

УДК 519.633

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ ПЛОСКОЙ
ДЕФОРМАЦИИ ИДЕАЛЬНО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СПЛОШНОЙ
СРЕДЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ ПРИ
БИКВАДРАТИЧНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ЗАМЫКАЮЩИХ
УРАВНЕНИЙ**

Бакушев Сергей Васильевич

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Аннотация

Цель исследования – вывод дифференциальных уравнений равновесия геометрически и физически нелинейной идеально упругопластической в отношении сдвиговых деформаций и нелинейной в отношении объёмных деформаций сплошной среды, находящейся в условиях плоской деформации в цилиндрических координатах, при аппроксимации диаграмм объёмного и сдвигового деформирования биквадратичными функциями. Построение физических зависимостей основано на вычислении секущих модулей объёмного и сдвигового деформирования при аппроксимации каждого из графиков диаграмм объёмного и сдвигового деформирования при помощи двух отрезков парабол. Исходя из предположения о независимости, вообще говоря, друг от друга диаграмм объёмного и сдвигового деформирования, рассмотрены пять основных случаев физических зависимостей, зависящих от взаимного расположения точек излома графиков диаграмм объёмного и сдвигового деформирования, аппроксимированных каждый двумя парабололами. На основе полученных физических уравнений выводятся дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для геометрически и физически нелинейной идеально упругопластической в отношении сдвиговых деформаций и нелинейной в отношении объёмных деформаций сплошной среды,

находящейся в условиях плоской деформации в цилиндрических координатах. Значимость полученных результатов для строительной науки состоит в том, что полученные дифференциальные уравнения в перемещениях позволят получать решение задач расчёта идеально-упругопластических сплошных сред, находящихся в условиях плоской деформации в цилиндрических координатах, механическое поведение которых описывается с учётом и физической, и геометрической нелинейности, при аппроксимации графиков диаграмм объёмного и сдвигового деформирования биквадратичными функциями.

Ключевые слова: идеально-упругопластическая сплошная среда, плоская деформация, цилиндрические координаты, дифференциальные уравнения равновесия, биквадратичные замыкающие уравнения, геометрически линейная модель, геометрически нелинейная модель.

**DIFFERENTIAL EQUILIBRIUM EQUATIONS FOR PLANE
DEFORMATION OF AN IDEALLY ELASTIC-PLASTIC CONTINUOUS
MEDIUM IN CYLINDRICAL COORDINATES IN A BIQUADRATIC
APPROXIMATION OF THE CLOSING EQUATIONS**

Bakushev Sergey Vasilevich

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor of the department "Mechanics".

Abstract

The purpose of the study is to derive differential equilibrium equations geometrically and physically nonlinear ideally elastic in relation to shear deformations and nonlinear in relation to volumetric deformations of a continuous medium located under conditions of flat deformation in cylindrical coordinates, when approximating diagrams of volumetric and shear deformation diagrams with biquadratic functions. The construction of physical dependencies is based on the calculation of secant modules of volumetric and shear deformation when approximating each of the graphs of volumetric and shear deformation diagrams

using two segments of parabolas. Proceeding from the assumption of the independence, generally speaking, of volumetric and shear deformation diagrams from each other, five main cases of physical dependencies are considered, depending on the mutual location of the break points of the graphs of volumetric and shear deformation diagrams, approximated each by two parabolas. On the basis of the obtained physical equations, differential equilibrium equations in displacements are derived for geometrically and physically nonlinear ideally elastic-plastic in relation to shear deformations and nonlinear with respect to volumetric deformations of a continuous medium located under conditions of flat deformation in cylindrical coordinates. The significance of the results obtained for construction science lies in the fact that the obtained differential equations in displacements will make it possible to obtain a solution to the problems of calculating ideal-elastic continuous media located in conditions of flat deformation in cylindrical coordinates, the mechanical behavior of which is described taking into account both physical and geometric nonlinearity, when approximating the graphs of diagrams of volumetric and shear deformation biquadratic functions.

Keywords: ideal-elastic continuous medium, planar deformation, cylindrical coordinates, differential equilibrium equations, biquadratic closure equations, geometrically linear model, geometrically nonlinear model.

Введение

В последние годы решению задач механики деформируемого твёрдого тела с учётом физической и геометрической нелинейности посвящены многие работы отечественных и зарубежных учёных. Так в работах [1, 2] рассмотрена задача об изгибе консольно закреплённой трёхслойной пластины с трансверсально-мягким наполнителем с учётом геометрической нелинейности. В работе [3] представлен нелинейный анализ изгиба ортотропных кольцеобразных/круговых графеновых листов. Геометрическая и физическая нелинейность учитывается при разработке методов расчёта тонкостенных конструкций типа пластин и оболочек в работах [4, 5, 6, 7, 8]. В статье [9]

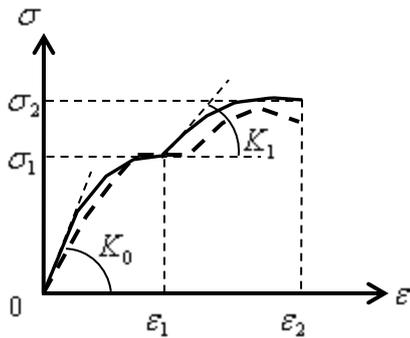
описание деформаций нескальных грунтов выполняется с использованием физически и геометрически нелинейной модели гиперупругого изотропного материала. Изучение нелинейных проблем надёжности фундаментов мелкого заложения с использованием мягких вычислительных методов выполнено в работе [10]. В работе [11] получены уравнения квадратичного приближения для геометрически нелинейной теории физически линейных стержней Коссера-Тимошенко. Расчёт упругих стержней с учётом геометрической нелинейности рассматривался также и в работах зарубежных инженеров [12, 13]. В работе [14] дана оценка безопасности бетонных конструкций с учётом нелинейной работы материала. Статья [15] посвящена нелинейному анализу, численному моделированию и экспериментальному обоснованию расчёта бетонной плиты на упругом основании на основе трехмерной вычислительной модели.

Решение задач физически нелинейной, но геометрически линейной теории упругости возможно как в напряжениях, так и в перемещениях. Если же материал физически нелинейного упругого тела проявляет ещё и геометрически нелинейные свойства (в смысле В.В. Новожилова), то в этом случае дифференциальные уравнения равновесия в коэффициентах при производных от обобщённых напряжений по пространственным координатам содержат производные от перемещений по пространственным координатам [16], что приводит к необходимости решать задачу нелинейной теории упругости в перемещениях. В настоящей работе рассматривается построение дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях для физически нелинейного идеально-упругопластического тела, находящегося в условиях плоской деформации, в цилиндрических координатах. Физически нелинейное упругое тела рассматривается как без учёта, так и с учётом геометрической нелинейности (в смысле В.В. Новожилова). Построение дифференциальных уравнений равновесия физически нелинейной сплошной среды для плоской деформации в цилиндрической системе координат выполнено для случая аппроксимации замыкающих уравнений физических соотношений биквадратичными функциями [17] как с учётом, так и без учёта геометрической

нелинейности. Разрешающие уравнения для плоской деформации в перемещениях для физически и геометрически нелинейной сплошной среды в цилиндрических координатах представлены автором в работе [18]. При этом рассматриваются сплошные среды, механическое поведение которых описывается математическими моделями, в которых физические соотношения имеют форму произвольных перекрёстных зависимостей между первыми инвариантами тензоров и вторыми инвариантами девиаторов обобщённых напряжений и нелинейных деформаций. Аппроксимация замыкающих уравнений физических соотношений билинейными функциями рассматривалась в работе [19]. Построение дифференциальных уравнений равновесия физически нелинейной сплошной среды для плоской деформации в цилиндрической системе координат для случая аппроксимации замыкающих уравнений физических соотношений билинейными функциями без учёта геометрической нелинейности представлены в работе [20]; с учётом геометрической нелинейности – в работе [21]. Построение дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях для некоторых характерных случаев деформирования нелинейной сплошной среды – одномерного плоского, центрально-симметричного, осесимметричного, а также плоской деформации в прямоугольных и цилиндрических координатах при билинейной аппроксимации замыкающих уравнений для физических соотношений как без учёта, так и с учётом геометрической нелинейности приведены в работе [22].

В данной работе строятся дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для случая плоского деформирования идеально упругопластической в отношении сдвиговых деформаций и нелинейной в отношении объёмных деформаций сплошной среды в цилиндрических координатах $u = u(r, \varphi)$, $v = v(r, \varphi)$, $w = 0$ при аппроксимации замыкающих уравнений произвольной формы билинейными функциями без учёта и с учётом геометрической нелинейности (рис. 1).

а).



б).

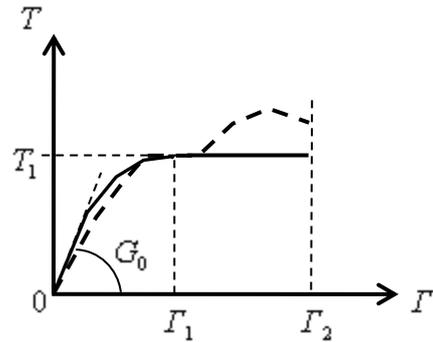


Рисунок 1 – Диаграммы объёмного и сдвигового деформирования:

а) диаграмма $\sigma \approx \varepsilon$; б) диаграмма $T \approx \Gamma$.

Пунктирные толстые линии – исходные кривые объёмного и сдвигового деформирования; сплошные толстые линии – аппроксимирующие отрезки парабол.

Физические уравнения для геометрически линейной модели

В соответствии с работой [17] секущие модули объёмного расширения (сжатия) $K = K(\varepsilon, \Gamma)$ и сдвига $G = G(\varepsilon, \Gamma)$ на первом криволинейном участке диаграмм $\sigma \approx \varepsilon$ и $T \approx \Gamma$ (рис. 1) будут определяться выражениями:

$$K'(\varepsilon) = \frac{1}{3}K_0 + K_{01}\varepsilon, \quad G(\Gamma) = G_0 + G_{01}\Gamma. \quad (1)$$

$$\text{Здесь } K_{01} = \frac{\sigma_1 - K_0\varepsilon_1}{3\varepsilon_1^2}, \quad G_{01} = \frac{T_1 - G_0\Gamma_1}{\Gamma_1^2}. \quad (2)$$

На втором криволинейном участке диаграмм $\sigma \approx \varepsilon$ и $T \approx \Gamma$ секущий модуль объёмного расширения (сжатия) $K = K(\varepsilon, \Gamma)$ и секущий модуль сдвига $G = G(\varepsilon, \Gamma)$ будут вычисляться по формулам:

$$K''(\varepsilon) = a_1\varepsilon + b_1 + \frac{c_1}{\varepsilon}, \quad G''(\Gamma) = \frac{T_1}{\Gamma}. \quad (3)$$

$$\text{Здесь } a_1 = \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) - K_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{3(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2}, \quad b_1 = \frac{1}{3} \left[K_1 - 2 \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) - K_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2} \varepsilon_1 \right],$$

$$c_1 = \frac{1}{3} \left[\sigma_1 - K_1 \varepsilon_1 - \frac{(\sigma_2 - \sigma_1) - K_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2} \varepsilon_1^2 \right]. \quad (4)$$

В формулах (2) и (4) обозначено: K_0 – начальный модуль объёмного расширения (сжатия); G_0 – начальный модуль сдвига; K_1 – начальный модуль упрочнения при объёмном расширении (сжатии); σ_1, ε_1 – координаты конечной точки первого участка (координаты начальной точки второго участка) на диаграмме $\sigma \approx \varepsilon$; T_1, Γ_1 – координаты конечной точки первого участка (координаты начальной точки второго участка) на диаграмме $T \approx \Gamma$; σ_2, ε_2 – координаты конечной точки второго участка на диаграмме $\sigma \approx \varepsilon$; $T_2 = T_1, \Gamma_2$ – координаты конечной точки второго участка на диаграмме $T \approx \Gamma$. Начальный модуль упрочнения при сдвиге в силу идеальной пластичности принимается равным нулю: $G_1 = 0$.

Кроме того, σ – первый инвариант тензора напряжений; ε – первый инвариант тензора деформаций; T – интенсивность касательных напряжений; Γ – интенсивность деформаций сдвига.

При плоской деформации в цилиндрических координатах $\varepsilon = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}$ и

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi})^2 + \varepsilon_{rr}^2 + \varepsilon_{\varphi\varphi}^2 + \frac{3}{2} \varepsilon_{r\varphi}^2}. \quad \text{Кроме того, } \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right);$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\varphi r} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r}.$$

В зависимости от текущего напряжённого и деформированного состояния по отношению к точкам излома графиков диаграмм объёмного и сдвигового деформирования возможно сформулировать пять случаев физических

зависимостей. При этом, если $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} \neq K_1, \quad \left. \frac{dT^I(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} \neq G_1$, то графики

диаграмм объёмного и сдвигового деформирования имеют точки излома

(Случай 1-4); если $\left. \frac{d\sigma^I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_1} = K_1$, $\left. \frac{dG^I(\Gamma)}{d\Gamma} \right|_{\Gamma=\Gamma_1} \neq G_1$, то точка излома графика

на диаграмме объёмного деформирования отсутствует (Случай 5).

Случай 1. Здесь возможны следующие варианты:

$$- |\varepsilon_1| = |\Gamma_1|, \text{ причём } 0 \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_1| \text{ и } 0 \leq |\Gamma| \leq |\Gamma_1|. \quad (5)$$

$$- |\varepsilon_1| < \Gamma_1, \text{ причём } 0 \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_1| \text{ и } 0 \leq \Gamma \leq \Gamma_0 < \Gamma_1. \quad (6)$$

$$- |\varepsilon_1| > \Gamma_1, \text{ причём } 0 \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_0| < |\varepsilon_1| \text{ и } 0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1. \quad (7)$$

В этом случае физические уравнения для плоской деформации в декартовых координатах с учётом формул (1) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= K^I(\varepsilon) \cdot \varepsilon + 2G^I(\Gamma) \cdot \left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon \right); \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= K^I(\varepsilon) \cdot \varepsilon + 2G^I(\Gamma) \cdot \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon \right); \\ \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} &= G^I(\Gamma) \cdot \varepsilon_{r\varphi}; \sigma_{zz} = \left[K^I(\varepsilon) - \frac{2}{3}G^I(\Gamma) \right] \varepsilon. \end{aligned} \quad (8)$$

Случай 2. Здесь возможен один вариант:

$$- |\varepsilon_1| < \Gamma_1, \text{ причём } |\varepsilon_1| \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_0| \text{ и } \Gamma_0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1. \quad (9)$$

Физические уравнения с учётом формул (1) и (3) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= K^{II}(\varepsilon) \cdot \varepsilon + 2G^I(\Gamma) \cdot \left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon \right); \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= K^{II}(\varepsilon) \cdot \varepsilon + 2G^I(\Gamma) \cdot \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon \right); \\ \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} &= G^I(\Gamma) \cdot \varepsilon_{r\varphi}; \sigma_{zz} = \left[K^{II}(\varepsilon) - \frac{2}{3}G^I(\Gamma) \right] \varepsilon. \end{aligned} \quad (10)$$

Случай 3. Здесь возможен один вариант:

$$- |\varepsilon_1| > \Gamma_1, \text{ причём } |\varepsilon_0| \leq |\varepsilon| \leq |\varepsilon_1| \text{ и } \Gamma_1 \leq \Gamma \leq \Gamma_0. \quad (11)$$

Физические уравнения с учётом формул (1) и (3) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= K^I(\varepsilon) \cdot \varepsilon + 2G^II(\Gamma) \cdot \left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon \right); \\
\sigma_{\varphi\varphi} &= K^I(\varepsilon) \cdot \varepsilon + 2G^II(\Gamma) \cdot \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon \right); \\
\sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} &= G^II(\Gamma) \cdot \varepsilon_{r\varphi}; \quad \sigma_{zz} = \left[K^I(\varepsilon) - \frac{2}{3}G^II(\Gamma) \right] \varepsilon.
\end{aligned} \tag{12}$$

Случай 4. Здесь возможны следующие варианты:

$$- |\varepsilon_1| = \Gamma_1, \text{ причём } |\varepsilon| \geq |\varepsilon_1| \text{ и } \Gamma \geq \Gamma_1. \tag{13}$$

$$- |\varepsilon_1| < \Gamma_1, \text{ причём } |\varepsilon| \geq \varepsilon_0 \text{ и } \Gamma \geq \Gamma_1. \tag{14}$$

$$- |\varepsilon_1| > \Gamma_1, \text{ причём } |\varepsilon| \geq |\varepsilon_1| \text{ и } \Gamma \geq \Gamma_0. \tag{15}$$

Физические уравнения при этом с учётом формул (3) будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= K^II(\varepsilon) \cdot \varepsilon + 2G^II(\Gamma) \cdot \left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon \right); \\
\sigma_{\varphi\varphi} &= K^II(\varepsilon) \cdot \varepsilon + 2G^II(\Gamma) \cdot \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon \right); \\
\sigma_{r\varphi} = \sigma_{\varphi r} &= G^II(\Gamma) \cdot \varepsilon_{r\varphi}; \quad \sigma_{zz} = \left[K^II(\varepsilon) - \frac{2}{3}G^II(\Gamma) \right] \varepsilon.
\end{aligned} \tag{16}$$

Случай 5. Если $0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1$, то физические уравнения будут иметь вид (8), если $\Gamma \geq \Gamma_1$, то физические уравнения будут иметь вид (12).

В соотношениях (6), (7), (9), (11), (14) и (15) интенсивности деформаций сдвига Γ_0 соответствуют такие компоненты деформации, что

$$|\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}| = |\varepsilon_1|. \tag{17}$$

объёмной деформации $|\varepsilon_0|$ соответствуют такие компоненты деформации, что

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi})^2 + \varepsilon_{rr}^2 + \varepsilon_{\varphi\varphi}^2 + \frac{3}{2}\varepsilon_{r\varphi}^2} = \Gamma_1. \tag{18}$$

Дифференциальные уравнения для геометрически линейной модели

Подставляя физические уравнения (8), (10), (12) и (16) в дифференциальные уравнения равновесия плоской деформации сплошной среды в цилиндрических координатах [22]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + F_r &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \sigma_{r\varphi} + F_\varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

получим четыре вида разрешающих уравнений в перемещениях, имеющих одну и ту же структуру:

$$\left\{ \begin{aligned} A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + B_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} + D_1 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + E_1 \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + F_1 \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \varphi} + A + F_r &= 0; \\ A_2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + B_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + C_2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} + D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + E_2 \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + F_2 \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \varphi} + B + F_\varphi &= 0. \end{aligned} \right. \quad (20)$$

Коэффициенты $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, A$ и $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2, B$ в уравнениях (20) зависят от вида физических уравнений и определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} A_1 &= a + 2G^j(\Gamma) + \frac{4\beta}{3\Gamma} a_{r\varphi} a_{rr}; B_1 = \frac{1}{r^2} \left[G^j(\Gamma) + \frac{\beta \varepsilon_{r\varphi}^2}{\Gamma} \right]; C_1 = \frac{4\beta \varepsilon_{r\varphi}}{3\Gamma r} a_{r\varphi}; \\ D_1 &= \frac{2\beta \varepsilon_{r\varphi}}{\Gamma} a_{rr}; E_1 = \frac{2\beta \varepsilon_{r\varphi}}{3\Gamma r^2} a_{\varphi r}; F_1 = \frac{a}{r} + \frac{4\beta}{3\Gamma r} a_{\varphi r} a_{rr} + \frac{1}{r} \left[G^j(\Gamma) + \frac{\beta \varepsilon_{r\varphi}^2}{\Gamma} \right]; \\ A &= \frac{a}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{a}{r^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) + \frac{4\beta}{3\Gamma r} a_{\varphi r} a_{rr} b_{r\varphi} - \frac{2\beta \varepsilon_{r\varphi}}{\Gamma r^2} a_{rr} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} + r \frac{\partial v}{\partial r} - v \right) - \\ &\quad - G^j(\Gamma) \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{2\beta \varepsilon_{r\varphi}}{3\Gamma r^2} a_{\varphi r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\beta \varepsilon_{r\varphi}^2}{\Gamma r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} G^j(\Gamma) \cdot b_{r\varphi}; \\ A_2 &= \frac{2\beta \varepsilon_{r\varphi}}{3\Gamma} a_{r\varphi}; B_2 = \frac{2\beta \varepsilon_{r\varphi}}{\Gamma r^2} a_{\varphi\varphi}; C_2 = \frac{1}{r} G^j(\Gamma) + \frac{\beta \varepsilon_{r\varphi}^2}{\Gamma} + \frac{1}{r} \left[a + \frac{4\beta}{3\Gamma} a_{r\varphi} a_{\varphi\varphi} \right]; \\ D_2 &= G^j(\Gamma) + \frac{\beta \varepsilon_{r\varphi}^2}{\Gamma}; E_2 = \frac{1}{r^2} \left[a + 2G^j(\Gamma) + \frac{4\beta}{3\Gamma} a_{\varphi r} a_{\varphi\varphi} \right]; \\ D_2 &= G^j(\Gamma) + \frac{\beta \varepsilon_{r\varphi}^2}{\Gamma}; E_2 = \frac{1}{r^2} \left[a + 2G^j(\Gamma) + \frac{4\beta}{3\Gamma} a_{\varphi r} a_{\varphi\varphi} \right]; \\ F_2 &= \frac{2\beta \varepsilon_{r\varphi}}{\Gamma r} \left(a_{\varphi\varphi} + \frac{1}{3} a_{\varphi r} \right); B = -G^j(\Gamma) \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - G^j(\Gamma) \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} - v \right) + \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\beta\varepsilon_{r\varphi}}{3\Gamma r} a_{\varphi r} b_{r\varphi} - \frac{\beta\varepsilon_{r\varphi}^2}{\Gamma r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\beta\varepsilon_{r\varphi}^2}{\Gamma r^2} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} - v \right) + \frac{a}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + G^j(\Gamma) \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \\
& + \frac{4\beta}{3\Gamma r^2} a_{\varphi r} a_{\varphi\varphi} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{2\beta\varepsilon_{r\varphi}}{\Gamma r^2} a_{\varphi\varphi} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + G^j(\Gamma) \frac{2\varepsilon_{r\varphi}}{r}.
\end{aligned}$$

Здесь

$$a = a\varepsilon + K^i(\varepsilon) - \frac{2}{3}G^j(\Gamma); a_{rr} = \varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon; a_{\varphi\varphi} = \varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon;$$

$$a_{r\varphi} = 2\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi}; a_{\varphi r} = 2\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}; b_{r\varphi} = \varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi}.$$

В формулах (21) для физических уравнений (5):

- с коэффициентами α и β , определяемыми соотношениями (8),

$$i = I; j = I; \alpha = K_{01}; \beta = G_{01}. \quad (22)$$

- с коэффициентами α и β , определяемыми соотношениями (10),

$$i = II; j = I; \alpha = \left(a_1 - \frac{c_1}{\varepsilon^2} \right); \beta = G_{01}. \quad (23)$$

- с коэффициентами α и β , определяемыми соотношениями (12),

$$i = I; j = II; \alpha = K_{01}; \beta = -\frac{T_1}{\Gamma^2}. \quad (24)$$

- с коэффициентами α и β , определяемыми соотношениями (16),

$$i = II; j = II; \alpha = \left(a_1 - \frac{c_1}{\varepsilon^2} \right); \beta = -\frac{T_1}{\Gamma^2}. \quad (25)$$

Таким образом, дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для плоской деформации идеально упругопластической в отношении сдвиговых деформаций и нелинейной в отношении объёмных деформаций сплошной среды в цилиндрических координатах при биквадратичной аппроксимации замыкающих уравнений физических соотношений без учёта геометрически нелинейности построены.

Физические уравнения для геометрически нелинейной модели

Замыкающие уравнения для геометрически нелинейной модели сплошной среды [16, 23] описываются соотношениями, устанавливающими, в

самом общем случае, перекрёстные зависимости между первыми инвариантами тензоров и вторыми инвариантами девиаторов обобщённых напряжений и нелинейных деформаций:

$$K^* = K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*), G^* = G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*). \quad (26)$$

Здесь σ^* – первый инвариант тензора обобщённых напряжений; ε^* – первый инвариант тензора нелинейных деформаций; T^* – интенсивность обобщённых касательных напряжений; Γ^* – интенсивность нелинейных деформаций сдвига.

Аппроксимируя зависимости (26) биквадратичными функциями, нетрудно получить секущие модули объёмного расширения (сжатия) $K^* = K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$ и сдвига $G^* = G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$ на первом и втором криволинейных участках диаграмм $\sigma^* \approx \varepsilon^*$ и $T^* \approx \Gamma^*$, аналогичных соотношениям (1)-(4). При этом все величины, входящие в формулы (1)-(4) следует записывать со звёздочками.

Таким образом, K_0^* – геометрически нелинейный аналог начального модуля объёмного расширения (сжатия); G_0^* – геометрически нелинейный аналог начального модуля сдвига; K_1^* – геометрически нелинейный аналог начального модуля упрочнения при объёмном расширении (сжатии); $\sigma_1^*, \varepsilon_1^*$ – координаты конечной точки первого участка (координаты начальной точки второго участка) на диаграмме $\sigma^* \approx \varepsilon^*$; T_1^*, Γ_1^* – координаты конечной точки первого участка (координаты начальной точки второго участка) на диаграмме $T^* \approx \Gamma^*$; $\sigma_2^*, \varepsilon_2^*$ – координаты конечной точки второго участка на диаграмме $\sigma^* \approx \varepsilon^*$; $T_2^* = T_1^*, \Gamma_2^*$ – координаты конечной точки второго участка на диаграмме $T^* \approx \Gamma^*$. Геометрически нелинейный аналог начального модуля упрочнения при сдвиге в силу идеальной пластичности принимается равным нулю: $G_1^* = 0$.

Физические соотношения для геометрически нелинейной модели сплошной среды для случая плоской деформации будут записываться в форме, аналогичной соотношениям (8), (10), (12) и (16) с коэффициентами α и β , определяемыми соотношениями (22), (23), (24), (25) (если у всех величин, входящих в эти формулы проставить звёздочки).

Дифференциальные уравнения для геометрически нелинейной модели

Система дифференциальных уравнений равновесия для геометрически нелинейной модели сплошной среды для случая плоской деформации в цилиндрических декартовых координатах имеет вид [22]:

$$\left\{ \begin{array}{l} r \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \sigma_{rr}^* + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \sigma_{r\varphi}^* \right] + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \sigma_{\varphi r}^* + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \sigma_{\varphi\varphi}^* \right] + \\ + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \sigma_{rr}^* + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \sigma_{r\varphi}^* - \frac{\partial v}{\partial r} \sigma_{\varphi r}^* - \left(1 + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) \sigma_{\varphi\varphi}^* + r F_r^* = 0; \\ r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial v}{\partial r} \sigma_{rr}^* + \left(1 + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) \sigma_{r\varphi}^* \right] + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\partial v}{\partial r} \sigma_{\varphi r}^* + \left(1 + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) \sigma_{\varphi\varphi}^* \right] + \\ + \frac{\partial v}{\partial r} \sigma_{rr}^* + \left(1 + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) \sigma_{r\varphi}^* + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \sigma_{\varphi r}^* + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \sigma_{\varphi\varphi}^* + r F_\varphi^* = 0. \end{array} \right. \quad (27)$$

При плоской деформации в цилиндрических координатах с учётом геометрической нелинейности

$$\varepsilon^* = \varepsilon_{rr}^* + \varepsilon_{\varphi\varphi}^* \quad \text{и} \quad \Gamma^* = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_{rr}^* - \varepsilon_{\varphi\varphi}^*)^2 + \varepsilon_{rr}^{*2} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{*2} + \frac{3}{2} \varepsilon_{r\varphi}^{*2}},$$

$$\text{причём} \quad \varepsilon_{rr}^* = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 \right];$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^* = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + u \right) + \frac{1}{2r^2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right)^2 \right];$$

$$\varepsilon_{r\varphi}^* = \varepsilon_{\varphi r}^* = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) + \frac{\partial v}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right).$$

Подставляя физические уравнения для геометрически нелинейной модели сплошной среды в систему дифференциальных уравнений равновесия плоской

деформации в цилиндрических координатах (28), получим четыре вида разрешающих уравнений в перемещениях, имеющих одну и ту же структуру:

$$\begin{cases} A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + B_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} + D_1 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + E_1 \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + F_1 \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \varphi} + A + rF_r^* = 0; \\ A_2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + B_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + C_2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} + D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + E_2 \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + F_2 \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \varphi} + B + rF_\varphi^* = 0. \end{cases} \quad (28)$$

Коэффициенты $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, A$ и $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2, B$ в уравнениях (28) зависят от вида физических уравнений и определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} A_1 &= r \left[K^{*i}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*j}(\Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right] + r \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) e_1 + \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) e_2; \\ B_1 &= \frac{1}{r} \left[K^{*i}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*j}(\Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right] + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) e_3 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) e_4; \\ C_1 &= 2G^{*j}(\Gamma^*) \cdot \varepsilon_{r\varphi}^* + r \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) e_5 + \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) e_6 + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) e_7 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) e_8; \\ D_1 &= r \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) e_9 + \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) e_{10}; E_1 = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) e_{11} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) e_{12}; \\ F_1 &= r \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) e_{13} + \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) e_{14} + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) e_{15} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) e_{16}; \\ A &= r \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) S_1 + \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) S_2 + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) S_3 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) S_4 + \\ &+ \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \times \left[K^{*i}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*j}(\Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right] + \\ &+ \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} - v \right) - 2 \frac{\partial v}{\partial r} \right] G^{*j}(\Gamma^*) \cdot \varepsilon_{r\varphi}^* - \left(1 + \frac{2}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) \times \\ &\times \left[K^{*i}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*j}(\Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right]; \\ A_2 &= r \frac{\partial v}{\partial r} e_1 + r \left(1 + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) e_2; B_2 = \frac{\partial v}{\partial r} e_3 + \left(1 + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) e_4; \end{aligned} \quad (29)$$

$$C_2 = r \frac{\partial v}{\partial r} e_5 + r \left(1 + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) e_6 + \frac{\partial v}{\partial r} e_7 + \left(1 + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) e_8;$$

$$D_2 = r \left[K^{*i}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*j}(\Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right] + r \frac{\partial v}{\partial r} e_9 + r \left(1 + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) e_{10};$$

$$E_2 = \frac{1}{r} \left[K^{*i}(\varepsilon^*) \cdot \varepsilon^* + 2G^{*j}(\Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right] + r \frac{\partial v}{\partial r} e_{11} + r \left(1 + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) e_{12};$$

$$F_2 = 2G^{*j}(\Gamma^*) \cdot \varepsilon_{r\varphi}^* + r \frac{\partial v}{\partial r} e_{13} + r \left(1 + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) e_{14} + \frac{\partial v}{\partial r} e_{15} + \left(1 + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) e_{16};$$

$$B = r \frac{\partial v}{\partial r} S_1 + r \left(1 + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) S_2 + \frac{\partial v}{\partial r} S_3 + \left(1 + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) S_4 +$$

$$+ \left(3 + \frac{u}{r} + 2 \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) G^{*j}(\Gamma^*) \cdot \varepsilon_{r\varphi}^* + \frac{\partial v}{\partial r} \left[K^{*i}(\varepsilon^*) \varepsilon^* + 2G^{*j}(\Gamma^*) \times \right. \\ \left. \times \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right] + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial r} - v \right) \left[K^{*i}(\varepsilon^*) \varepsilon^* + 2G^{*j}(\Gamma^*) \cdot \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right].$$

В формулах (29)

$$k_1 = \beta \varepsilon_{r\varphi}^* \frac{2}{3\Gamma^*} (2\varepsilon_{rr}^* - \varepsilon_{\varphi\varphi}^*);$$

$$k_2 = \beta \varepsilon_{r\varphi}^* \frac{2}{3\Gamma^*} (2\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \varepsilon_{rr}^*);$$

$$k_3 = G^{*j}(\Gamma^*) + \beta \varepsilon_{r\varphi}^{*2} \frac{1}{\Gamma^*};$$

$$d = \alpha \varepsilon^* + K^{*i}(\varepsilon^*) + \frac{4}{3} G^{*j}(\Gamma^*) + \frac{4\beta}{3\Gamma^*} (2\varepsilon_{rr}^* - \varepsilon_{\varphi\varphi}^*) \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right); \quad (30)$$

$$f = \alpha \varepsilon^* + K^{*i}(\varepsilon^*) - \frac{2}{3} G^{*j}(\Gamma^*) + \frac{4\beta}{3\Gamma^*} (2\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \varepsilon_{rr}^*) \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right);$$

$$p = \alpha \varepsilon^* + K^{*i}(\varepsilon^*) - \frac{2}{3} G^{*j}(\Gamma^*) + \frac{4\beta}{3\Gamma^*} (2\varepsilon_{rr}^* - \varepsilon_{\varphi\varphi}^*) \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right);$$

$$q = \alpha \varepsilon^* + K^{*i}(\varepsilon^*) + \frac{4}{3} G^{*j}(\Gamma^*) + \frac{4\beta}{3\Gamma^*} (2\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \varepsilon_{rr}^*) \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right);$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}
e_1 &= d \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{3\beta \varepsilon_{r\varphi}^*}{r} \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right); \\
e_2 &= k_1 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{k_3}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right); e_3 = \frac{k_2}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) + \frac{k_3}{r} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right); \\
e_4 &= \frac{q}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) + \frac{2\beta \varepsilon_{r\varphi}^*}{r\Gamma^*} \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right); \\
e_5 &= f \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) + \frac{3\beta \varepsilon_{r\varphi}^*}{r} \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right); \\
e_6 &= \frac{k_2}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) + \frac{k_3}{r} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right); e_7 = k_1 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{k_3}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - v \right); \\
e_8 &= p \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{2\beta \varepsilon_{r\varphi}^*}{\Gamma^* r} \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right); \\
e_9 &= d \frac{\partial u}{\partial r} + 3\beta \varepsilon_{r\varphi}^* \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) + 1 \right]; \\
e_{10} &= k_1 \frac{\partial v}{\partial r} + k_3 \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + u \right) + 1 \right]; \\
e_{11} &= \frac{k_2}{r} \left[1 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) \right] + \frac{k_3}{r} \frac{\partial v}{\partial r}; \\
e_{12} &= \frac{q}{r} \left[1 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) \right] + \frac{2\beta \varepsilon_{r\varphi}^*}{r\Gamma^*} \frac{\partial v}{\partial r} \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right); \\
e_{13} &= \frac{f}{r} \left[1 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) \right] + \frac{3\beta \varepsilon_{r\varphi}^*}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right); \\
e_{13} &= \frac{f}{r} \left[1 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) \right] + \frac{3\beta \varepsilon_{r\varphi}^*}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right); \\
e_{14} &= \frac{k_2}{r} \left[1 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) \right] + \frac{k_3}{r} \frac{\partial v}{\partial r}; e_{15} = k_1 \frac{\partial v}{\partial r} + k_3 \left[1 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) \right]; \\
e_{16} &= p \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2\beta}{\Gamma^*} \varepsilon_{r\varphi}^* \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \left[1 + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) \right].
\end{aligned} \tag{31}$$

И ещё,

$$\begin{aligned}
S_1 &= f \frac{1}{r} \left[\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) \right] - f \frac{1}{r^3} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right)^2 \right] + \\
&+ f \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) \frac{\partial u}{\partial r} - f \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{3\beta}{r^2} \varepsilon_{r\varphi}^* \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \times \\
&\times \left[\left(v - r \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right] + 3\beta \varepsilon_{r\varphi}^* \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \frac{\partial u}{\partial r} \times \\
&\times \left[-\frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \left(v - r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] + 3\beta \varepsilon_{r\varphi}^* \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \frac{\partial v}{\partial r} \times \\
&\times \left[-\frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} - u \right) \right]; \\
S_2 &= k_2 \frac{1}{r} \left[\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) \right] - k_2 \frac{1}{r^3} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right)^2 \right] + \\
&+ k_2 \frac{1}{r^2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) \frac{\partial u}{\partial r} - \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) \frac{\partial v}{\partial r} \right] + k_3 \frac{1}{r^2} \left[\left(v - r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right] + \\
&+ k_3 \frac{\partial u}{\partial r} \left[-\frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \left(v - r \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] + k_3 \frac{\partial v}{\partial r} \left[-\frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} - u \right) \right]; \\
S_3 &= k_2 \frac{1}{r} \left[\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) \right] \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \\
&- k_3 \frac{1}{r} \left[\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right]; \\
S_3 &= k_2 \frac{1}{r} \left[\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) \right] \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right) \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \\
&- k_3 \frac{1}{r} \left[\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right];
\end{aligned} \tag{32}$$

В формулах (29), (30), (31) и (32) для геометрически нелинейного аналога физических уравнений

$$- (8): i = I; j = I; \alpha = K_{01}^*; \beta = G_{01}^*; \tag{33}$$

$$- (10): i = II; j = I; \alpha = \left(a_1^* - \frac{c_1^*}{\varepsilon^{*2}} \right); \beta = G_{01}^*; \tag{34}$$

$$- (12): i = I; j = II; \alpha = K_{01}^*; \beta = -\frac{T_1^*}{\Gamma^{*2}}; \quad (35)$$

$$- (16): i = II; j = II; \alpha = \left(a_1^* - \frac{c_1^*}{\varepsilon^{*2}} \right); \beta = -\frac{T_1^*}{\Gamma^{*2}}. \quad (36)$$

Таким образом, дифференциальные уравнения в перемещениях для плоской деформации идеально упругопластической в отношении сдвиговых деформаций и нелинейной в отношении объёмных деформаций сплошной среды в цилиндрических координатах при билинейной аппроксимации замыкающих уравнений с учётом геометрически нелинейности построены.

Заключение

1. Построенные в статье дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях в цилиндрических координатах как с учётом, так и без учёта геометрической нелинейности могут найти применение при определении напряжённо-деформированного состояния сплошных сред идеально упругопластических в отношении сдвиговых деформаций и нелинейных в отношении объёмных деформаций, находящихся в условиях плоской деформации, замыкающие уравнения физических соотношения для которых аппроксимированы биквадратичными функциями.

2. При практическом использовании полученных формул следует прежде всего руководствоваться работой [17], где изложена методика аппроксимации диаграмм объёмного и сдвигового деформирования квадратичными функциями.

3. Один из приёмов решения задач расчёта конструкций из нелинейных материалов, описываемых разрывными (скачок в первой производной после аппроксимации) диаграммами объёмного и сдвигового деформирования излагается в ряде работ автора, в частности, в работе [24].

Библиографический список:

1. Бадриев И.Б., Макаров М.В., Смирнова Е.В. Численное исследование геометрически нелинейной задачи о поперечном изгибе трёхслойной пластины

с трансверсально-мягким наполнителем // Тенденции развития науки и образования. – 2020. – № 62-3. – С. 5-12. doi: 10.18411/lj-06-2020-50.

2. Paimushin V.N., Badriev I.B., Kholmogorov S.A. Consistent equations of nonlinear multilayer shells theory in the quadratic approximation // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2019. – V. 40, № 3. – P. 349–363.

3. Dastjerdi S., Jabbarzadeh M., Aliabadi M. Nonlinear static analysis of single layer annular/circular graphene sheets embedded in Winkler–Pasternak elastic matrix based on non-local theory of Eringen // Ain Shams Engineering Journal. – 2016. – Vol. 7, No. 2. – pp. 873–884. doi: <https://doi.org/10.1016/j.asej.2015.12.013>.

4. Клочков Ю.В., Николаев А.П., Ищанов Т.Р., Андреев А.С., Клочков М.Ю. Учёт геометрической нелинейности в конечно-элементных прочностных расчётах тонкостенных конструкций типа оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2020. Т. 16. № 1. С. 31-37. DOI: 10.22363/1815-5235-2020-16-1-31-37.

5. Салтыкова О.А., Крылова Е.Ю., Крысько В.А. Метод переменных параметров Биргера в задачах гибких пластинок // В сборнике: XXXI Международная инновационная конференция молодых учёных и студентов по проблемам машиноведения (МИКМУС - 2019) Сборник трудов конференции. 2020. С. 835-838.

6. Косицын С.Б., Федоров В.С., Акулич В.Ю. Численный анализ напряжённо-деформированного состояния цилиндрической оболочки, взаимодействующей с основанием, с учётом изменения расчётной модели во времени // Научный журнал строительства и архитектуры. 2019. № 3 (55). С. 84-93. DOI: 10.25987/VSTU.2019.55.3.009.

7. Токпанова К.Е., Достанова С.Х., Исаханов Е.А. Исследование напряжённо-деформированного состояния тонкостенной оболочки с учётом нелинейности и поперечных деформаций // Вестник Казахской академии транспорта и коммуникаций им. М. Тынышпаева. 2017. № 1 (100). С. 40-47.

8. Дедов Н.И., Исуткина В.Н. Упругопластическое деформирование геометрически нелинейных пластин и пологих оболочек // Известия

Самарского научного центра Российской академии наук. 2018. Т. 20. № 4-2 (84). С. 191-196.

9. Ray R., Kumar D., Samui P., Roy L.B., Goh A.T.C., Zhang W. Application of soft computing techniques for shallow foundation reliability in geotechnical engineering // *Geoscience Frontiers*. – 2021. – Vol. 12, No. 1. – pp. 375-383.

10. Христич Д.В., Астапов Ю.В., Артюх Е.В., Соколова М.Ю. Нелинейная модель деформирования сжимаемых грунтов // *Известия Тульского государственного университета. Науки о Земле*. – 2019. – № 4. – С. 305-312.

11. Лалин В.В., Мякшикова Е.А. Квадратичное приближение в нелинейной теории стержней // *AlfaBuild*. – 2018. – № 3 (5). – С. 20-32.

12. Xiao N., Zhong H. Non-linear quadrature element analysis of planar frames based on geometrically exact beam theory // *Int. J. Non-Lin. Mech.* – 2012. – Vol. 47. – Pp. 481-488.

13. Cajka R., Marcalikova Z., Bilek V., Sucharda O. Numerical Modeling and Analysis of Concrete Slabs in Interaction with Subsoil // *Sustainability*. – 2020. – Vol. 12, No. 9868, p. 9868. doi: <https://doi.org/10.3390/su12239868>.

14. Krenk S. Non-linear modelling and analysis of solids and structures // Cambridge: Cambridge University Press. – 2009. – 361 p.

15. Schlune H. Safety Evaluation of Concrete Structures with Nonlinear Analysis. Gothenburg // Chalmers University of Technology, – 2011, – 45 p.

16. Новожилов В.В. Теория упругости. – Судпромгиз, 1958. – 370 с.

17. Бакушев С.В. Аппроксимация диаграмм деформирования квадратичными функциями // *Строительная механика и расчёт сооружений*. – 2020. – №3 (290). – С. 2-14. doi: 10.37538/0039-2383.2020.3.2.14.

18. Бакушев С.В. Разрешающие уравнения плоской деформации в перемещениях для физически и геометрически нелинейной сплошной среды в цилиндрических координатах // *Региональная архитектура и строительство*. – 2017. – № 4 (33). – С. 70-77.

19. Бакушев С.В. Аппроксимация диаграмм деформирования билинейными функциями // Строительная механика и расчёт сооружений. – 2019. – №2 (283). – С. 2-11.

20. Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды для плоской деформации в цилиндрических координатах при билинейной аппроксимации замыкающих уравнений // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2021. – № 69. – С. 69-85.

21. Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды для плоской деформации в цилиндрических координатах при билинейной аппроксимации замыкающих уравнений (геометрически нелинейная модель) // Строительная механика и расчёт сооружений. – 2020. – №4 (291). – С.24-39.

22. Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения и краевые задачи механики деформируемого твёрдого тела. – М.: ЛЕНАНД, 2020. – 304 с.

23. Бакушев С.В. Геометрически и физически нелинейная механика сплошной среды: Плоская задача. М. Изд. стереотип. – М.: Книжный дом «Либроком», 2020. – 312 с.

24. Бакушев С.В. Алгоритм расчёта напряжённо-деформированного состояния упругой в отношении объёмных и нелинейной в отношении сдвиговых деформаций сплошной среды при билинейной аппроксимации замыкающих уравнений (плоская деформация в декартовых координатах) // Современная наука: теория, методология, практика: Материалы III-ей всероссийской (национальной) научно-практической конференции, 13-14 апреля 2021г. / ФГБОУ ВО "Тамбовский государственный технический университет". – Тамбов, Изд-во ИП Чеснокова А.В., 2021. – 354 с. 106-112 с.