

УДК 519.633

**АЛГОРИТМ РАСЧЁТА НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО  
СОСТОЯНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В УСЛОВИЯХ  
ЦЕНТРАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ, ПРИ  
БИЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ЗАМЫКАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ**

*Бакушев Сергей Васильевич,*

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,  
г. Пенза,*

*доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».*

**Аннотация**

*Постановка задачи.* Цель исследования – сформулировать алгоритм определения напряжённо-деформированного состояния сплошной среды, механическое поведение которой и в отношении сдвиговых, и в отношении объёмных деформаций описывается произвольными нелинейными законами, аппроксимированными билинейными функциями. Сплошная среда находится в условиях центрально-симметричного деформирования. Математическая модель сплошной среды описывается как с учётом, так и без учёта геометрической нелинейности (в смысле В.В. Новожилова). Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды, находящейся в условиях центрально-симметричного деформирования, принимаются в перемещениях.

*Результаты.* Построение алгоритма расчёта напряжённо-деформированного состояния сплошной среды для разрывных функций объёмного и сдвигового деформирования основано на выявлении возможного положения сферических поверхностей излома объёмных и сдвиговых деформаций. Для участков вне поверхностей излома объёмных и сдвиговых деформаций определение напряжённо-деформированного состояния сплошной среды предполагается выполнять любым известным методом расчёта: методом конечных разностей, методом конечных элементов и так далее.

*Выводы.* Значимость разработанного алгоритма для строительной области состоит в том, что алгоритм решения задачи, может найти применение при определении напряжённо-деформированного состояния сплошных сред и элементов строительных и машиностроительных конструкций, находящихся в условиях центрально-симметричного деформирования и описываемых математическими моделями как с учётом, так и без учёта геометрической нелинейности, замыкающие уравнения физических соотношений для которых, построенные на основе экспериментальных данных, аппроксимированы билинейными функциями как в отношении объёмных, так и в отношении сдвиговых деформаций.

**Ключевые слова:** алгоритм, сплошная среда, центрально-симметричная деформация, билинейная аппроксимация, геометрическая линейность, геометрическая нелинейность.

## **CALCULATION ALGORITHM OF THE STRESS-DEFORMED STATE OF CONTINUOUS MEDIUM UNDER CENTRAL-SYMMETRIC DEFORMATION AT BILINEAR APPROXIMATION OF CLOSING EQUATIONS**

*Bakushev Sergey Vasilevich,*

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,*

*Doctor of Sciences, Professor of the department "Mechanics".*

### **Abstract**

*Problem statement.* The aim of this study is to formulate an algorithm for determining the stress-strain state of continuous medium, the mechanical behavior of which regarding both to shear and volumetric deformations is described by arbitrary nonlinear rules, approximated by bilinear functions. The continuous medium is under conditions of centrally symmetric deformation. The mathematical model of continuous medium is described both regarding and regardless to geometric nonlinearity (according to V.V. Novozhilov). Differential equations of equilibrium of

continuous medium under conditions of centrally symmetric deformation are considered in displacements.

*Results.* The construction of an algorithm for calculating stress-strain state of continuous medium for discontinuous functions of volumetric and shear deformation is based on identifying of the possible position of spherical fracture surfaces of volume and shear deformations. For areas outside fracture surfaces of volumetric and shear deformations, the determination of the stress-strain state of continuous medium is supposed to be performed by any known calculation method: method of finite differences, method of finite elements etc.

*Conclusions.* The significance of the developed algorithm for the construction industry lies in the fact that the algorithm for problem solving can be applied in determining the stress-strain state of continuous media and elements of building and machine-building structures under conditions of centrally symmetric deformation, described by mathematical models both regarding and regardless geometric nonlinearity, closing equations of physical relations for which, constructed on the basis of experimental data, are approximated by bilinear functions with respect to both volumetric and shear deformations.

**Keywords:** algorithm, continuous medium, centrally symmetric deformation, bilinear approximation, geometric linearity, geometric nonlinearity.

## **Введение.**

Несмотря на внешне упрощённую модель сплошной среды, находящуюся в условиях центрально-симметричного деформирования (одноосное напряжённо-деформированное состояние), а также неочевидное практическое использование тел и конструкций со сферической симметрией, задачи, связанные с определением напряжённого и деформированного состояний массивов со сферическими полостями, тел шаровой формы, а также вопросы распространения сферически-симметричных волн деформаций в массивах от действия интенсивных нагрузок, и так далее, продолжают вызывать определённый интерес у исследователей. Так, в работе [1] рассматривается

тепловое напряженное состояние массива горных пород со сферической полостью, полученной в результате взрыва, с учетом неоднородности окружающей среды. В статье [2] представлена расширенная энергетическая модель зависимости объёма сферической полости в глинистых грунтах от массы взрывчатого вещества, обеспечивающая более точное математическое описание динамического процесса. В работе [3] рассматривается конформное конечно-разностное моделирование распространения волн георадара в подземной структуре на примере сложных геоцентрических моделей: наклонных слоистых сред, сферических сред и трехслойной модели дорожного покрытия со структурными повреждениями. В статье [4] представлено численное моделирование взрывных нагрузок от наземных взрывов сферических и полусферических форм взрывчатых веществ в воздухе. Исследования показывают, что результаты моделирования могут быть применены и в геотехнической деятельности. В работе [5] методом конечно-элементного предельного анализа исследуется недринированная устойчивость сферической полости в глинистых грунтах. В статье [6] посредством теоретического исследования и численного моделирования выполнен анализ влияния компонент девиаторных и сферических напряжений на устойчивость окружающих пород дорожного полотна. В работе [7] рассматривается новый метод, сочетающий геофизику и радиофизику, для проведения сейсмического мониторинга и обнаружения сложных электрических структур на глубине до 10 м под землёй. В статьях [8, 9, 10] рассматривается применение аппарата шаровых векторов в задачах механики, обладающих сферической симметрией. Показано, что аппарат шаровых векторов позволяет найти аналитическое решение расчётных уравнений или значительно упростить их численное решение. В работе [11] исследуется эволюционная задача для самонапряжённых слоистых гиперупругих сферических тел – полых упругих шаров, напряжённо-деформированное состояние которых характеризуется несовместными локальными конечными деформациями, возникающими из-за геометрической несогласованности ненапряжённых форм отдельных слоёв друг

с другом. В статье [12] на примере толстостенного полого шара в рамках деформационной теории Девиса-Надаи решена задача об образовании в теле шара новой поры, показана невозможность её полного исчезновения под действием внешнего давления, произведена оценка критической нагрузки порообразования. В работе [13] в рамках линейной механики растущих тел построена математическая модель аддитивного формирования твёрдых тел шаровой формы за счёт всестороннего притока дополнительного вещества к его поверхности в произвольном нестационарном центрально-симметричном силовом поле. В статьях [14, 15] предложена модель больших упругоползучих деформаций, опробованная на сферически симметричном деформировании полого шара в процессе установившейся ползучести.

В основе деформационного и прочностного расчёта массивных тел, элементов строительных и машиностроительных конструкций лежат физические уравнения, в состав которых входят замыкающие соотношения, определяемые видом диаграмм объёмного и сдвигового деформирования и составляющие математическую модель рассматриваемого механического процесса. Чем точнее диаграммы объёмного и сдвигового деформирования отражают действительную работу материала сплошной среды, тем точнее расчёт. Однако, сложность физических и механических процессов при деформации реальных тел обуславливает и сложность диаграмм объёмного и сдвигового деформирования, что приводит в конце концов к чрезвычайно сложным расчётным дифференциальным уравнениям и, следовательно, к невозможности аналитического решения, либо анализа численного решения. Ввиду этого математическую модель механического процесса при деформации упрощают. Классическим упрощением является линейный закон Р. Гука. В ряде работ автора упрощение диаграмм объёмного и сдвигового деформирования выполнено посредством билинейной [16] и биквадратичной [17] аппроксимации. При этом получены разрешающие дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для характерных случаев деформации

сплошной среды как с учётом, так и без учёта геометрической нелинейности (в смысле В.В. Новожилова) [18].

В данной работе формулируется алгоритм решения задачи об определении напряжённо-деформированного состояния сплошной среды, находящейся в условиях центрально-симметричного деформирования  $u_R = u(R)$ ,  $u_\varphi = 0$ ,  $u_\theta = 0$ , механическое поведение которой и в части объёмных деформаций, и в части сдвиговых деформаций описывается произвольными нелинейными законами, аппроксимированными билинейными функциями (рис. 1).

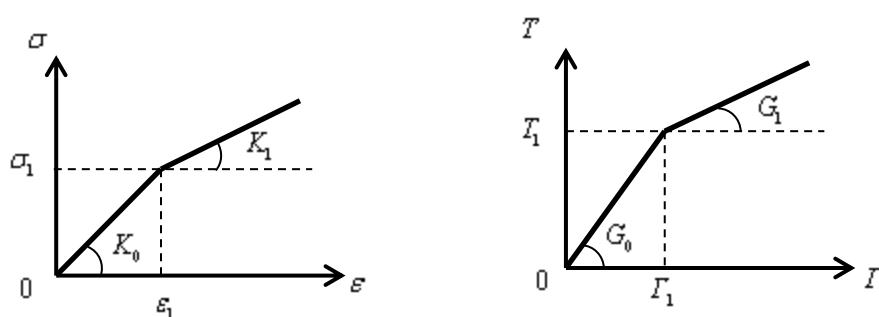


Рисунок 1 – Диаграммы объёмного  $\sigma \approx \varepsilon$  и сдвигового  $T \approx \Gamma$  деформирования

### Материалы и методы.

Разрешающие физические и дифференциальные уравнения для сплошной среды, находящейся в условиях центрально-симметричного деформирования, как без учёта, так и с учётом геометрической нелинейности, при билинейной аппроксимации графиков диаграмм объёмного и сдвигового деформирования, приведены в работе [18].

На рис. 1 обозначено:  $K_0$  – начальный модуль объёмного расширения (сжатия);  $G_0$  – начальный модуль сдвига;  $K_1$  – модуль упрочнения при объёмном расширении (сжатии);  $G_1$  – модуль упрочнения при сдвиге;  $\sigma$  – первый инвариант тензора напряжений;  $\varepsilon$  – первый инвариант тензора деформаций;  $T$  – интенсивность касательных напряжений;  $\Gamma$  – интенсивность

деформаций сдвига;  $\sigma_1, \varepsilon_1$  – координаты точки излома билинейной диаграммы объёмного деформирования;  $T_1, \Gamma_1$  – координаты точки излома билинейной диаграммы сдвигового деформирования.

На первом прямолинейном участке аппроксимированных диаграмм объёмного и сдвигового деформирования секущие модули объёмного расширения (сжатия)  $K = K(\varepsilon, \Gamma)$  и сдвига  $G = G(\varepsilon, \Gamma)$  для геометрически линейной модели сплошной среды будут определяться выражениями:

$$K^I = \frac{1}{3} K_0 = const; G^I = G_0 = const. \quad (1)$$

На втором прямолинейном участке диаграмм  $\sigma \approx \varepsilon$  и  $T \approx \Gamma$  секущий модуль объёмного расширения (сжатия)  $K = K(\varepsilon, \Gamma)$  и секущий модуль сдвига  $G = G(\varepsilon, \Gamma)$  будут определяться выражениями:

$$K^{II} = K(\varepsilon) = \frac{1}{3} \left[ K_1 + (K_0 - K_1) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right] \neq const; \quad (2)$$

$$G^{II} = G(\Gamma) = G_1 + (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \neq const.$$

Для геометрически нелинейной модели сплошной среды (в смысле В.В. Новожилова), секущие модули объёмного расширения (сжатия)  $K^* = K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$  и сдвига  $G^* = G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$  будут определяться теми же выражениями (1) и (2) в которых у всех величин нужно проставить звёздочки. При этом  $K_0^*$  – геометрически нелинейный аналог начального модуля объёмного расширения (сжатия);  $G_0^*$  – геометрически нелинейный аналог начального модуля сдвига;  $K_1^*$  – геометрически нелинейный аналог модуля упрочнения при объёмном расширении (сжатии);  $G_1^*$  – геометрически нелинейный аналог модуля упрочнения при сдвиге;  $\sigma^*$  – первый инвариант тензора обобщённых напряжений;  $\varepsilon^*$  – первый инвариант тензора нелинейных деформаций;  $T^*$  – интенсивность обобщённых касательных напряжений;  $\Gamma^*$  – интенсивность нелинейных деформаций сдвига;  $\sigma_1^*, \varepsilon_1^*$  – координаты точки излома билинейной

диаграммы объёмного деформирования;  $T_1^*, \Gamma_1^*$  – координаты точки излома билинейной диаграммы сдвигового деформирования.

При центрально-симметричном деформировании геометрически линейной сплошной среды  $\varepsilon = \varepsilon_{RR} + 2\varepsilon_{\varphi\varphi}$  и  $\Gamma = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_{RR} - \varepsilon_{\varphi\varphi})^2}$ . Кроме того,

$\varepsilon_{RR} = \frac{\partial u}{\partial R}$ ;  $\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{R}$ . Для геометрически нелинейной модели  $\varepsilon^* = \varepsilon_{RR}^* + 2\varepsilon_{\varphi\varphi}^*$  и

$\Gamma^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_{RR}^* - \varepsilon_{\varphi\varphi}^*)^2}$ , причём  $\varepsilon_{RR}^* = \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial R} \right)^2$ ;  $\varepsilon_{\varphi\varphi}^* = \frac{u}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{u}{R} \right)^2$ .

**Алгоритм практического определения напряжённо-деформированного состояния.**

Рассмотрим, в качестве примера, бесконечное пространство со сферической полостью радиуса  $R_s$ , внутри которой действует равномерно-распределённое по сферической поверхности давление интенсивности  $q$ . Полупространство за сферой будет находиться в условиях центрально-симметричного деформирования. Механическое поведение материала пространства описывается и в отношении объёмных, и в отношении сдвиговых деформаций произвольными нелинейными законами, аппроксимированными билинейными функциями, то есть, диаграммы объёмного и сдвигового деформирования известны. Требуется определить напряжённо-деформированное состояние пространства за пределами сферы.

Для определения напряжённо-деформированного состояния пространства за пределами сферы воспользуемся следующим алгоритмом.

1. Предположим, что напряжённо-деформированное состояние в каждой точке пространства на достаточном удалении от центра сферы соответствуют первому прямолинейному участку диаграмм объёмного и сдвигового деформирования, то есть  $K = K^l$ ,  $G = G^l$ . В этом случае, принимая во внимание внешнюю нагрузку  $q$  и, используя расчётные формулы, приведенные в работе [18], § 8.4, определяем в каждой точке пространства перемещение  $u$  (дифференциальное уравнение (8.90) с коэффициентами (8.91), [18] – для



геометрически линейной модели; дифференциальное уравнение (8.100) с коэффициентами (8.101), [18] – для геометрически нелинейной модели), деформации  $\varepsilon_{RR}$ ,  $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ , напряжения  $\sigma_{RR}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta}$  (формулы (8.85), [18] – для геометрически линейной модели; формулы (8.95), [18] – для геометрически нелинейной модели).

**З а м е ч а н и е:** для определения параметров напряжённо-деформированного состояния можно воспользоваться любым известным методом: методом конечных разностей, методом конечных элементов, и так далее.

2. Вычисляем первый инвариант тензора деформаций  $\varepsilon$  для геометрически линейной модели, или первый инвариант тензора нелинейных деформаций  $\varepsilon^*$  для геометрически нелинейной модели, а также интенсивность деформаций сдвига  $\Gamma$  для геометрически линейной модели, или интенсивность нелинейных деформаций сдвига  $\Gamma^*$  для геометрически нелинейной модели.

3. Находим радиусы сферических поверхностей  $R = R_{\varepsilon_1}$  и  $R = R_{\Gamma_1}$ , для которых выполняются условия:  $\varepsilon = \varepsilon_1$  и  $\Gamma = \Gamma_1$  соответственно, для геометрически линейной модели; либо  $\varepsilon^* = \varepsilon_1^*$  и  $\Gamma^* = \Gamma_1^*$  соответственно, для геометрически нелинейной модели. Если  $R_{\varepsilon_1} \leq R_s$  и  $R_{\Gamma_1} \leq R_s$ , то задача решена. В противном случае переходим к пункту 4.

**З а м е ч а н и е:** сферическую поверхность  $R = R_{\varepsilon_1}$  будем называть поверхностью излома объёмных деформаций; сферическую поверхность  $R = R_{\Gamma_1}$  будем называть поверхностью излома сдвиговых деформаций.

4. Далее возможны пять случаев.

Случай I.  $R_{\varepsilon_1} > R_{\Gamma_1} > R_s$  (рис. 2).

В точках пространства, для которых  $R \geq R_{\varepsilon_1}$  сплошная среда деформируется по закону  $K = K_0$ ,  $G = G_0$ , то есть здесь  $\varepsilon \geq \varepsilon_1$  и  $\Gamma \geq \Gamma_1$ .

В точках пространства, для которых  $R_{\Gamma_1} \leq R \leq R_{\varepsilon_1}$ , сплошная среда деформируется по закону  $K = K^{II}$ ,  $G = G^{II}$ . Следовательно, для этой области

находим перемещение  $u$  (дифференциальное уравнение (8.90) с коэффициентами (8.92), [18] – для геометрически линейной модели; дифференциальное уравнение (8.100) с коэффициентами (8.102), [18] – для геометрически нелинейной модели), деформации  $\varepsilon_{RR}$ ,  $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ , напряжения  $\sigma_{RR}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta}$  (формулы (8.86), [18] – для геометрически линейной модели; формулы (8.96), [18] – для геометрически нелинейной модели). Далее уточняем радиус  $R_{\Gamma_1}$ . В точках пространства на интервале  $R_{\Gamma_1} \leq R \leq R_{\varepsilon_1}$  имеем  $\varepsilon \geq \varepsilon_1$  и  $\Gamma \leq \Gamma_1$ .

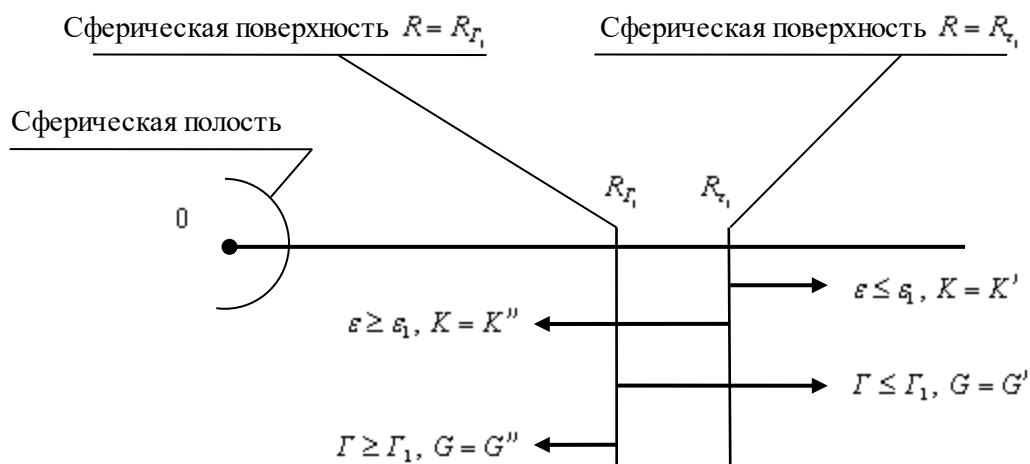


Рисунок 2 – Пространство со сферической полостью. Случай I

В точках пространства, для которых  $R \leq R_{\Gamma_1}$ , сплошная среда деформируется по закону  $K = K''$ ,  $G = G''$ . Следовательно, для этой области находим перемещение  $u$  (дифференциальное уравнение (8.90) с коэффициентами (8.94), [18] – для геометрически линейной модели; дифференциальное уравнение (8.100) с коэффициентами (8.104), [18] – для геометрически нелинейной модели), деформации  $\varepsilon_{RR}$ ,  $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ , напряжения  $\sigma_{RR}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta}$  (формулы (8.88), [18] – для геометрически линейной модели; формулы (8.98), [18] - для геометрически нелинейной модели). В точках пространства на интервале  $R \leq R_{\Gamma_1}$  имеем  $\varepsilon \geq \varepsilon_1$  и  $\Gamma \geq \Gamma_1$ .

Случай II.  $R_{\varepsilon_1} > R_{\Gamma_1}$  и  $R_{\Gamma_1} < R_s$  (рис. 3).

Внешняя нагрузка  $q$  такова, что сферическая поверхность излома сдвиговых деформаций отсутствует.

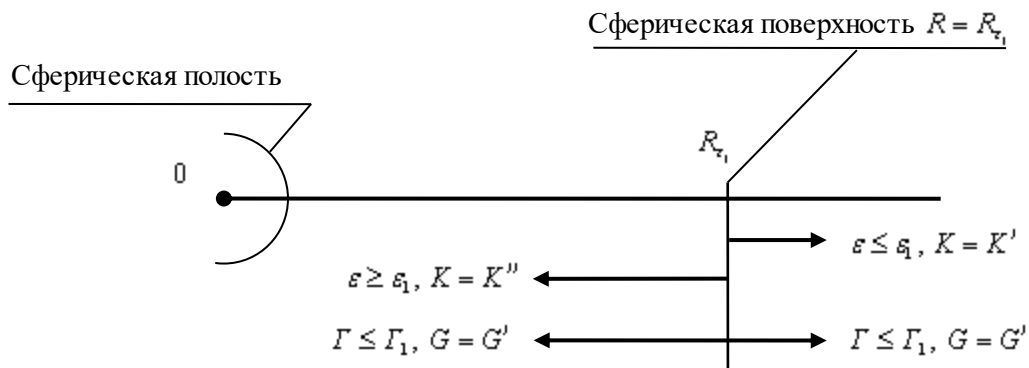


Рисунок 3 – Пространство со сферической полостью. Случай II

В точках пространства, для которых  $R \geq R_{\varepsilon_1}$ , сплошная среда деформируется по закону  $K = K^I$ ,  $G = G^I$ , то есть здесь  $\varepsilon \leq \varepsilon_1$  и  $\Gamma \leq \Gamma_1$ . В точках пространства, для которых  $R \leq R_{\varepsilon_1}$ , сплошная среда деформируется по закону  $K = K^{II}$ ,  $G = G^I$ , то есть здесь  $\varepsilon \geq \varepsilon_1$  и  $\Gamma \leq \Gamma_1$ .

Случай III.  $R_{\Gamma_1} > R_{\varepsilon_1} > R_s$  (рис.4).

В точках пространства, для которых  $R \geq R_{\Gamma_1}$  сплошная среда деформируется по закону  $K = K^I$ ,  $G = G^I$ , то есть здесь  $\varepsilon \leq \varepsilon_1$  и  $\Gamma \leq \Gamma_1$ .

В точках пространства, для которых  $R_{\varepsilon_1} \leq R \leq R_{\Gamma_1}$ , сплошная среда деформируется по закону  $K = K^I$ ,  $G = G^{II}$ . Следовательно, для этой области находим перемещение  $u$  (дифференциальное уравнение (8.90) с коэффициентами (8.93), [18] – для геометрически линейной модели; дифференциальное уравнение (8.100) с коэффициентами (8.103), [18] – для геометрически нелинейной модели), деформации  $\varepsilon_{RR}$ ,  $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ , напряжения  $\sigma_{RR}$ ,  $\sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta}$  (формулы (8.87), [18] – для геометрически линейной модели; формулы (8.97), [18] – для геометрически нелинейной модели). Далее уточняем

радиус  $R_{\varepsilon_1}$ . В точках полупространства на интервале  $R_{\varepsilon_1} \leq R \leq R_{\Gamma_1}$  имеем  $\varepsilon \leq \varepsilon_1$  и  $\Gamma \geq \Gamma_1$ .

В точках пространства, для которых  $R \leq R_{\varepsilon_1}$ , сплошная среда деформируется по закону  $K = K''$ ,  $G = G''$ , то есть здесь  $\varepsilon \geq \varepsilon_1$  и  $\Gamma \geq \Gamma_1$ .

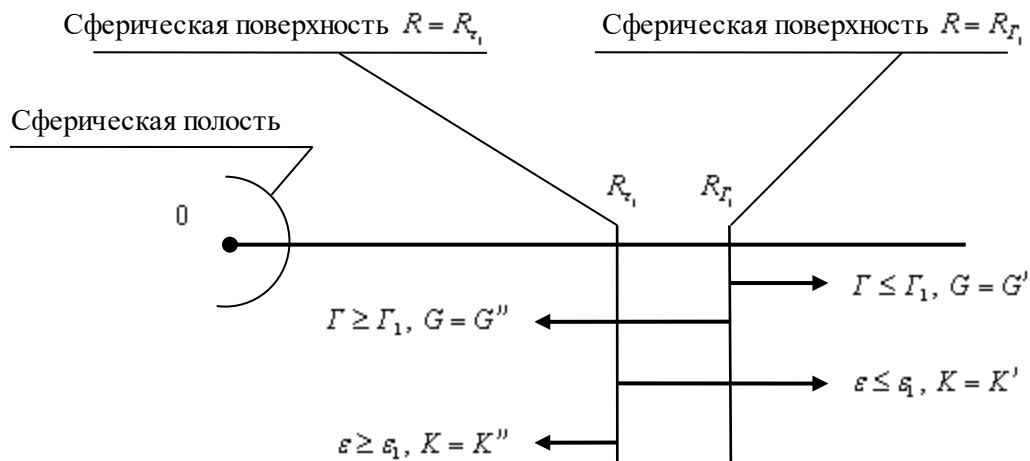


Рисунок 4 – Пространство со сферической полостью. Случай III

Случай IV.  $R_{\Gamma_1} > R_{\varepsilon_1}$  и  $R_{\varepsilon_1} < R_s$  (рис. 5).

Внешняя нагрузка  $q$  такова, что сферическая поверхность излома объёмных деформаций отсутствует.

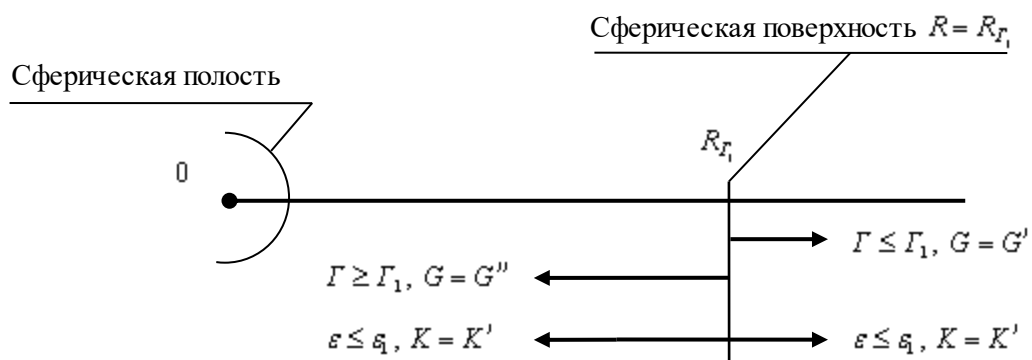


Рисунок 5 – Пространство со сферической полостью. Случай IV

В точках пространства, для которых  $R \geq R_{\Gamma_1}$  сплошная среда деформируется по закону  $K = K^I, G = G^I$ , то есть здесь  $\varepsilon \leq \varepsilon_1$  и  $\Gamma \leq \Gamma_1$ . В точках пространства, для которых  $R \leq R_{\Gamma_1}$  сплошная среда деформируется по закону  $K = K^I, G = G^{II}$ , то есть здесь  $\varepsilon \leq \varepsilon_1$  и  $\Gamma \geq \Gamma_1$ .

Случай V.  $R_{\varepsilon_1} = R_{\Gamma_1} > R_s$  (рис. 6).

Сферические поверхности излома объёмных и сдвиговых деформаций совпадают.

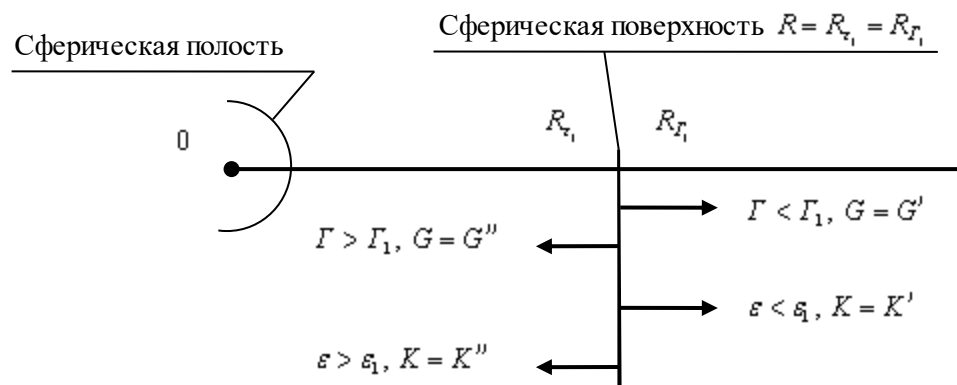


Рисунок 6 – Пространство со сферической полостью. Случай V

В точках пространства, для которых  $R \geq R_{\Gamma_1} = R_{\varepsilon_1}$  сплошная среда деформируется по закону  $K = K^I, G = G^I$ , то есть здесь  $\varepsilon \leq \varepsilon_1$  и  $\Gamma \leq \Gamma_1$ . В точках пространства, для которых  $R \leq R_{\Gamma_1} = R_{\varepsilon_1}$ , сплошная среда деформируется по закону  $K = K^{II}, G = G^{II}$ , то есть здесь  $\varepsilon \leq \varepsilon_1$  и  $\Gamma \leq \Gamma_1$ .

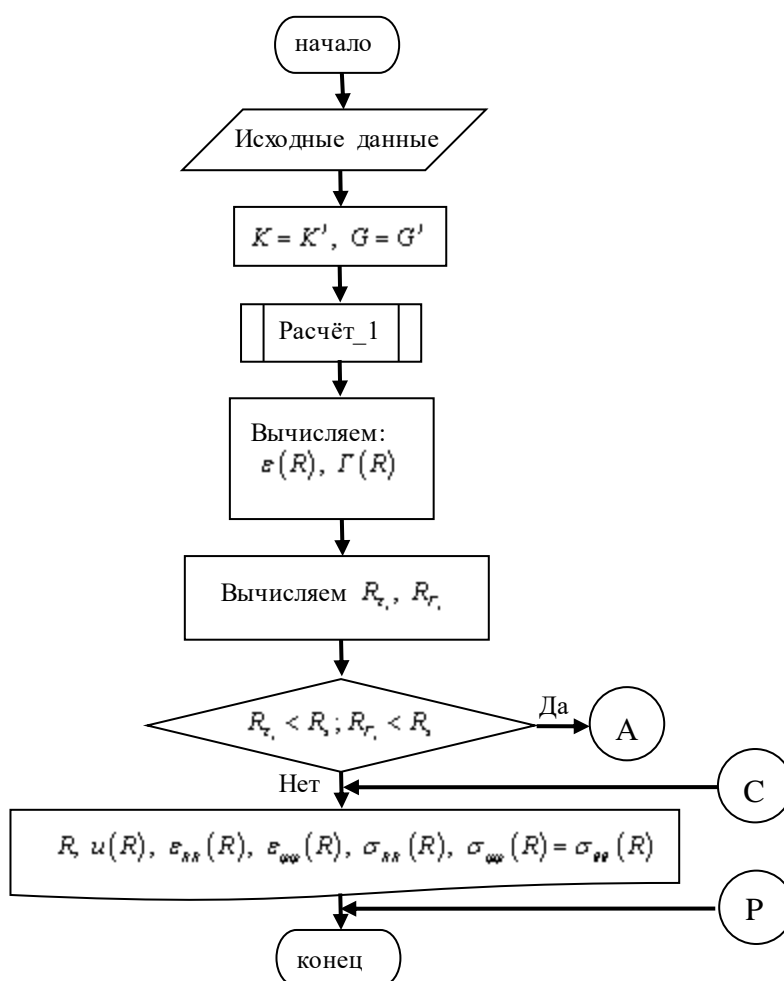
5. Правильность полученного решения оцениваем путём сравнения первого инварианта тензора напряжений и первого инварианта тензора деформаций, а также интенсивности касательных напряжений и интенсивности деформаций сдвига для геометрически линейной модели, либо первого инварианта тензора обобщённых напряжений и первого инварианта тензора нелинейных деформаций, а также интенсивности обобщённых касательных напряжений и интенсивности нелинейных деформаций сдвига для геометрически нелинейной модели, вычисленных по полученным напряжениям

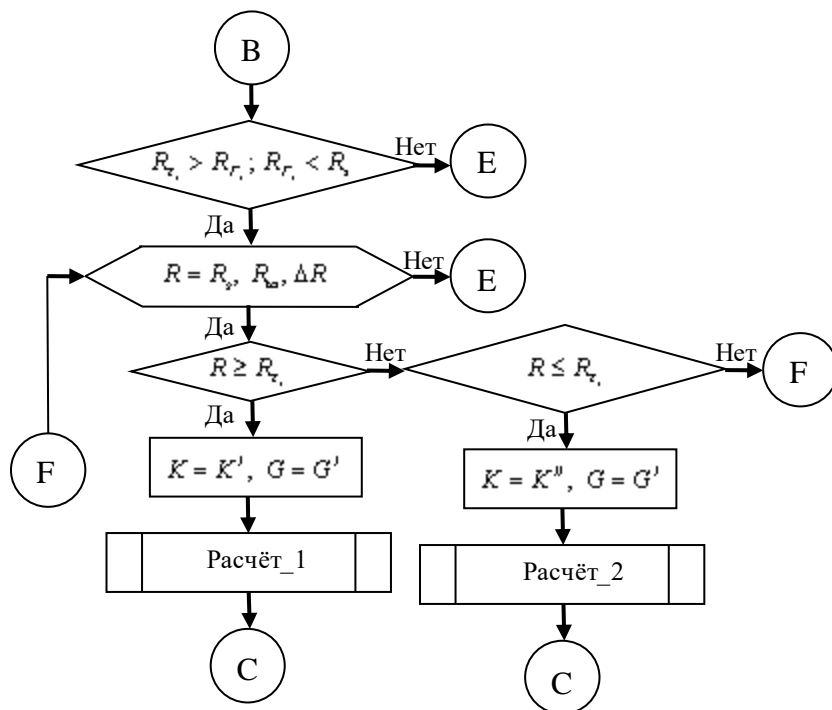
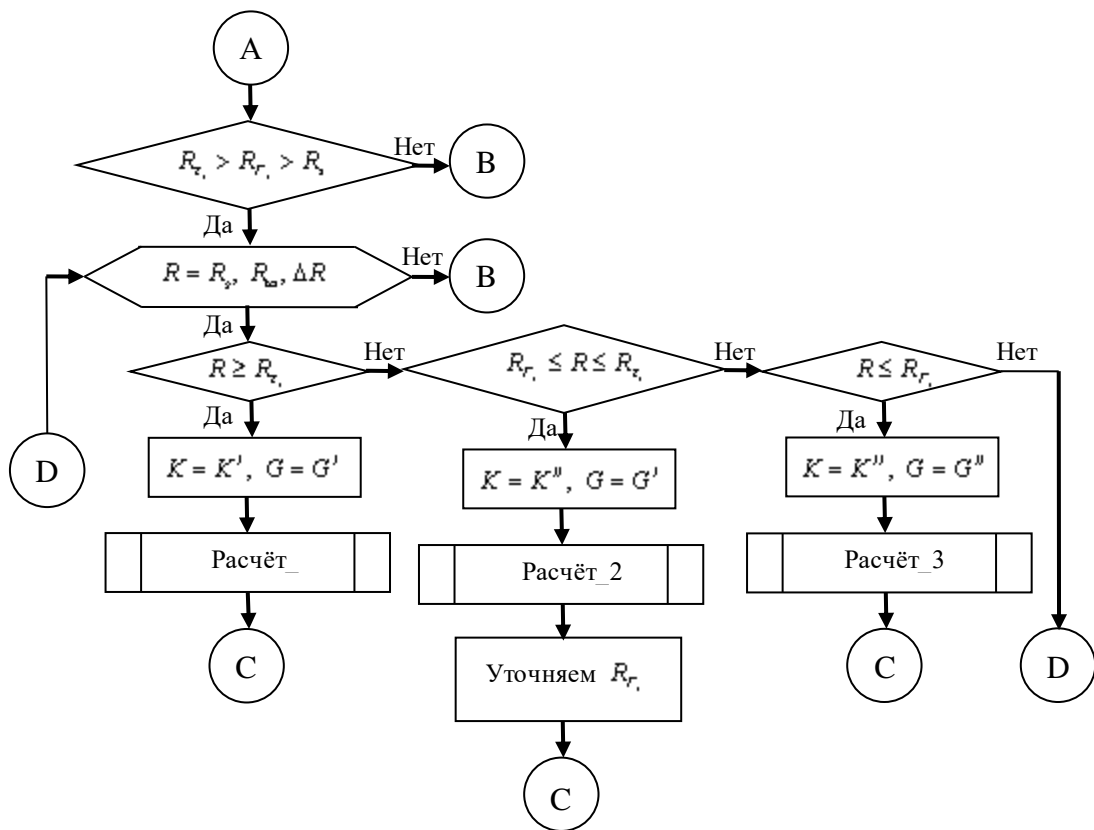
и деформациям, с их значениями на диаграммах объёмного и сдвигового деформирования.

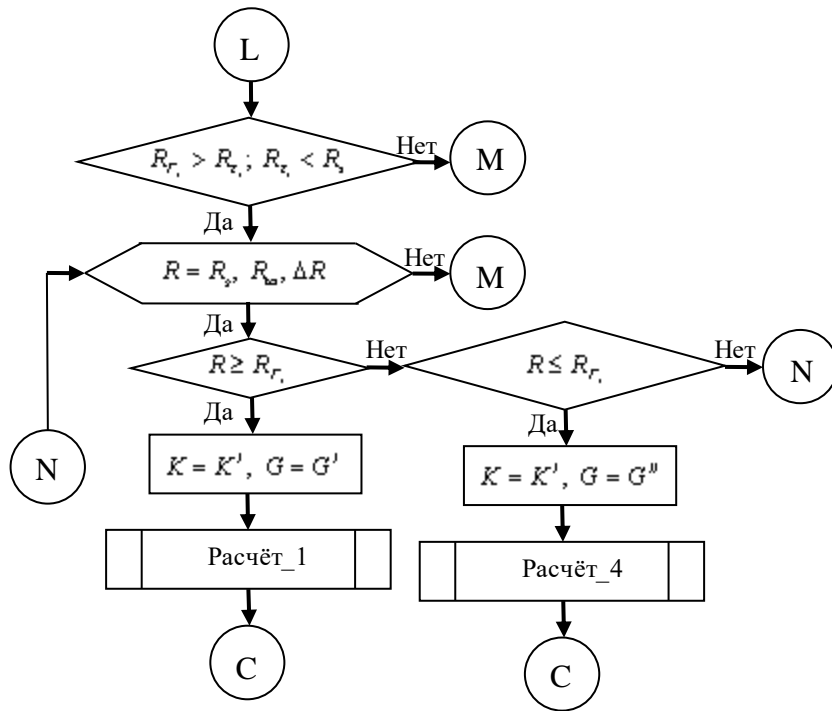
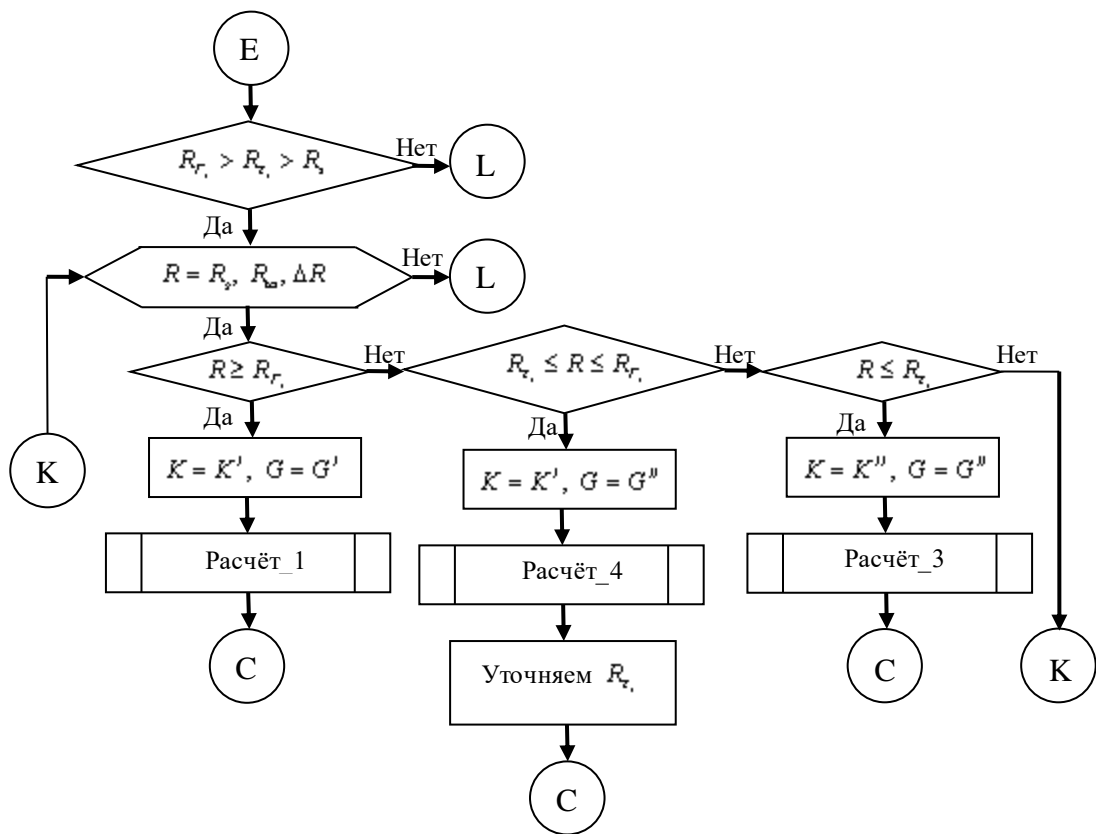
## Результаты

Описанный выше алгоритм для геометрически линейной модели сплошной среды изобразим в виде следующей укрупнённой блок-схемы. Без каких-либо изменений алгоритм в виде блок-схемы остается справедливым и для геометрически нелинейной сплошной среды.

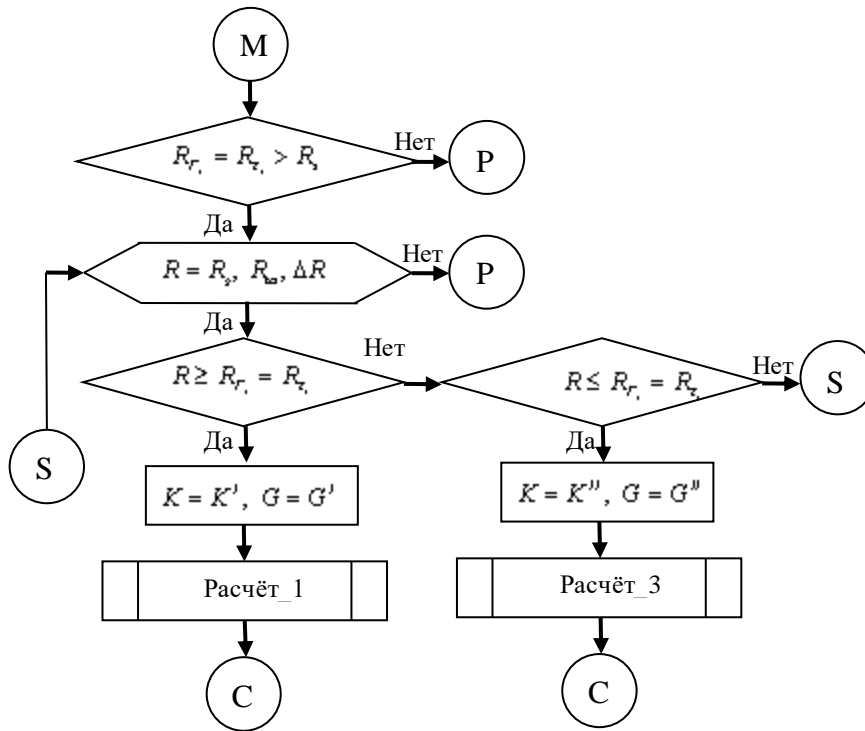
В блок-схеме введены обозначения:  $R_\infty$  – наибольшее значение радиуса до которого производятся вычисления перемещений, деформаций и напряжений в сплошной среде;  $\Delta R$  – приращение радиуса при вычислении характеристик напряжённо-деформированного состояния.











Расчёт\_1

	<p>Вычисляем в каждой точке пространства:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- перемещение <math>u(R)</math> (дифференциальное уравнение (8.90) с коэффициентами (8.91), [18] - для геометрически линейной модели; дифференциальное уравнение (8.100) с коэффициентами (8.101), [18] - для геометрически нелинейной модели),</li> <li>- деформации <math>\varepsilon_{rr}(R), \varepsilon_{\varphi\varphi}(R)</math>, напряжения <math>\sigma_{rr}(R), \sigma_{\varphi\varphi}(R) = \sigma_{\varphi\varphi}(R)</math> (формулы (8.85), [18] - для геометрически линейной модели; формулы (8.95), [18] - для геометрически нелинейной модели).</li> </ul>	
--	--	--

Расчёт\_2

	<p>Вычисляем в каждой точке пространства:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- перемещение <math>u(R)</math> (дифференциальное уравнение (8.90) с коэффициентами (8.92), [18] - для геометрически линейной модели; дифференциальное уравнение (8.100) с коэффициентами (8.102), [18] - для геометрически нелинейной модели),</li> <li>- деформации <math>\varepsilon_{rr}(R), \varepsilon_{\varphi\varphi}(R)</math>, напряжения <math>\sigma_{rr}(R), \sigma_{\varphi\varphi}(R) = \sigma_{\varphi\varphi}(R)</math> (формулы (8.86), [18] - для геометрически линейной модели; формулы (8.96), [18] - для геометрически нелинейной модели).</li> </ul>	
--	--	--

Расчёт\_3

	<p>Вычисляем в каждой точке пространства:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>- перемещение <math>u(\mathcal{R})</math> (дифференциальное уравнение (8.90) с коэффициентами (8.94), [18] - для геометрически линейной модели; дифференциальное уравнение (8.100) с коэффициентами (8.104), [18] - для геометрически нелинейной модели),</li><li>- деформации <math>\varepsilon_{rr}(\mathcal{R}), \varepsilon_{\varphi\varphi}(\mathcal{R})</math>, напряжения <math>\sigma_{rr}(\mathcal{R}), \sigma_{\varphi\varphi}(\mathcal{R}) = \sigma_{\varphi\varphi}(\mathcal{R})</math> (формулы (8.88), [18] - для геометрически линейной модели; формулы (8.98), [18] - для геометрически нелинейной модели).</li></ul>	
--	---	--

Расчёт\_4

	<p>Вычисляем в каждой точке пространства:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>- перемещение <math>u(\mathcal{R})</math> (дифференциальное уравнение (8.90) с коэффициентами (8.93), [18] - для геометрически линейной модели; дифференциальное уравнение (8.100) с коэффициентами (8.103), [18] - для геометрически нелинейной модели),</li><li>- деформации <math>\varepsilon_{rr}(\mathcal{R}), \varepsilon_{\varphi\varphi}(\mathcal{R})</math>, напряжения <math>\sigma_{rr}(\mathcal{R}), \sigma_{\varphi\varphi}(\mathcal{R}) = \sigma_{\varphi\varphi}(\mathcal{R})</math> (формулы (8.87), [18] - для геометрически линейной модели; формулы (8.97), [18] - для геометрически нелинейной модели).</li></ul>	
--	---	--

## Обсуждение

Для реализации разработанного алгоритма необходимо написать программу на одном из языков программирования высокого уровня. Программа должна кроме расчётных блоков, представленных в блок-схеме, содержать также достаточно качественный пользовательский интерфейс, обеспечивающий визуализацию как при вводе исходных данных, так и при выводе результатов решения задачи.

## Заключение

Сформулированный в статье алгоритм решения задачи может найти применение при определении напряжённо-деформированного состояния не только сплошной среды, но и элементов строительных и машиностроительных конструкций, находящихся в условиях центрально-симметричного

деформирования, как с учётом, так и без учёта геометрической нелинейности, физические соотношения для которых и в отношении объёмных деформаций, и в отношении сдвиговых деформаций описываются нелинейными законами, аппроксимируемыми билинейными функциями.

### **Библиографический список:**

1. Frolova I., Andreev V. Thermal stress state of rock massif with a spherical cavity taking into account inhomogeneity of the medium // MATEC Web of Conferences. 2016; 86:03010.
2. Kovač I., Težak D., Mesec J., Markovinović I. Comparative Analysis of Basic and Extended Power Models of Boreholes Expansion Dependence on Explosive Charge in Blasting in Clay Soil // Geosciences. 2020;10(151):151.
3. Man Yang, Hongyuan Fang, Dazhong Chen, Xueming Du, Fuming Wang. The Conformal Finite-Difference Time-Domain Simulation of GPR Wave Propagation in Complex Goelectric Structures // Geofluids. 2020;2020.
4. Dobrociński S., Flis L. Numerical Simulations of Blast Loads from Near-Field Ground Explosions in Air // Studia Geotechnica et Mechanica. 2015;37(4):11–18.
5. Suraparb Keawsawasvong, Boonchai Ukritchon. Undrained stability of a spherical cavity in cohesive soils using finite element limit analysis // Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering. 2019;11(6):1274-1285.
6. Liu Rui, Zhu Quanjie. An Analysis of the Impact of Deviatoric Stress and Spherical Stress on the Stability of Surrounding Rocks in Roadway // Geofluids. 2021;2021. DOI: <https://doi.org/10.1155/2021/3095690>.
7. Ya Gao, Qingyun Di, Zhenjun Ma, Zhe Yun. Study on Electrical Properties of Multilayered Spherical Earth by Wireless Electromagnetic Method // IEEE Access. 2021; 9:54090-54100.
8. Петрашень Г.И. Решение векторных предельных задач математической физики в случае шара. ДАН СССР. 1945. Т. 46. №7. С. 291-294.

9. Денисов Г.Г., Новиков В.В. О свободных движениях деформируемого твёрдого тела, близкого к шару. Изв. АН СССР. МТТ. 1983. №3. С. 43-50.
10. Новиков В.В., Февральских Л.Н. Применение аппарата шаровых векторов в задачах механики // Проблемы прочности и пластичности. 2020.Т. 82. № 3. С. 317-327.
11. Лычев С.А., Лычёва Т.Н., Койфман К.Г. Нелинейная эволюционная задача для самонапряженных слоистых гиперупругих сферических тел // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 1. С. 43-59.
12. Пронина Ю.Г. Исследование возможности образования и развития пор в твердых телах в рамках деформационной теории Девиса-Надаи // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2014. № 3. С. 79-92.
13. Паршин Д.А. Аналитические решения задачи об аддитивном формировании неоднородного упругого шарового тела в произвольном нестационарном центральном поле сил // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2017. № 5. С. 70-82.
14. Бажин А.А., Лемза А.О., Мурашкин Е.В. Сферически симметричное деформирование упругоползучепластических материалов // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2013. № 2 (16). С. 16-22.
15. Мурашкин Е.В. Расчёт параметров нагружения полого шара в условиях больших упругоползучих деформаций. // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14. № 1. С. 99–103.
16. Бакушев С.В. Аппроксимация диаграмм деформирования билинейными функциями // Строительная механика и расчёт сооружений. 2019. №2 (283). С.2-11.

17. Бакушев С.В. Аппроксимация диаграмм деформирования квадратичными функциями // Строительная механика и расчёт сооружений. 2020. №3 (290). С.2-14.

18. Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения и краевые задачи механики деформируемого твёрдого тела. – М.: ЛЕНАНД. 2020. 304 с.