УДК 531.64

К ВОПРОСУ О ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ ДЕФОРМАЦИИ УПРУГОГО ТЕЛА

Бакушев Сергей Васильевич

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Голиков Алексей Алексеевич

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

студент.

Аннотация

В данной работе, для различных случаев загружения упругих тел вычисляется как работа внешних сил, действующих на упругое тело, так и потенциальная энергия деформации упругого тела на основе удельной потенциальной энергии деформации. Рассмотрено два случая загружения упругого стержня продольной сосредоточенной силой и равномерно распределённой осевой нагрузкой. Показано, что в этом случае работа внешних сил точно совпадает с потенциальной энергией деформации упругого тела. Кроме того, рассмотрено ещё два случая загружения изгибаемого упругого стержня на двух опорах сосредоточенной силой и равномерно распределённой нагрузкой, приложенной на длине всего пролёта. Показано, что в случае сосредоточенной силы работа внешних сил точно совпадает с потенциальной энергией деформации упругого тела; в случае равномерно распределённой нагрузки работа внешних сил отличается от работы деформации, причём поправка за счёт сдвиговых деформаций составляет менее 0,0001%.Результаты исследований могут найти применение при построении решения задач механики деформируемого твёрдого тела на основе потенциальной энергии деформации.

Ключевые слова: упругий стержень, работа внешних сил, потенциальная энергия деформации.

ON THE QUESTION OF THE POTENTIAL DEFORMATION ENERGY OF AN ELASTIC BODY

Bakushev Sergey Vasilevich

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor of the department "Mechanics".

Golikov Aleksey Alekseevich

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

student.

Abstract

In this work, for various cases of loading elastic bodies, both the work of external forces acting on the elastic body and the potential deformation energy of the elastic body based on the specific potential deformation energy are calculated.Two cases of loading an elastic rod with longitudinal concentrated force and a uniformly distributed axial load are considered. It is shown that in this case the work of external forces exactly coincides with the potential deformation energy of the elastic body.In addition, two more cases of loading a bending elastic rod on two supports with a concentrated force and a uniformly distributed load applied at the length of the entire span are considered. It is shown that in the case of a concentrated force, the work of external forces exactly coincides with the potential deformation energy of the elastic body; in the case of a uniformly distributed load, the work of external forces is different from the work of deformation, and the correction due to shear deformations is less than 0.0001%.The results of the research can be used in the construction of solutions to the problems of mechanics of a deformable solid on the basis of the potential deformation energy.

Keywords: elastic rod, the work of external forces, potential strain energy.

Введение

Как известно, внешние силы, статически приложенные к деформируемому твёрдому телу, совершают работу на вызванных ими перемещениях. При этом в теле накапливается энергия деформации – потенциальная энергия. За счёт накопленной потенциальной энергии при снятии нагрузки восстанавливаются первоначальные размеры упругого тела.

В механике деформируемого твёрдого тела вводится понятие удельной потенциальной энергии. Под этим понимается энергия, отнесённая к единице первоначального (до деформации) объёма упругого тела. Вполне понятно, что удельная потенциальная энергия не зависит от размеров упругого тела и в случае трёхмерного напряжённого и деформированного состояния определяется по формуле:

$$W_0 = \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}\right) \qquad (1)$$

Располагая удельной потенциальной энергией деформации, можно вычислить потенциальную деформацию упругого тела объёмом V:

$$W = \int_v W_0 dV \qquad (2)$$

Следует отметить, что потенциальная энергия деформации упругого тела является фундаментальным понятием в механике деформируемого твёрдого тела [1, 2, 3] и широко используется как в построении теорий прочности при сложном напряжённом состоянии [4, 5, 6], так и при разработке вариационных методов расчёта упругих тел [7, 8, 9].

В данной работе, для различных случаев загружения упругих тел вычисляется как работа внешних сил, действующих на упругое тело, так и потенциальная энергия деформации упругого тела на основе удельной потенциальной энергии деформации.

Потенциальная энергия стержня при осевом деформировании.

I. Пусть на прямолинейный упругий стержень длиной l с поперечным сечением площадью A, выполненный из материала с модулем упругости E действует осевая сила F (рис. 1).

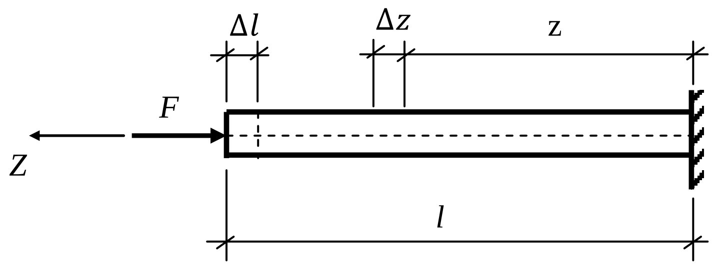

Рисунок 1 – Расчетная схема

При этом стержень деформируется упруго, и его длина изменяется на величину $\Delta l = \dfrac{N \cdot l}{E \cdot A}$. Работа силы F на перемещении Δl будет равна

$$W_F = \frac{1}{2} F \cdot \Delta l = \frac{N^2 \cdot l}{2E \cdot A} \tag{3}$$

Поскольку при осевом деформировании стержня отличные от нуля осевые напряжение $\sigma_z = \dfrac{N}{A}$ и деформация $\varepsilon_z = \dfrac{\Delta z}{z}$, то работа деформации будет равна:

$$W_\sigma = \int_v \frac{1}{2} \sigma_z \varepsilon_z dV = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N}{A} \frac{\Delta z}{z} A dz = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N}{z} \frac{Nz}{EA} dz = \frac{N^2 l}{2EA} \tag{4}$$

Таким образом, работа внешних сил при осевом деформировании прямолинейного стержня равна работе внутренних сил.

II. Пусть на прямолинейный упругий стержень длиной l с поперечным сечением площадью A, выполненный из материала с модулем упругости E действует осевая равномерно распределённая нагрузка интенсивности q (рис. 2).

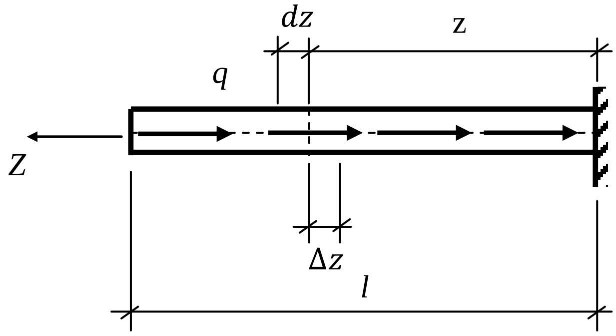

Рисунок 1 – Расчетная схема

При этом стержень деформируется, то есть изменится его длина. Внешние силы на соответствующих перемещениях совершат работу, величина которой будет равна:

$$W_F = \int_0^l dF \cdot \Delta z = \int_0^l q dz \cdot \frac{q(1-z)z}{EA} = \frac{q^2 l^3}{6EA} \tag{5}$$

Вычислим работу деформации:

$$W_\sigma = \int_v \frac{1}{2}\sigma_z \varepsilon_z dV = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N}{A}\frac{\Delta z}{z} A dz = \frac{1}{2}\int_0^l N \frac{\Delta z}{z} dz = \frac{1}{2}\int_0^l q(l-z)\frac{1}{z}\frac{q(l-z)z}{EA} dz = \frac{q^2 l^3}{6EA} \tag{6}$$

Таким образом и в этом случае работа внешних сил равна работе деформации.

Следует отметить, что вычисление работы внешних сил (формула (5)) выполнено без коэффициента $\frac{1}{2}$. Это связано с тем, что величина элементарной силы, вычисляемая как произведение интенсивности нагрузки на приращение координаты, является величиной пропорциональной приращению координаты, то есть можно полагать, что сила прикладывается не целиком, а постепенно, по мере увеличения приращения координаты.

Потенциальная энергия стержня при изгибе.

I. Рассмотрим прямолинейный упругий стержень на двух опорах длиной l с прямоугольным поперечным сечением площадью $A = bh$, выполненный из материала с модулем упругости E. На стержень в середине его длины действует поперечная сосредоточенная сила F (рис. 3).

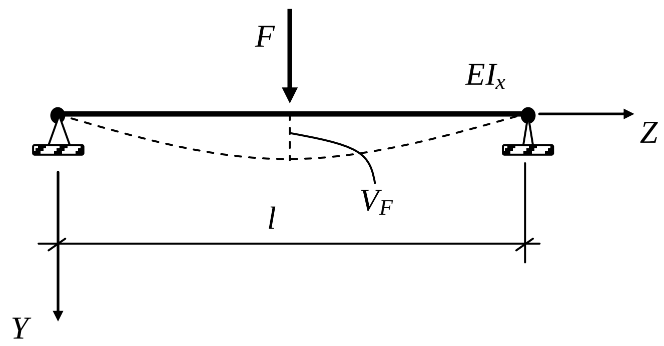

Рисунок 3 – Расчетная схема

Стержень находится в условиях плоского поперечного изгиба. Перемещение точки приложения силы равно $\nu_F = \dfrac{Fl^3}{48EI_x}$.

На перемещении ν_F внешняя сила F совершит работу

$$W_F = \frac{1}{2}F\nu_F = \frac{F^2 l^3}{96EI_x}. \qquad (7)$$

Потенциальная энергия деформации стержня будет равна:

$$W_\sigma = \int \frac{1}{2}\left(\sigma_z \varepsilon_z + \tau_{zy}\gamma_{zy}\right)dV. \qquad (8)$$

Здесь $\sigma_z = \dfrac{M_x}{I_x}y; \quad \tau_{zy} = \dfrac{Q_y S_x^{\text{отс}}}{I_x b}$,

причём

$$M_x = \frac{F}{2}z,\ 0 \le z \le \frac{l}{2};\ M_x = \frac{F}{2}z - F\left(z - \frac{l}{2}\right),\ \frac{l}{2} \le z \le l;$$

$$Q_y = \frac{F}{2},\ 0 \le z \le \frac{l}{2};\ Q_y = -\frac{F}{2},\ \frac{l}{2} \le z \le l;$$

$$I_x = \frac{bh^2}{12};\ S_x^{\text{отс}} = \left(\frac{h}{2} - y\right)b\left[y + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right)\right].$$

На основании обобщённого закона Гука получаем $\varepsilon_z = \dfrac{\sigma_z}{E}$; $\gamma_{yz} = \dfrac{\tau_{yz}}{G}$.

Принимая во внимание, что элемент площади поперечного сечения стержня $dA = b \cdot dy$, а элемент объёма $dV = A \cdot dz$, то есть $dV = dz \cdot \int_{-\frac{h}{1}}^{+\frac{h}{2}} bdy$, получаем выражение для потенциальной энергии деформации (8) в следующем виде:

$$W_\sigma = \int_0^l \frac{1}{2}\left(\sigma_z \varepsilon_z + \tau_{zy}\gamma_{zy}\right) \cdot dz \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} bdy. \tag{9}$$

Учитывая симметрию стержня относительно оси, совпадающей с вектором силы F, а также меняя порядок интегрирования, выражение (9) перепишем:

$$W_\sigma = \int_0^{\frac{l}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\sigma_z \varepsilon_z + \tau_{zy}\gamma_{zy}\right) bdydz \tag{10}$$

Далее получаем:

$$W_\sigma = \int_0^{\frac{l}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{\sigma_z{}^2}{E} + \frac{\tau_{zy}{}^2}{G}\right) bdydz =$$

$$= \int_0^{\frac{l}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{\sigma_z{}^2}{E}\right) bdydz + \int_0^{\frac{l}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{\tau_{zy}{}^2}{G}\right) bdydz =$$

$$= \int_0^{\frac{l}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{M_x{}^2}{EI_x^2} y^2\right) bdydz + \int_0^{\frac{l}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{Q_y{}^2 \left(S_{\text{х}}^{\text{отс}}\right)^2}{GI_x^2 b^2}\right) bdydz =$$

$$= \frac{b}{EI_x^2} \int_0^{\frac{l}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{F^2 z^2}{4} y^2\right) dydz + \frac{1}{GI_x^2 b} \int_0^{\frac{l}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{F^2 \left(S_{\text{х}}^{\text{отс}}\right)^2}{4}\right) dydz =$$

$$= \frac{F^2 b}{4EI_x^2} \int_0^{\frac{l}{2}} z^2 dz \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dy + \frac{F^2}{4GI_x^2 b} \int_0^{\frac{l}{2}} \left(S_{\text{х}}^{\text{отс}}\right)^2 dy \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dz =$$

$$= \frac{F^2 l^3}{96EI_x} + 0 = \frac{F^2 l^3}{96EI_x} \tag{11}$$

И в этом случае, при изгибе упругого стержня на двух опорах сосредоточенной силой, работа внешних сил равна работе деформации, причём работа деформации сдвига равна нулю.

II. Пусть прямолинейный упругий стержень на двух опорах длиной l с прямоугольным поперечным сечением площадью $A=bh$, выполненный из материала с модулем упругости E, загружен равномерно распределённой нагрузкой q по всей длине пролёта (рис. 4).

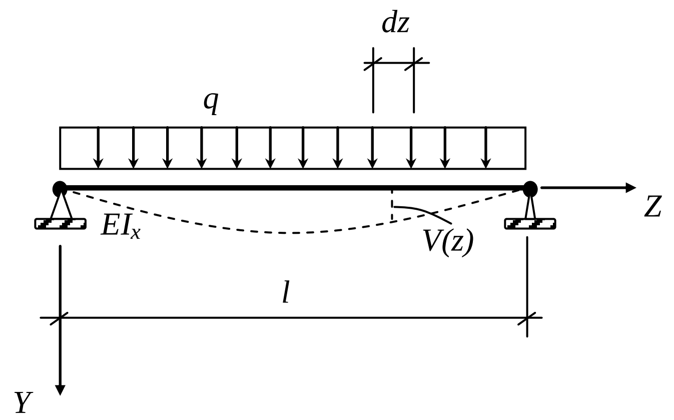

Рисунок 4 – Расчетная схема

Стержень находится в условиях плоского поперечного изгиба. Изогнутая ось стержня описывается уравнением

$$\nu(z) = -\frac{ql^3 z}{24EI_x} + \frac{qlz^3}{12EI_x} - \frac{qz^4}{24EI_x} \qquad (12)$$

На перемещениях (12) внешняя нагрузка совершает работу:

$$W_F = \frac{1}{2}\int_0^l q\cdot\nu(z)dz = \frac{q^2}{24EI_x}\int_0^l\left(-\frac{1}{2}l^3 z + lz^3 - \frac{1}{2}z^4\right)dz = \frac{q^2 l^5}{240EI_x} \qquad (13)$$

Потенциальная энергия деформации стержня будет определяться по формуле (8), причём

$$M_x = \frac{qlz}{2} - \frac{qz^2}{2};\ Q_y = \frac{ql}{2} - qz$$

Таким образом,

$$W_\sigma = \frac{1}{2}\int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{{M_x}^2}{EI_x^2} y^2 \right) b dy dz + \frac{1}{2}\int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{{Q_y}^2 \left(S_{\text{x}}^{\text{отс}}\right)^2}{GI_x^2 b^2} \right) b dy dz =$$

$$= \frac{b}{2EI_x^2}\int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{qlz}{2} - \frac{qz^2}{2} \right) y^2 dy dz + \frac{1}{2GI_x^2 b}\int_0^l \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{ql}{2} - qz \right)^2 \left(S_x^{\text{отс}}\right)^2 dy dz =$$

$$= \frac{q^2 b}{8EI_x^2}\int_0^l \left(lz - z^2\right)^2 dz \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dy + \frac{q^2}{2GI_x^2 b}\int_0^l \left(\frac{1}{2} - z \right)^2 dz \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(S_x^{\text{отс}}\right)^2 dy =$$

$$= \frac{q^2 l^5}{240 EI_x} + \frac{q^2 l^3}{24 GI_x^2 b}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(S_x^{\text{отс}}\right)^2 dy =$$

$$= \frac{q^2 l^5}{240 EI_x} + \frac{q^2 l^3}{24 GI_x^2 b}\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left\{ \left(\frac{h}{2} - y \right) b \left[y + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y \right) \right] \right\}^2 dy =$$

$$= \frac{q^2 l^5}{240 EI_x} \left(1 - \frac{h^2 (1+\mu)}{2l^2} \right). \qquad (14)$$

Этот результат говорит о том, что при изгибе упругого стержня на двух опорах равномерно распределённой нагрузкой, работа внешних сил отличается от работы деформации, причём поправка за счёт сдвиговых деформаций составляет менее 0,0001%.

Выводы

Вычисления потенциальной энергии деформации упругого тела на основе удельной потенциальной энергии показывают, что потенциальная энергия деформации упругого тела может незначительно отличаться от работы внешних сил на соответствующих перемещениях, что, возможно, связано с неучтёнными факторами в напряжённо-деформированном состоянии упругого тела.

Результаты исследований могут найти применение при построении решения задач механики деформируемого твёрдого тела на основе потенциальной энергии деформации.

Библиографический список:

1. Новожилов В.В. Теория упругости. Судпромгиз, 1958. 370с.
2. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 939с.
3. Александров А.В., Потапов В.Д. Основы теории упругости и пластичности. 2-е изд. М.: Высшая школа, 2002. 400 с.: ил.
4. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов. И.И. Гольденблатт, В.А. Копнов. Машиностроение, 1968. 192 стр.
5. Филин А.П. Прикладная механика твёрдого деформируемого тела, т.1. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва "Наука", 1975. 832 с.
6. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твёрдого тела. - Учеб. пособие для вузов. - 2-е. изд., испр. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 712 с.
7. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 428 с.
8. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 541 с.
9. Розин Л.Ф. Метод конечных элементов в применении к упругим системам. М.: Стройиздат, 1977. 128 с.