УДК 629.12

ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ ЖЁСТКОСТИ РАСТЯНУТО-ИЗОГНУТОГО СТЕРЖНЯ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

Евсеев Александр Евгеньевич,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика».

Евсеев Илья Александрович,

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва,

магистрант.

Машин Валерий Михайлович,

ООО «Спецпроектцентр», г. Пенза,

кандидат технических наук, главный конструктор.

Аннотация

В статье развивается идея построения матрицы жёсткости с использованием дифференциального уравнения равновесия в перемещениях. Предложена методика вычисления матриц жесткости растянуто-изогнутого стержня. Полученная матрица позволяет вести деформационный расчет таких стержней.

Ключевые слова: метод конечных элементов, матрица жесткости.

FORMATION OF STIFFNESS MATRIX STRETCHED-CURVED ROD ACCORDING TO THE DIFFERENTIAL EQUATION

Evseev Alexander Evgenievich,
Penza State University of Architecture and Construction, Penza,
Candidate of Sciences, Associate Professor of the department "Mechanics".
Evseev Ilya Alexandrovich,
National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow,
undergraduate student.
Mashin Valery Mikhailovich,
LLC "SpecialProjectCenter", Penza,
Candidate of Sciences, chief designer.

Abstract

The article develops the idea of constructing a stiffness matrix using a differential equation of equilibrium in displacements. A technique for calculating the stiffness matrices of a stretched-curved rod is proposed. The resulting matrix makes it possible to carry out deformation analysis of such rods.

Keywords: finite element method, stiffness matrix.

Ранее, в статьях авторов [1, 2] был предложен единый подход к построению точных матриц жёсткости упругих стержневых конечных элементов для деформационного расчёта изгибаемых конструкций, основанный на использовании дифференциального уравнения равновесия в перемещениях. В этих же работах в качестве обоснования достоверности полученных результатов были приведены примеры вывода матрицы жесткости стержня, работающего на изгиб и матрицы жесткости стержня испытывающего одновременное действие изгибающего момента и сжимающей продольной силы.

В настоящей работе рассмотрим деформированное состояние стержня находящегося под одновременным действием изгибающего момента и растягивающей продольной силы. Дифференциальное уравнение изгиба такого стержня при узловой нагрузке отличается от приведенного в [2] лишь знаком перед вторым слагаемым и имеет вид:

$$\frac{d^4\nu}{dx^4} - n^2 \cdot \frac{d^2\nu}{dx^2} = 0\text{, где } n = \sqrt{\frac{|N|}{E \cdot J}} \tag{1}$$

где $v=v(x)$ — прогиб стержня.

Найдем множество решений, которое удовлетворяет данному уравнению. Для этого решим соответствующее характеристическое уравнение, определив его корни. Характеристическое уравнение имеет два кратных действительных корня равных нулю и два различных действительных корня $\pm n$. Тогда общий интеграл уравнения (1) имеет вид:

$$v = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot e^{n \cdot x} + a_4 \cdot e^{-n \cdot x} = \vec{H} \cdot \vec{a}, \tag{2}$$

где $\vec{H} = [1 \quad x \quad e^{n \cdot x} \quad e^{-n \cdot x}]^T$ — вектор-строка линейно-независимых решений уравнения (1), $\vec{a}^T = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4]$ — вектор-столбец произвольных постоянных.

Запишем выражение (2) и производные от него в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \nu \\ \nu' \\ \nu'' \\ \nu''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & e^{n \cdot x} & e^{-n \cdot x} \\ 0 & 1 & ne^{n \cdot x} & -ne^{-n \cdot x} \\ 0 & 0 & n^2 e^{n \cdot x} & n^2 e^{-n \cdot x} \\ 0 & 0 & n^3 e^{n \cdot x} & -n^3 e^{-n \cdot x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

Перемещения концевых сечений стержня, как и прежде будем характеризовать вектором

$$\vec{z} = [v_{н} \varphi_{н} v_{к} \varphi_{к}]^T, \tag{3}$$

где v и φ — прогиб (перемещение центра тяжести поперечного сечения перпендикулярное оси стержня) и угол поворота сечения соответственно, а индексы «н» и «к» показывают принадлежность обобщенного перемещения к «началу» и «концу» стержня.

Двойственным к вектору (3) будет вектор реакций концов стержня

$$\vec{r} = [r_{vн} \quad r_{\varphi н} r_{vк} \quad r_{\varphi к}]^T \tag{4}$$

Подставим координаты начала (x=0) и конца (x=l) стержня в выражение (2) и в первую производную от него

$$\vec{z}=\begin{bmatrix}\nu_{\text{н}}\\ \varphi_{\text{н}}\\ \nu_{\text{к}}\\ \varphi_{\text{к}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & n & -n\\ 1 & l & e^{n\cdot l} & e^{-n\cdot l}\\ 0 & 1 & n\cdot e^{n\cdot l} & -n\cdot e^{-n\cdot l}\end{bmatrix}\cdot\vec{a} \qquad (5)$$

или

$$\vec{z}=L\cdot\vec{a} \qquad (6)$$

где матрица L определяется выражением

$$L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & n & -n\\ 1 & l & e^{n\cdot l} & e^{-n\cdot l}\\ 0 & 1 & n\cdot e^{n\cdot l} & -n\cdot e^{-n\cdot l}\end{bmatrix}$$

Отсюда

$$\vec{a}=L^{-1}\cdot\vec{z} \qquad (7)$$

Используя известные дифференциальные зависимости внутренних усилий от перемещений

$$M=EJ\cdot\frac{d^2\nu}{dx^2}; \qquad Q=EJ\cdot\frac{d^3\nu}{dx^3}, \qquad (8)$$

запишем

$$\begin{bmatrix}Q\\ M\end{bmatrix}=EJ\cdot\begin{bmatrix}0 & 0 & n^3\cdot e^{n\cdot x} & -n^3\cdot e^{n\cdot x}\\ 0 & 0 & n^2\cdot e^{n\cdot x} & n^2\cdot e^{n\cdot x}\end{bmatrix}\cdot\vec{a} \qquad (9)$$

Подставляя в (9) координаты начала (x=0) и конца (x=l) стержня, получим значения поперечных сил и моментов в этих сечениях. Компоненты вектора $\vec{r}$ (4) можно выразить через эти усилия

$$\vec{r}=\begin{bmatrix}r_{\nu\text{н}}\\ r_{\varphi\text{н}}\\ r_{\nu\text{к}}\\ r_{\varphi\text{к}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{\text{н}}\\ -M_{\text{н}}\\ -Q_{\text{к}}\\ M_{\text{к}}\end{bmatrix}=EJ\cdot\begin{bmatrix}0 & 0 & n^3 & -n^3\\ 0 & 0 & -n^2 & -n^2\\ 0 & 0 & -n^3\cdot e^{n\cdot l} & n^3\cdot e^{n\cdot l}\\ 0 & 0 & n^2\cdot e^{n\cdot l} & n^2\cdot e^{n\cdot l}\end{bmatrix}\cdot\vec{a} \qquad (10)$$

или

$$\vec{r} = L_1 \cdot \vec{a} \tag{11}$$

Подставим (7) в (11)

$$\vec{r} = L_1 \cdot L^{-1} \cdot \vec{z} = r \cdot \vec{z} \tag{12}$$

где

$$\vec{r} = L_1 \cdot L^{-1} \tag{13}$$

изгибная матрица жёсткости стержня, записанная в местной системе координат.

Как было показано в [2] обращение и перемножение матриц в так называемом «символьном» виде приводит к весьма сложному для вычислений явному виду матрицы жесткости.

В связи с этим авторами было предложено получать матрицу жёсткости деформирующегося стержня численным методом. При этом матрица оборачивается численно с получением матрицы L^{-1}. Затем матрицы L^{-1} непосредственно умножается на матрицу L_1 слева. Таким образом вычисляется матрица жесткости стержня, позволяющая вести его деформационный расчет при растягивающей узловой нагрузке.

Библиографический список:

1. Евсеев А.Е., Евсеев И.А., Машин В.М. Методика построения матриц жёсткости по дифференциальному уравнению [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2021. №14. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no14/stroitelnaya-mehanika /14.4/at_download/file.

2. Евсеев А.Е., Евсеев И.А. Машин В.М. Построение матрицы жёсткости сжато-изогнутого стержня по дифференциальному уравнению [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2022. №15. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no15/stroitelnaya-mehanika/15.05/at_download/file.