УДК 629.12

ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ ЖЁСТКОСТИ СЖАТО-ИЗОГНУТОГО СТЕРЖНЯ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

Евсеев Александр Евгеньевич,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика».

Евсеев Илья Александрович,

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва,

магистрант.

Машин Валерий Михайлович,

ООО «Спецпроектцентр», г. Пенза,

кандидат технических наук, главный конструктор.

Аннотация

В статье развивается идея построения матрицы жёсткости с использованием дифференциального уравнения равновесия в перемещениях. Построены матрицы жесткости сжато-изогнутого и растянуто-изогнутого стержней. Проведено сравнение полученных результатов с матрицами реакций, выведенными с помощью стандартных процедур метода конечных элементов.

Ключевые слова: метод конечных элементов, матрица жесткости.

FORMATION OF THE STIFFNESS MATRIX OF COMPRESSED-CURVED ROD ACCORDING TO THE DIFFERENTIAL EQUATION

Evseev Alexander Evgenievich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Candidate of Sciences, Associate Professor of the department “Mechanics”.

Evseev Ilya Alexandrovich,
National Research Moscow State University of Civil Engineering, Moscow, undergraduate student.
Mashin Valery Mikhailovich,
LLC "SpecialProjectCenter", Penza,
Candidate of Sciences, chief designer.

Abstract

The article develops the idea of constructing a stiffness matrix using a differential equation of equilibrium in displacements. Stiffness matrices of compressed-curved and stretched-curved rods are constructed. The results obtained are compared with reaction matrices derived using standard procedures of the finite element method.

Keywords: finite element method, stiffness matrix.

В статье авторов [1] был предложен единый подход к построению точных матриц жёсткости упругих стержневых конечных элементов для деформационного расчёта изгибаемых конструкций, основанный на использовании дифференциального уравнения равновесия в перемещениях. Там же был приведен пример вывода матрицы жесткости стержня, работающего на изгиб.

В настоящей работе рассмотрим одновременное действие изгибающего момента и продольной силы.

Дифференциальное уравнение изгиба такого стержня при сжимающей узловой нагрузке имеет вид:

$$\frac{d^4v}{dx^4} + n^2 \cdot \frac{d^2v}{dx^2} = 0, \text{ где } n = \sqrt{\frac{|N|}{E \cdot J}}, \tag{1}$$

где $v = v(x)$ — прогиб стержня.

Решение уравнения (1) найдём, решив соответствующее характеристическое уравнение и определив его корни. Корни характеристического уравнения равны нулю. Тогда общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$v = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot \cos(n \cdot x) + a_4 \cdot \sin(n \cdot x) = \vec{H} \cdot \vec{a}, \qquad (2)$$

где $\vec{H} = \begin{bmatrix} 1 & x & \cos(n \cdot x) & \sin(n \cdot x) \end{bmatrix}$ — вектор-строка линейно-независимых решений уравнения (1), $\vec{a}^T = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ — вектор-столбец произвольных постоянных.

Запишем выражение (2) и производные от него в матричной форме

$$\begin{bmatrix} v \\ v' \\ v'' \\ v''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & \cos(n \cdot x) & \sin(n \cdot x) \\ 0 & 1 & -n \cdot \sin(n \cdot x) & n \cdot \cos(n \cdot x) \\ 0 & 0 & -n^2 \cdot \cos(n \cdot x) & -n^2 \cdot \sin(n \cdot x) \\ 0 & 0 & n^3 \cdot \sin(n \cdot x) & -n^3 \cdot \cos(n \cdot x) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

Перемещения концевых сечений стержня будем характеризовать вектором

$$\vec{z} = [v_н \;\; \varphi_н \;\; v_к \;\; \varphi_к \,]^T, \qquad (3)$$

где v и φ — прогиб (перемещение перпендикулярное оси стержня) и угол поворота сечения соответственно, а индексы «*н*» и «*к*» показывают принадлежность обобщенного перемещения к «началу» и «концу» стержня. Двойственным к вектору (3) будет вектор реакций концов стержня

$$\vec{r} = [r_{vн} \;\; r_{\varphi н} \;\; r_{vк} \;\; r_{\varphi к}]^T. \qquad (4)$$

Подставим координаты начала ($x = 0$) и конца ($x = l$) стержня в выражение (2) и в первую производную от него

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} v_н \\ \varphi_н \\ v_к \\ \varphi_к \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & n \\ 1 & l & \cos(n \cdot l) & \sin(n \cdot l) \\ 0 & 1 & -n \cdot \sin(n \cdot l) & n \cdot \cos(n \cdot l) \end{bmatrix} \cdot \vec{a} \qquad (5)$$

или

$$\vec{z} = L \cdot \vec{a}. \qquad (6)$$

Отсюда

$$\vec{a} = L^{-1} \cdot \vec{z}. \qquad (7)$$

Используя известные дифференциальные зависимости внутренних усилий от перемещений

$$M = EJ \cdot \frac{d^2 v}{dx^2};\ Q = EJ \cdot \frac{d^3 v}{dx^3}, \tag{8}$$

запишем

$$\begin{bmatrix} Q \\ M \end{bmatrix} = EJ \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & n^3 \cdot \sin(n \cdot x) & -n^3 \cdot \cos(n \cdot x) \\ 0 & 0 & -n^2 \cdot \cos(n \cdot x) & -n^2 \cdot \sin(n \cdot x) \end{bmatrix} \cdot \vec{a}. \tag{9}$$

Подставляя в (9) координаты начала ($x = 0$) и конца ($x = l$) стержня, получим значения поперечных сил и моментов в этих сечениях. Компоненты вектора $\vec{r}$ (4) можно выразить через эти усилия

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r_{vн} \\ r_{\varphi н} \\ r_{vк} \\ r_{\varphi к} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_н \\ -M_н \\ -Q_к \\ M_к \end{bmatrix} = EJ \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -n^3 \\ 0 & 0 & n^2 & 0 \\ 0 & 0 & -n^3 \cdot \sin(n \cdot l) & n^3 \cdot \cos(n \cdot l) \\ 0 & 0 & -n^2 \cdot \cos(n \cdot l) & -n^2 \cdot \sin(n \cdot l) \end{bmatrix} \cdot \vec{a} \tag{10}$$

или

$$\vec{r} = L_1 \cdot \vec{a}. \tag{11}$$

Подставим (7) в (11)

$$\vec{r} = L_1 \cdot L^{-1} \cdot \vec{z} = r \cdot \vec{z}, \tag{12}$$

где $r = L_1 \cdot L^{-1}$ — изгибная матрица жёсткости стержня, (13)

записанная в местной системе координат.

Авторами была предпринята попытка получить матрицу жесткости в явном виде. Так (5) и (6) матрица L имеет вид

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & n \\ 1 & l & \cos(n \cdot l) & \sin(n \cdot l) \\ 0 & 1 & -n \cdot \sin(n \cdot l) & n \cdot \cos(n \cdot l) \end{bmatrix},$$

обернув которую получим довольно сложное с вычислительной стороны выражение

$$L^{-1} = \frac{1}{l \cdot n \cdot \sin(n \cdot l) + \cos(n \cdot l) - 1} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} l \cdot n \cdot \sin(n \cdot l) + \cos(n \cdot l) - 1 & 0 & 0 & 0 \\ -n \cdot \sin(n \cdot l) & -1 & n \cdot \sin(n \cdot l) & \cos(n \cdot l) \\ \cos(n \cdot l) - 1 & \dfrac{l \cdot n \cdot \cos(n \cdot l) - \sin(n \cdot l)}{n} & -(\cos(n \cdot l) - 1) & \dfrac{\sin(n \cdot l) - n \cdot l}{n} \\ \sin(n \cdot l) & \dfrac{l \cdot n \cdot \sin(n \cdot l) + \cos(n \cdot l)}{n} & -\sin(n \cdot l) & \dfrac{-\cos(n \cdot l)}{n} \end{bmatrix}.$$

Последующее умножение на матрицу L_1 слева приведет к весьма сложному для вычислений явному виду матрицы жесткости. Здесь надо добавить, что вычисление тригонометрической функции в современных ЭВМ связано с существенно большим количеством тактов процессора по сравнению с умножением и делением. В связи с этим обстоятельством авторами было предложено получать матрицу жёсткости деформирующегося стержня численным методом. При этом матрица L оборачивается численно, а затем непосредственно «умножается» на матрицу L_1 слева.

Таким образом вычисляется матрица жесткости стержня, позволяющая вести его деформационный расчет при сжимающей узловой нагрузке.

Библиографический список:

1. Евсеев А.Е., Евсеев И.А., Машин В.М. Методика построения матриц жёсткости по дифференциальному уравнению [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2021. №14. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no14/stroitelnaya-mehanika /14.4/at_download/file.