$ от нейтральной линии равно пределу текучести σ_T , то на основании формулы (25) либо (26) получаем:

$$y_e^{(+)\max} = y_e^{(-)\max}. \quad (23)$$

Кривизна нейтральной линии

На интервале $z_e^{(-)}$ кривизну нейтральной линии найдём, сопоставив формулы (4) и (18):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x(z)}{E(I_{xee}^{(+)} + I_{xee}^{(-)})}. \quad (24)$$

На интервале $z_e^{(+)} - z_e^{(-)}$ кривизну нейтральной линии найдём, сопоставив формулы (4) и (19):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x(z) - (1 - \frac{D}{E})S_{xp}^{(-)}(z) \cdot \sigma_T}{D \cdot I_{xp}^{(-)}(z) + E[I_{xe}^{(+)}(z) + I_{xe}^{(-)}(z)]}. \quad (25)$$

На интервале $z_p^{(+)}$, кривизну нейтральной линии найдём, сопоставив формулы (4) и (21):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x(z) - (1 - \frac{D}{E})[S_{xp}^{(+)}(z) + S_{xp}^{(-)}(z)] \sigma_T}{D[I_{xp}^{(+)}(z) + I_{xp}^{(-)}(z)] + E[I_{xe}^{(+)}(z) + I_{xe}^{(-)}(z)]}. \quad (26)$$

Граница зон упругого и пластического деформирования

Границу зон упругого и пластического деформирования найдём из условия, что нормальное напряжение на границе зон упругого и пластического деформирования равно пределу текучести σ_T .

Для определения положения нейтральной линии и геометрических размеров зон упругого и пластического деформирования: $h^{(+)}(z)$; $y_e^{(+)\max}(z)$; $y_e^{(-)\max}(z)$; $h^{(-)}(z)$ имеем систему двух нелинейных уравнений:

– в области упругого деформирования, когда координата z изменяется в пределах интервала $z_e^{(-)}$, достаточно одного уравнения (7);

– в области упругопластического деформирования, когда координата z изменяется в пределах интервала $z_e^{(+)} - z_e^{(-)}$, это будут уравнения (11) и (13);

– в области упругопластического деформирования, когда координата z изменяется в пределах интервала $z_p^{(+)}$, это будут уравнения (15) и (17);

Положение нейтральной линии в зоне упругопластического деформирования будет однозначно определяться величинами $h^{(+)}(z)$; $y_e^{(+)\max}(z)$ либо $h^{(-)}(z)$; $y_e^{(-)\max}(z)$.

При выполнении расчётов следует иметь в виде, что

$$h = h^{(+)} + h^{(-)}. \quad (27)$$

Пример

Рассмотрим прямоугольное поперечное сечение изгибаемого стержня шириной b и высотой h , находящееся в условиях упругопластического деформирования. Длина стержня на двух опорах – l . Стержень нагружен сосредоточенной силой F , приложенной в середине пролёта.

При этом, с учётом (29), имеем:

$$\begin{aligned} S_{xp}^{(+)}(z) &= b \left[h^{(+)}(z) - y_e^{(+)\max}(z) \right] \times \\ &\quad \times \left\{ y_e^{(+)\max}(z) + \frac{1}{2} \left[h^{(+)}(z) - y_e^{(+)\max}(z) \right] \right\}; \\ S_{xp}^{(-)}(z) &= b \left[h - h^{(+)}(z) - y_e^{(-)\max}(z) \right] \times \\ &\quad \times \left\{ y_e^{(-)\max}(z) + \frac{1}{2} \left[h - h^{(+)}(z) - y_e^{(-)\max}(z) \right] \right\}; \\ S_{xe}^{(+)}(z) &= \frac{1}{2} b \left[y_e^{(+)\max}(z) \right]^2; S_{xe}^{(-)}(z) = \frac{1}{2} b \left[y_e^{(-)\max}(z) \right]^2; \\ A_p^{(+)}(z) &= b \left[h^{(+)}(z) - y_e^{(+)\max}(z) \right]; \\ A_p^{(-)}(z) &= b \left[h - h^{(+)}(z) - y_e^{(-)\max}(z) \right]; \\ I_{xp}^{(+)}(z) &= \frac{1}{12} b \left[h^{(+)}(z) - y_e^{(+)\max}(z) \right]^3 + \\ &\quad + b \left[h^{(+)}(z) - y_e^{(+)\max}(z) \right] \left\{ y_e^{(+)\max}(z) + \frac{1}{2} \left[h^{(+)}(z) - y_e^{(+)\max}(z) \right] \right\}^2; \end{aligned} \quad (28)$$

$$I_{xp}^{(-)}(z) = \frac{1}{12}b \left[h - h^{(+)}(z) - y_e^{(-)\max}(z) \right]^3 +$$

$$+ b \left[h - h^{(+)}(z) - y_e^{(-)\max}(z) \right] \left\{ y_e^{(-)\max}(z) + \frac{1}{2} \left[h - h^{(+)}(z) - y_e^{(-)\max}(z) \right] \right\}^2 ;$$

$$I_{xe}^{(+)}(z) = \frac{1}{12}b \left(y_e^{(+)\max}(z) \right)^3 ; I_{xe}^{(-)}(z) = \frac{1}{12}b \left(y_e^{(-)\max}(z) \right)^3 ;$$

$$S_{xee}^{(+)} = \frac{1}{2}b \left[h^{(+)} \right]^2 ; S_{xee}^{(-)} = \frac{1}{2}b \left[h^{(-)} \right]^2$$

$$I_{xe}^{(+)}(z) = \frac{1}{12}b \left(h^{(+)} \right)^3 ; I_{xe}^{(-)}(z) = \frac{1}{12}b \left(h^{(-)} \right)^3 .$$

Исходные данные:

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}; D = 1 \cdot 10^{11} \text{ Па}; \sigma_T = 200 \text{ МПа}; \sigma_{ep} = 300 \text{ МПа};$$

$$b = 0,05 \text{ м}; h = 0,25 \text{ м}; l = 6 \text{ м}; F = 100 \text{ кН}.$$

Решение:

Для прямоугольного поперечного сечения нейтральная линия в области упругопластического деформирования пройдёт через центры тяжести поперечных сечений, то есть $h^{(+)} = h^{(-)} = \frac{h}{2}$. Кроме того, в силу симметрии $z_p^{(+)} = z_p^{(-)}$. Следовательно, используя соотношение (21), найдём границу зон упругого и пластического деформирования (рис. 4).

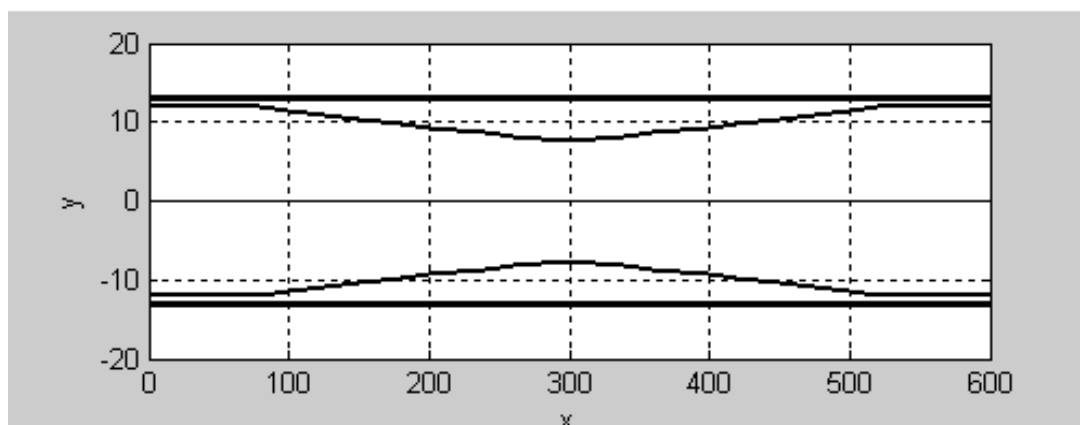


Рисунок 4 – Граница зон упругого и пластического деформирования

Результаты вычислений представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты вычислений

№	z , м	$y_e^{(+)\max}$, м	$y_e^{(-)\max}$, м
1	3,0	0,076	- 0,076
2	2,8	0,0795	- 0,0795
3	2,6	0,0895	- 0,0895
4	2,4	0,086	- 0,086
5	2,2	0,09	- 0,09
6	2,0	0,0935	- 0,0935
7	1,8	0,0975	- 0,0975
8	1,5	0,1035	- 0,1035
9	1,0	0,114	- 0,114

Несущую способность балки найдём, приравняв нормальное напряжение в фибровых волокнах опасного сечения (под сосредоточенной силой) $\sigma_{zp}(y_p, z)$ по соотношению (22) пределу прочности $\sigma_{вр}$:

$$F = \frac{4 \left[\sigma_{вр} - \left(1 - \frac{D}{E}\right) \sigma_T \right]}{D \cdot l \cdot y_p} \left\{ D \left[I_{xp}^{(+)}(z) + I_{xp}^{(-)}(z) \right] + E \left[I_{xe}^{(+)}(z) + I_{xe}^{(-)}(z) \right] \right\} + \left(1 - \frac{D}{E}\right) \left[S_{xp}^{(+)}(z) + S_{xp}^{(-)}(z) \right] \frac{4\sigma_T}{l} = 110,5 \text{ кН}.$$

Выводы

1. Для балки, находящейся в условиях плоского поперечного изгиба, материал которой деформируется в соответствии с билинейной диаграммой растяжения, на упругом, упругопластическом и пластическом участках балки получены:
 - а. Расчётные внутренние усилия – продольная сила и изгибающий момент;
 - б. Нормальные напряжения в продольных волокнах;
 - в. Кривизна нейтральной линии.
2. Полученные соотношения – это необходимый инструмент как для определения границ зон упругого и пластического деформирования,

так и для определения положения нейтральной линии, а также определения напряжённно-деформированного состояния балки.

3. Рассмотрен числовой пример построения границы зон упругого и пластического деформирования в балке, прямоугольного поперечного сечения, нагруженного сосредоточенной силой в середине пролёта, а также определена её несущая способность.

Библиографический список:

1. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов: Учебное пособие. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 560 с.
2. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. Учебник для студентов вузов. М.: «Машиностроение». 1968. 400 с.
3. Нил Б.Г. Расчёт конструкций с учётом пластических свойств материалов. М.: «Госстройиздат». 1961. 315 с.
4. Ржаницын А.Р. Расчёт сооружений с учётом пластических свойств материалов. – 2-е изд. перераб. – М.: Гос. изд-во лит. по строительству и архитектуре. 1954. 289 с.
5. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. – 10-е изд. перераб. и доп. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1999. 592 с. (Сер. Механика в техническом университете; Т.2).
6. Валиуллин А.Х. Предельный упругопластический изгиб балки // Вестник Казанского технологического университета. 2012. Т. 15. № 2. С. 70-75.
7. Валиуллин А.Х. Упругопластический изгиб балки из материала с линейным упрочнением // Вестник Казанского технологического университета. 2010. № 9. С. 453-458.
8. Валиуллин А.Х. Чистый упругопластический изгиб балки // Вестник Казанского технологического университета. 2011. № 6. С. 182-186.
9. Валиуллин А.Х. Упругопластический изгиб балки // Вестник Казанского технологического университета. 2013. Т. 16. № 21. С. 221-224.

10. Валиуллин А.Х. Исследование упругопластического изгиба с учетом изменения поперечного сечения балки // Вестник Казанского технологического университета. 2013. Т. 16. № 2. С. 145-148.

11. Валиуллин А.Х. Уточненный расчет изменения поперечного сечения балки при упругопластическом изгибе // Вестник Казанского технологического университета. 2013. Т. 16. № 6. С. 163-166.

12. Бакушев С.В. Упругопластический изгиб стержня с двумя осями симметрии распределённой нагрузкой // Региональная архитектура и строительство. 2013., №2. С.71-80.

13. Бакушев С.В. Плоский поперечный упругопластический изгиб стержня с двумя осями симметрии // Строительная механика и расчёт сооружений. 2013. №4. С.2-9.

14. Бакушев С.В. Упругопластический поперечный изгиб стержня в условиях ограниченной пластической деформации // Сборник: Дороги и мосты. – Москва: Изд-во ФГУП "РОСДОРНИИ". Выпуск 30/2. 2013. С.187-203.

15. Бакушев С.В. Моделирование упругопластического изгиба стержня со ступенчатым поперечным сечением и двумя осями симметрии [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2015. №1. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: <http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mehanika/modelirovanie-uprugoplasticheskogo-izgiba-sterzhnya-so-stupenchatym-poperechnym-secheniem-i-dvumya-osyami-simmetrii/view>.