

УДК 624.046.2

РАСЧЁТ ИЗГИБАЕМОГО СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ ИЗ УСЛОВИЯ ПРОЧНОСТИ И ЖЁСТКОСТИ

Бакушев Сергей Васильевич,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Лощинин Николай Александрович,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

студент.

Аннотация

Статья посвящена сравнительному упругому расчёту двух изгибаемых консольных стержней длинами l переменного поперечного сечения из условия прочности и жёсткости. У первого стержня верхняя грань горизонтальна, нижняя – прямолинейна и наклонена к горизонту. У второго стержня верхняя грань прямолинейна, а нижняя представляет собой отрезок параболы. Сечение стержней принято прямоугольным, с размерами $b = const$ и $h = h(z)$. Высота сечения на конце консоли $h(0) = h_0$, высота сечения в заделке $h(l) = h_k$. На стержень действует сосредоточенная сила F , вертикально приложенная на конце консоли. Результаты исследований могут найти применение при проектировании консольных стержней переменного поперечного сечения.

Ключевые слова: упругий стержень, переменное поперечное сечение, расчёт из условия прочности и жёсткости.

CALCULATION OF THE BENDABLE ROD OF VARIABLE CROSS-SECTION FROM THE CONDITIONS OF STRENGTH AND RIGIDITY

Bakushev Sergey Vasilevich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor of the department "Mechanics".

Loshchinin Nikolay Aleksandrovich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

student.

Abstract

The article is devoted to the comparative elastic calculation of two bendable cantilever rods with variable cross-sectional lengths l from the conditions of strength and stiffness. At the first rod, the upper face is horizontal, the lower one is rectilinear and inclined to the horizon. In the second rod, the upper face is rectilinear, and the lower one is a segment of the parabola. The cross-section of the rods is assumed to be rectangular, with dimensions $b = const$ and $h = h(z)$. Cross-section height at the end of $h(0) = h_0$ the console, cross-section height in seal $h(l) = h_k$. The rod is affected by a concentrated force F vertically applied at the end of the console. The results of the research can be used in the design of cantilever rods of variable cross-section.

Keywords: elastic rod, variable cross-section, calculation from strength and stiffness conditions

Введение.

Строительные конструкции, в состав которых входят стержни с изменяемой геометрией, в частности, с непрерывно переменным поперечным сечением, либо криволинейной осью, отличаются повышенным изяществом, что придаёт конструкции привлекательный внешний вид и эстетичность. Вместе с тем, прочностной и деформационный расчёт таких стержней, как показывает практика проектирования, отличается повышенной сложностью. Ввиду этого, разработка практических методов и методик расчёта стержней с

изменяемой геометрией является актуальной и востребованной в проектных организациях. Следует отметить некоторые научные работы, посвящённые прочностному и деформационному расчёту стержней с изменяемой геометрией. В работе [1] исследуется напряженно-деформированное состояние стержней, изгибная жесткость которых изменяется по степенной зависимости. Решение дифференциального уравнения продольно-поперечного изгиба стержня получено в аналитическом виде с использованием функций Бесселя и Ломмеля. В статье [2] приводятся точные решения уравнения, описывающего поперечные колебания стержня с переменным поперечным сечением. В работе [3] представлен метод, позволяющий численно найти собственные частоты продольных колебаний упругого стержня с переменным сечением. Данный метод основан на представлении площади сечения в виде экспоненциальной функции от полинома степени n . В статье [4] рассматриваются собственные поперечные колебания прямого стержня с поперечным сечением прямоугольной формы, имеющим постоянную высоту и переменную ширину, изменяющуюся по экспоненциальному закону. В работе [5] предложен алгоритм расчёта плоских стержневых систем постоянного по длине поперечного сечения с переменным модулем упругости методом конечных элементов. В статье [6] рассматривается задача о собственных частотах продольных колебаний стержня, модуль Юнга, плотность и площадь поперечного сечения которого являются функциями продольной координаты. В работе [7] рассматривается распространение упругопластических волн деформаций в стержнях переменного сечения. В статье [8] даётся оценка прочности и жёсткости стоек переменного сечения. В работах [9]-[11] рассматриваются вопросы изгиба стержней переменного сечения.

Расчёт первого стержня из условия прочности.

Пусть нижняя грань упругого стержня (рис. 1) описывается уравнением

$$y(z) = mz + n. \quad (1)$$

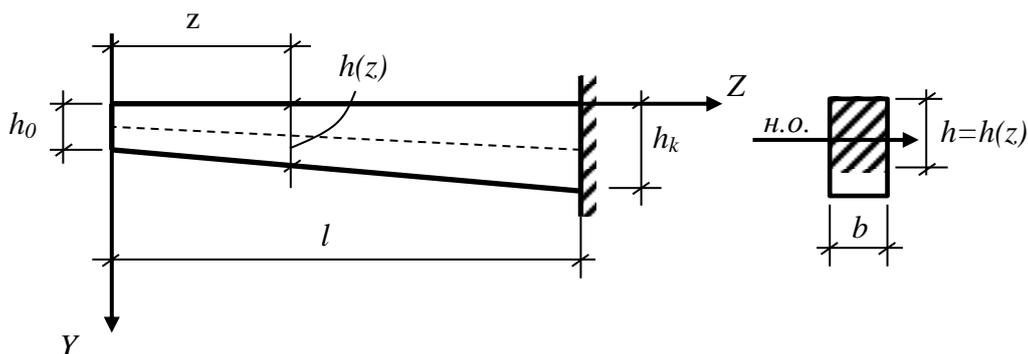


Рисунок 1 – Расчетная схема

Исходя из условий, что при $z = 0$ и $z = l$ высоты поперечного сечения равны соответственно h_0 и h_k , получаем уравнение нижней грани стержня:

$$y(z) = \frac{h_k - h_0}{l} z + h_0. \quad (2)$$

Следовательно, переменная высота сечения первого стержня будет равна:

$$h_1(z) = y(z). \quad (3)$$

Учитывая прямоугольную форму поперечного сечения, найдём момент инерции сечения относительно нейтральной оси:

$$I_{\text{н.о.}}(z) = \frac{b \cdot h_1(z)^3}{12} = \frac{b}{12} \left(\frac{h_k - h_0}{l} z + h_0 \right)^3. \quad (4)$$

Условие прочности стержня переменного сечения имеет вид:

$$\sigma_z^{\max} = \frac{M_x(z)}{I_{\text{н.о.}}(z)} \frac{h_1(z)}{2} \leq R_{\sigma} \gamma_c. \quad (5)$$

В работах [9]-[11] показано, что в стержнях переменного сечения эпюра нормальных напряжений в фибровых волокнах не соответствует эпюре изгибающих моментов, то есть ордината с максимальным значением нормального напряжения не соответствует ординате с максимальным изгибающим моментом.

Требуемую высоту поперечного сечения стержня в заделке найдём методом итераций. Первоначально, из условия прочности (5) найдём требуемую высоту поперечного сечения в заделке на первой итерации:

$$h_k^{(1)} \geq \sqrt{\frac{6Fl}{bR_\sigma\gamma_c}}. \quad (6)$$

Для исходных данных $F = 20$ кН; $l = 6$ м; $b = 0,2$ м; $R_\sigma = 200$ МПа; $\gamma_c = 0,9$ получаем $h_k^{(1)} = 0,2$ м.

Зная высоту поперечного сечения в заделке, строим эпюру нормальных напряжений в фибровых волокнах стержня

$$\sigma_z(z) = \frac{6F \cdot z}{b \left(\frac{h_k^{(1)} - h_0}{l} z + h_0 \right)^2} \quad (7)$$

и определяем ординату, соответствующую максимальным нормальным напряжениям z_m . По ординате z_m определяем высоту поперечного сечения с максимальным нормальным напряжением:

$$h(z_m) = \frac{h_k^{(1)} - h_0}{l} z_m + h_0. \quad (8)$$

Далее уточняем высоту поперечного сечения в заделке:

$$h_k^{(2)} = h_0 + \frac{h(z_m) - h_0}{z_m} l. \quad (9)$$

Затем переходим ко второй итерации и уточняем по значению $h_k^{(2)}$ эпюру нормальных напряжений (формула (7)) и высоту поперечного сечения (формула (8)). Итерационный процесс продолжаем до тех пор, пока не будет выполнено условия окончания итерационного процесса:

$$h_k^{(s-1)} - h_k^{(s)} \leq \varepsilon = 0,001. \quad (10)$$

В нашей задаче графиком функции $\sigma_z(z)$ в верхних фибровых волокнах стержня является монотонно возрастающая прямая, не имеющая на интервале $0 \leq z \leq l$ экстремумов (рис. 2):

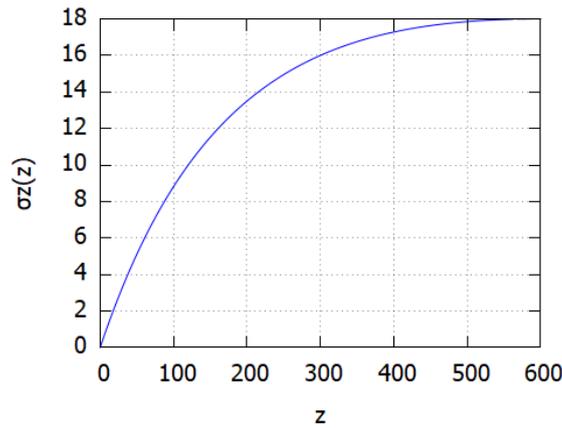


Рисунок 2 – График функции $\sigma_z(z)$

Следовательно, исключая итерационный процесс, принимаем $h_k^{(1)} = 0,2$ м.

Распределение касательных напряжений по высоте переменного сечения найдём на основании [12]:

$$\tau_{zy}(z, y) = \frac{Q_y S_{H.O.}^{OTC}}{I_{H.O.}} + \frac{M_x}{b} \frac{d}{dz} \left(\frac{S_{H.O.}^{OTC}}{I_{H.O.}} \right) + \frac{N}{b} \frac{d}{dz} \left(\frac{A^{OTC}}{A} \right). \quad (11)$$

В формуле (11) $N = 0$; $Q_y = F$ кроме того (см. рис. 3)

$$S_{H.O.}^{OTC}(z, y) = A^{OTC} y_c = b \left[\frac{1}{2} h l(z) - y \right] \left\{ y + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} h l(z) - y \right] \right\}. \quad (12)$$

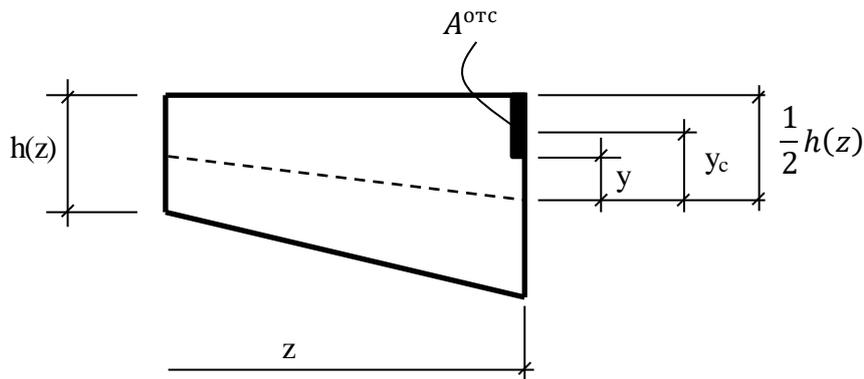


Рисунок 3 – К определению $S_{H.O.}^{OTC}(z, y)$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{S_{H.O.}^{OTC}}{I_{H.O.}} \right) = \frac{I_{H.O.} \frac{d}{dz} (S_{H.O.}^{OTC}) - S_{H.O.}^{OTC} \frac{d}{dz} (I_{H.O.})}{I_{H.O.}^2}$$

$$\text{Далее } \frac{d}{dz} \left(\frac{S_{\text{H.O.}}^{\text{OTC}}}{I_{\text{H.O.}}} \right) = \frac{I_{\text{H.O.}} \cdot \frac{d}{dz} (S_{\text{H.O.}}^{\text{OTC}}) - S_{\text{H.O.}}^{\text{OTC}} \cdot \frac{d}{dz} (I_{\text{H.O.}})}{I_{\text{H.O.}}^2}, \quad (13)$$

причём

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} (S_{\text{H.O.}}^{\text{OTC}}) &= b \left[\frac{1}{2} h l(z) - y \right] \frac{1}{4} \frac{d}{dz} (h l(z)) + b \left\{ y + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} h l(z) - y \right] \right\} \cdot \\ \cdot \frac{1}{2} \frac{d}{dz} (h l(z)) &= \frac{1}{2} b \frac{d}{dz} (h l(z)) \left\langle \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} h l(z) - y \right] + \left\{ y + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} h l(z) - y \right] \right\} \right\rangle \end{aligned}; \quad (14)$$

$$\frac{d}{dz} (I_{\text{H.O.}}) = \frac{b \cdot h l(z)^2}{4} \cdot \frac{d}{dz} h l(z); \quad (15)$$

$$\frac{d}{dz} h l(z) = \frac{h_k - h_0}{l}. \quad (16)$$

Значение касательного напряжения τ_{zy} в заделке при $z = l$ в верхних при $y = -\frac{h_k}{2}$ и нижних при $y = +\frac{h_k}{2}$ волокнах, и на уровне нейтральной оси при

$$y = 0, \quad \text{будет равно: } \tau_{zy} \left(l, -\frac{h_k}{2} \right) = -1,5 \text{ МПа; } \tau_{zy} \left(l, +\frac{h_k}{2} \right) = -1,5 \text{ МПа;}$$

$$\tau_{zy}(l, 0) = 15,75 \text{ МПа}$$

Расчёт второго стержня из условия прочности.

Пусть уравнение нижней грани упругого стержня, описываемой параболой, имеет вид:

$$z(y) = qy^2 + ty + n. \quad (17)$$

Для определения коэффициентов q , t и n имеем условия:

- при $z = 0$, $y = h_0$; то есть $0 = qh_0^2 + mh_0 + n$;
- при $z = \frac{1}{2}l$, $y = kh_0$; то есть $\frac{1}{2}l = qk^2h_0^2 + mkh_0 + n$;
- при $z = l$, $y = h_k$; то есть $l = qh_k^2 + mh_k + n$.

Решая полученную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов q , t и n методом Крамера, получаем:

$$\begin{aligned}
q &= \frac{\left(k - \frac{1}{2}\right)h_0l - \frac{1}{2}h_kl}{(1-k^2)h_0^2h_k + (k-1)h_0h_k^2 + k(k-1)h_0^3}; \\
m &= \frac{\left(\frac{1}{2} - k^2\right)h_0^2l + \frac{1}{2}h_k^2l}{(1-k^2)h_0^2h_k + (k-1)h_0h_k^2 + k(k-1)h_0^3}; \\
n &= \frac{k(k-1)h_0^3l + \frac{1}{2}h_0^2h_kl - \frac{1}{2}h_0h_k^2l}{(1-k^2)h_0^2h_k + (k-1)h_0h_k^2 + k(k-1)h_0^3}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Из уравнения (17) находим высоту поперечного сечения второго стержня:

$$h2(z) = y(z) = \frac{-m + \sqrt{m^2 - 4q(n-z)}}{2q}. \tag{19}$$

Момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси будет определяться соотношением:

$$I_{\text{н.о.}}(z) = \frac{b \cdot h2(z)^3}{12} = \frac{b}{12} \left[\frac{-m + \sqrt{m^2 - 4q(n-z)}}{2q} \right]^3. \tag{20}$$

Прочность поперечного сечения второго стержня оценим в заделке по формуле:

$$\sigma_z(l) = \frac{M_x(l)}{I_{\text{н.о.}}(l)} \frac{h2(l)}{2} = \frac{6Fl}{b \cdot h2(l)^2} \leq R_\sigma \gamma_c. \tag{21}$$

Для исходных данных – $F = 20$ кН; $l = 6$ м; $b = 0,2$ м; $R_\sigma = 200$ МПа; $\gamma_c = 0,9$; $h_0 = 0,1$ м; $h_k^{(1)} = 0,2$ м; $k = 1,3$ прочность обеспечена с запасом 0,0%.

Для оценки касательных напряжений в поперечном сечении второго стержня воспользуемся соотношениями (11) – (15) в которых функцию $h1(z)$ заменим на $h2(z)$. И, кроме того,

$$\frac{d}{dz} h2(z) = \frac{1}{\sqrt{m^2 - 4q(n-z)}}. \tag{22}$$

Значение касательного напряжения τ_{zy} в заделке при $z = l$ в верхних при $y = -\frac{h_k}{2}$ и нижних при $y = +\frac{h_k}{2}$ волокнах, и на уровне нейтральной оси при

$$y = 0, \quad \text{будет равно:} \quad \tau_{zy}\left(l, -\frac{h_k}{2}\right) = -31,5 \quad \text{Мпа;} \quad \tau_{zy}\left(l, +\frac{h_k}{2}\right) = -31,5 \quad \text{Мпа;}$$

$$\tau_{zy}(l, 0) = 30,75 \text{ МПа}$$

Оценка жёсткости стержней.

Оценку жёсткости рассматриваемых стержней будем выполнять по прогибу свободного конца консоли. Причём, прогиб конца консоли стержня будем определять методом Максвелла-Мора [13]:

$$v(0) = \sum \int \frac{M_{np} M_1}{EI_{H.O.}(z)} dz, \quad (23)$$

где $M_{np} = M_p \frac{I_{H.O.}(l)}{I_{H.O.}(z)}$ – приведённый изгибающий момент.

Эпюры приведённого изгибающего момента имеют сугубо нелинейный вид и показаны на рис. 4: на левом рисунке показана эпюра приведённого изгибающего момента первого стержня; на правом рисунке показана эпюра приведённого изгибающего момента второго стержня. Ввиду этого, для вычисления интеграла (23) метод Верещагина исключается.

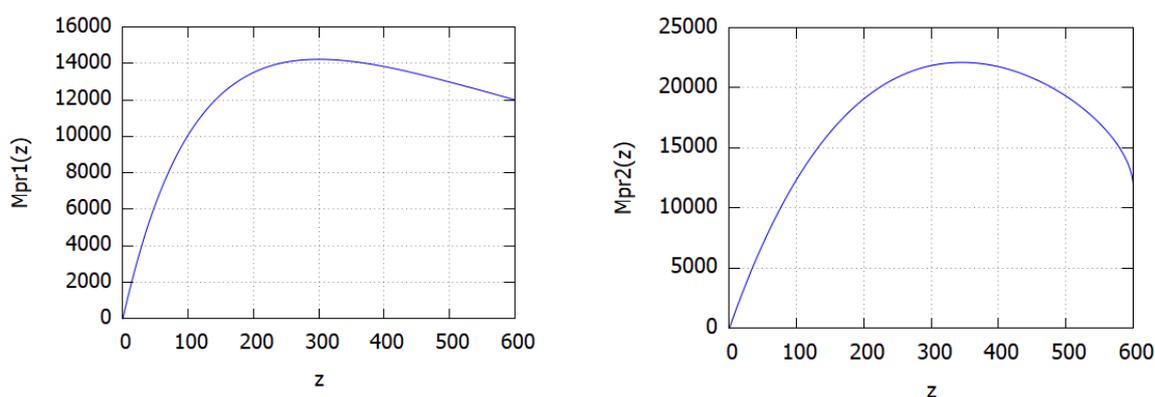


Рисунок 4 – Эпюры изгибающих моментов

Непосредственные вычисления по формуле (23) дают прогиб конца консоли:

$$v_1(0) = 17,66 \text{ см} \text{ – у первого стержня;}$$

$$v_2(0) = 25,71 \text{ см} \text{ – у второго стержня.}$$

Выводы.

Сравнительный анализ расчёта двух упругих консольных стержней с непрерывно переменным поперечным сечением, верхняя сторона у которых горизонтальна, а нижняя у первого стержня описывается прямой линией, наклонённой к горизонту, а у второго стержня описывается параболой, причём поперечное сечение имеет прямоугольную форму с одинаковой шириной и одинаковыми вертикальными размерами сечения в заделке и на конце консоли, показывает следующее:

1. Условие прочности по нормальным напряжениям в наиболее нагруженном сечении (в заделке) у обоих стержней выполняется точно; запас прочности составляет 0,0%.

2. Касательные напряжения в верхнем, нижнем и среднем волокнах в заделке у первого и второго стержней существенно различаются: у второго стержня касательные напряжения значительно выше.

3. Расчёт перемещений конца консоли показывает, что жёсткость второго стержня существенно ниже жёсткости первого стержня.

Результаты исследований могут найти применение при решении задач расчёта стержней с непрерывно переменным сечением из условия прочности и жёсткости.

Библиографический список:

1. Царенко С.Н. Продольно-поперечный изгиб стержней переменной жесткости // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2016. № 1 (685). С. 5-13.

2. Павлов В.П., Нусратуллина Л.Р. Точные решения уравнения, описывающего поперечные колебания стержня с переменным поперечным сечением и их применение // Вестник Башкирского университета. 2019. Т. 24. № 4. С. 774-781.

3. Утяшев И.М. Продольные колебания стержня с переменным сечением // Многофазные системы. 2019. Т. 14. № 2. С. 138-141.

4. Павлов В.П. Поперечные колебания стержня с переменным поперечным сечением и вычисление его собственных частот методом сплайнов // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2017. Т. 21. № 2 (76). С. 3-16.

5. Тухфатуллин Б.А., Путеева Л.Е., Красина Ф.А. Расчёт плоских стержневых систем с переменным по длине модулем упругости методом конечных элементов в форме смешанного метода // Инженерный вестник Дона. 2018. № 3 (50). С. 117.

6. Горбачёв В.И. О собственных частотах продольных колебаний неоднородного стержня с переменным поперечным сечением // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2016. № 1. С. 31-39.

7. Бакушев С.В. Упругопластические волны деформаций в стержнях переменного сечения // Строительная механика и расчет сооружений. 2021. № 3 (296). С. 46-53.

8. Бакушев С.В., Зарипова Г.М. Оценка прочности и жёсткости стоек переменного сечения // Актуальные проблемы механики в современном строительстве [Текст]: сб. науч. статей. Международ. науч.-техн. конф. – Пенза: ПГУАС, 2014. С. 10-21.

9. Бакушев С.В., Зарипова Г.М. К вопросу о расчёте стержней переменного сечения, работающих на изгиб // Актуальные проблемы механики в современном строительстве [Текст]: Материалы III Международ. науч.-техн. конф. – Пенза: ПГУАС, 2014. С. 4-9.

10. Бакушев С.В., Зарипова Г.М. К вопросу об изгибе стержня переменного сечения // Актуальные проблемы механики в современном строительстве [Текст]: Материалы III Международ. науч.-техн. конф. – Пенза: ПГУАС, 2014. С. 9-21.

11. Бакушев С.В., Зарипова Г.М. К вопросу о построении центральной линии в стержне переменного сечения. // Электронный журнал «Моделирование и механика конструкций». №2. 2015.

12. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов / А.В.Александров, В.Д.Потапов, Б.П.Державин; Под ред. А.В.Александрова. – 3-е изд. испр. – М.: Высш. Шк., 2003. 560 с.: ил.

13. Сопротивление материалов: Учебник для вузов / Под общ. Ред. Акад. АН УССР Г.С. Писаренко. – 4-е изд., перераб. и доп. – Киев: Вища школа. Головне изд-во, 1979. 696 с.