

УДК 519.633

АЛГОРИТМ РАСЧЁТА НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ, ПРИ БИЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ЗАМЫКАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ

Бакушев Сергей Васильевич,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Аннотация

Формулируется алгоритм определения напряжённо-деформированного состояния полупространства, находящегося в условиях плоской деформации в декартовой прямоугольной системе координат. Механическое поведение сплошной среды и в отношении объёмных деформаций, и в отношении сдвиговых деформаций произвольными нелинейными законами, аппроксимируемыми билинейными функциями. Математическая модель сплошной среды описывается как с учётом, так и без учёта геометрической нелинейности (в смысле В.В. Новожилова). Алгоритм решения задачи, может найти применение при определении напряжённо-деформированного состояния сплошных сред и элементов строительных и машиностроительных конструкций, находящихся в условиях плоской деформации и описываемые математическими моделями как с учётом, так и без учёта геометрической нелинейности, замыкающие уравнения физических соотношений для которых, построенные на основе экспериментальных данных, аппроксимированы билинейными функциями.

Ключевые слова: сплошная среда, плоская деформация, билинейная аппроксимация, геометрическая линейность, геометрическая нелинейность, алгоритм решения задачи.

ALGORITHM FOR CALCULATING THE TENSE-DEFORMED STATE OF A CONTINUOUS MEDIUM UNDER CONDITIONS OF PLANE DEFORMATION IN CARTESIAN COORDINATES, WITH BILINEAR APPROXIMATION OF THE CLOSING EQUATIONS

Bakushev Sergey Vasilevich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor of the department "Mechanics".

Abstract

An algorithm for determining the tense-deformed state of a semispace that is under conditions of plane deformation in the Cartesian rectangular coordinate system is formulated. The mechanical behavior of a continuous medium with respect to both volumetric deformations and shear deformations with arbitrary nonlinear laws approximated by bilinear functions. The mathematical model of the continuous medium is described both with and without taking into account geometric nonlinearity (in the sense of V.V. Novozhilov). The algorithm for solving the problem can be used in determining the tense-deformed state of continuous media and elements of building and machine-building structures that are in conditions of flat deformation and described by mathematical models both taking into account and without taking into account geometric nonlinearity, closing the equations of physical relations for which, built on the basis of experimental data, are approximated by bilinear functions.

Keywords: continuum, plane strain, bilinear approximation, geometric linearity, geometric nonlinearity, algorithm for solving a problem.

Введение. Плоские задачи теории упругости получили наибольшее распространение в линейной и нелинейной механике деформируемого твёрдого тела [1-7]. Это обусловлено не только широким распространением плоских конструктивных элементов в строительных и машиностроительных конструкциях (стены, перегородки, балки-стенки и так далее), но также и тем,

что многие пространственные задачи сводятся к решению плоских задач (расчёт оснований под фундаменты, расчёт фундаментов, расчёт трубопроводов, артиллерийских стволов и так далее). Достоверность расчётных методик и степень приближения полученных решений к их реальному механическому поведению под нагрузкой во многом определяется математической моделью, описывающей связь между напряжениями и деформациями. Математические модели, адекватно описывающие механическое поведение сплошных сред, являются, как правило, достаточно сложными с точки зрения математики. Простые математические модели теории упругости (закон Гука) приводят к решениям, порой достаточно далёким от данных эксперимента. Решение этого противоречия можно найти, взяв для построения замыкающих уравнений физических соотношений сложные, но достоверные математические модели механического поведения сплошных сред, а затем аппроксимировав эти замыкающие уравнения простыми функциями, например, билинейными [8] или биквадратичными [9]. На основе билинейной аппроксимации замыкающих уравнений автором в работе [10] представлен ряд характерных задач механики деформируемого твёрдого тела, в которых получены дифференциальные уравнения равновесия сплошной геометрически и физически нелинейной среды в перемещениях для случаев одномерной плоской, осесимметричной, центрально-симметричной деформации, а также плоской деформации в декартовых и цилиндрических координатах. Но получение дифференциальных уравнений для разрывных замыкающих уравнений физических соотношений – это только половина работы при определении напряжённо-деформированного состояния. Для завершения необходимо сформулировать алгоритм решения, а также написать компьютерную программу на одном из языков программирования.

В данной работе для сплошной среды, находящейся в условиях плоской деформации $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $w = 0$, формулируется алгоритм решения задачи об определении напряжённо-деформированного состояния. Механическое поведение сплошной среды и в части объёмных деформаций, и в

части сдвиговых деформаций описывается произвольными нелинейными законами, аппроксимированными билинейными функциями (рис. 1). Механическое поведение сплошной среды рассматривается как без учёта, так и с учётом геометрической нелинейности (в смысле В.В. Новожилова).

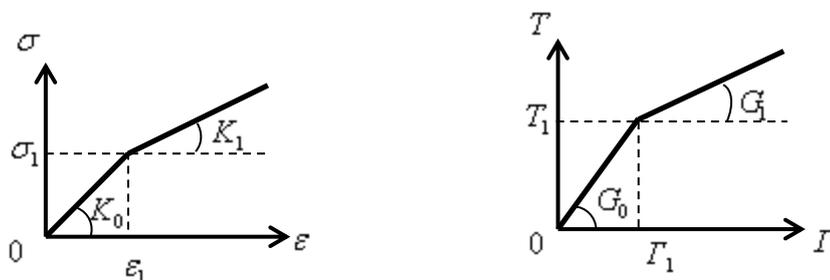


Рисунок 1 - Диаграммы объёмного $\sigma \approx \varepsilon$ и сдвигового $T \approx \Gamma$ деформирования

На рис. 1 введены следующие обозначения: K_0 – начальный модуль объёмного расширения (сжатия); G_0 – начальный модуль сдвига; K_1 – модуль упрочнения при объёмном расширении (сжатии); G_1 – модуль упрочнения при сдвиге; σ – первый инвариант тензора напряжений; ε – первый инвариант тензора деформаций; T – интенсивность касательных напряжений; Γ – интенсивность деформаций сдвига; σ_1, ε_1 – координаты точки излома билинейной диаграммы объёмного деформирования; T_1, Γ_1 – координаты точки излома билинейной диаграммы сдвигового деформирования.

Секущие модули билинейных диаграмм. Для сплошной среды, находящейся в условиях плоской деформации, при билинейной аппроксимации графиков диаграмм объёмного и сдвигового деформирования, физические и разрешающие дифференциальные уравнения в перемещениях как без учёта, так и с учётом геометрической нелинейности (в смысле В.В. Новожилова), приведены в работах [11, 12].

Построение физических уравнений выполнено на основании секущих модулей объёмного K и сдвигового G деформирования. Так на первом

прямолинейном участке аппроксимированных диаграмм объёмного и сдвигового деформирования

$$K^I = \frac{1}{3} K_0 = Const; \quad G^I = G_0 = Const; \quad (1)$$

на втором прямолинейном участке

$$K^{II} = K(\varepsilon) = \frac{1}{3} \left[K_1 + (K_0 - K_1) \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} \right] \neq Const; \quad (2)$$

$$G^{II} = G(\Gamma) = G_1 + (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \neq Const.$$

Для геометрически нелинейной модели сплошной среды (в смысле В.В. Новожилова), секущие модули объёмного расширения (сжатия) и сдвига будут определяться теми же выражениями (1) и (2) в которых у всех величин нужно проставить звёздочки. При этом K_0^* – геометрически нелинейный аналог начального модуля объёмного расширения (сжатия); G_0^* – геометрически нелинейный аналог начального модуля сдвига; K_1^* – геометрически нелинейный аналог модуля упрочнения при объёмном расширении (сжатии); G_1^* – геометрически нелинейный аналог модуля упрочнения при сдвиге; σ^* – первый инвариант тензора обобщённых напряжений; ε^* – первый инвариант тензора нелинейных деформаций; T^* – интенсивность обобщённых касательных напряжений; Γ^* – интенсивность нелинейных деформаций сдвига; σ_1^* , ε_1^* – координаты точки излома билинейной диаграммы объёмного деформирования; T_1^* , Γ_1^* – координаты точки излома билинейной диаграммы сдвигового деформирования.

При плоской деформации для геометрически линейной сплошной среды

$$\varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}, \quad \Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + \varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \frac{3}{2} \varepsilon_{xy}^2}, \quad \text{причём}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3)$$

Для геометрически нелинейной модели сплошной среды $\varepsilon^* = \varepsilon_{xx}^* + \varepsilon_{yy}^*$ и

$$\Gamma^* = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_{xx}^* - \varepsilon_{yy}^*)^2 + \varepsilon_{xx}^{*2} + \varepsilon_{yy}^{*2} + \frac{3}{2} \varepsilon_{xy}^{*2}}, \text{ где}$$

$$\varepsilon_{xx}^* = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right];$$

$$\varepsilon_{yy}^* = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]; \quad (4)$$

$$\varepsilon_{xy}^* = \varepsilon_{yx}^* = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Алгоритм. Построение алгоритма для определения напряжённо-деформированного состояния сплошной среды для разрывных функций объёмного и сдвигового деформирования, находящейся в условиях плоской деформации, в декартовой системе координат, будем выполнять основываясь на выявлении возможного положения плоских кривых (цилиндрических поверхностей в полупространстве) излома объёмных и сдвиговых деформаций.

Рассмотрим, в качестве примера, полупространство, находящееся в условиях плоской деформации. На свободной границе полупространства на длине l действует распределённая нагрузка интенсивности q . Ось X направим внутрь полупространства, ось Y - вправо по свободной границе, ось Z - из плоскости рисунка. Начало координат расположим в середине нагрузки. Механическое поведение материала полупространства описывается и в отношении объёмных, и в отношении сдвиговых деформаций произвольными нелинейными законами, аппроксимированными билинейными функциями, то есть, диаграммы объёмного и сдвигового деформирования известны. Требуется определить напряжённо-деформированное состояние полупространства.

Словесный алгоритм для определения напряжённо-деформированного состояния полупространства будет следующим.

1. Для заданной внешней нагрузки q определяем напряжённо-деформированное состояние в каждой точке полупространства на основании

первого прямолинейного участка диаграмм объёмного и сдвигового деформирования, то есть принимаем $K = K^I$, $G = G^I$. Для определения параметров напряжённо-деформированного состояния можно воспользоваться любым известным методом: методом конечных разностей, методом конечных элементов, и так далее. Расчётные формулы для геометрически линейной модели сплошной среды приведены в работе [11]: для определения перемещений $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеем разрешающую систему дифференциальных уравнений в перемещениях – формулы (10) с коэффициентами (11). Для геометрически нелинейной модели сплошной среды расчётные формулы приведены в работе [12]: для определения перемещений $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеем разрешающую систему дифференциальных уравнений в перемещениях - формулы (10) с коэффициентами (11). Далее, для геометрической модели сплошной среды определяем деформации $\varepsilon_{xx}(x, y)$; $\varepsilon_{yy}(x, y)$; $\varepsilon_{xy}(x, y)$ по формулам (3), затем напряжения $\sigma_{xx}(x, y)$; $\sigma_{yy}(x, y)$; $\sigma_{xy}(x, y)$; $\sigma_{zz}(x, y)$ по формулам (5) из статьи [11]. Для геометрически нелинейной модели сплошной среды определяем нелинейные деформации $\varepsilon_{xx}^*(x, y)$; $\varepsilon_{yy}^*(x, y)$; $\varepsilon_{xy}^*(x, y)$ по формулам (4), затем обобщённые напряжения $\sigma_{xx}^*(x, y)$; $\sigma_{yy}^*(x, y)$; $\sigma_{xy}^*(x, y)$; $\sigma_{zz}^*(x, y)$ по формулам (5) из статьи [12].

2. В каждой точке полупространства вычисляем первый инвариант тензора деформаций $\varepsilon(x, y)$ для геометрически линейной модели, или первый инвариант тензора нелинейных деформаций $\varepsilon^*(x, y)$ для геометрически нелинейной модели, а также интенсивность деформаций сдвига $\Gamma(x, y)$ для геометрически линейной модели, или интенсивность нелинейных деформаций сдвига $\Gamma^*(x, y)$ для геометрически нелинейной модели.

3. Из условий $\varepsilon(x_{\varepsilon_1}, y_{\varepsilon_1}) = \varepsilon_1$ и $\Gamma(x_{\Gamma_1}, y_{\Gamma_1}) = \Gamma_1$ для геометрически линейной модели, либо из условий $\varepsilon^*(x_{\varepsilon_1}, y_{\varepsilon_1}) = \varepsilon_1^*$ и $\Gamma^*(x_{\Gamma_1}, y_{\Gamma_1}) = \Gamma_1^*$ для геометрически нелинейной модели сплошной среды находим координаты точек плоских

кривых (цилиндрических поверхностей в полупространстве) $\omega(x_{\varepsilon_1}, y_{\varepsilon_1})=0$ и $\omega_{\Gamma}(x_{\Gamma_1}, y_{\Gamma_1})=0$. Если $x_{\varepsilon_1} \rightarrow \infty$ и $y_{\varepsilon_1} \rightarrow \infty$, $x_{\Gamma_1} \rightarrow \infty$ и $y_{\Gamma_1} \rightarrow \infty$, то задача решена. Иначе, переходим к пункту 4.

З а м е ч а н и е: плоскую кривую $\omega_{\varepsilon}(x_{\varepsilon_1}, y_{\varepsilon_1})=0$ будем называть кривой излома объёмных деформаций; плоскую кривую $\omega_{\Gamma}(x_{\Gamma_1}, y_{\Gamma_1})=0$ будем называть кривой излома сдвиговых деформаций.

1. Далее возможны пять случаев.

Случай I: кривая излома объёмных деформаций целиком лежит вне кривой излома сдвиговых деформаций, то есть $x_{\varepsilon_1} > x_{\Gamma_1}$; $y_{\varepsilon_1} > y_{\Gamma_1}$ (рис. 2).

В точках полупространства, для которых $x \geq x_{\varepsilon_1}$; $y \geq y_{\varepsilon_1}$ сплошная среда деформируется по закону $K = K^I$, $G = G^I$, то есть здесь $\varepsilon(x, y) \leq \varepsilon_1$ и $\Gamma(x, y) \leq \Gamma_1$.

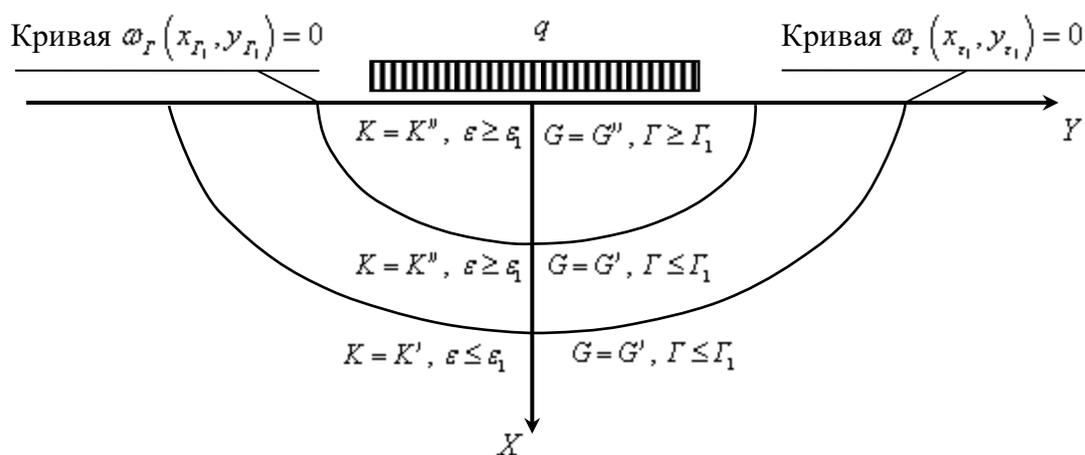


Рисунок 2 - Полупространство в условиях плоской деформации. Случай I

В точках полупространства, для которых $x_{\Gamma_1} \leq x \leq x_{\varepsilon_1}$; $y_{\Gamma_1} \leq y \leq y_{\varepsilon_1}$, сплошная среда деформируется по закону $K = K''$, $G = G^I$. В этой области определяем напряжённо-деформированное состояние. Для геометрически линейной модели сплошной среды перемещения $u(x, y)$ и $v(x, y)$ определяем из разрешающей системы дифференциальных уравнений в перемещениях –

формулы (10) с коэффициентами (12) из статьи [11]. Для геометрически нелинейной модели сплошной среды перемещения $u(x, y)$ и $v(x, y)$ определяем из разрешающей системы дифференциальных уравнений в перемещениях – формулы (10) с коэффициентами (12) из статьи [12]. Далее по формулам (3) определяем деформации, а затем напряжения по формулам (6) из статьи [11] для геометрически линейной модели сплошной среды. Для геометрически нелинейной модели сплошной среды определяем нелинейные деформации по формулам (4), затем обобщённые напряжения по формулам (6) из статьи [12]. Теперь уточняем координаты точек кривой $\omega_\Gamma(x_{\Gamma_1}, y_{\Gamma_1}) = 0$, так как изменился закон деформирования. В точках полупространства на интервалах $x_{\Gamma_1} \leq x \leq x_{\varepsilon_1}$; $y_{\Gamma_1} \leq y \leq y_{\varepsilon_1}$ имеем $\varepsilon(x, y) \geq \varepsilon_1$ и $\Gamma(x, y) \leq \Gamma_1$.

В точках полупространства, для которых $x < x_{\Gamma_1}$; $y < y_{\Gamma_1}$, сплошная среда деформируется по закону $K = K''$, $G = G''$. Для этой области определяем напряжённо-деформированное состояние. Для геометрически линейной модели сплошной среды перемещения $u(x, y)$ и $v(x, y)$ определяем из разрешающей системы дифференциальных уравнений в перемещениях – формулы (10) с коэффициентами (14) из статьи [11]. Для геометрически нелинейной модели сплошной среды перемещения $u(x, y)$ и $v(x, y)$ определяем из разрешающей системы дифференциальных уравнений в перемещениях – формулы (10) с коэффициентами (14) из статьи [12]. Далее по формулам (3) определяем деформации, а затем напряжения по формулам (8) из статьи [11] для геометрически линейной модели сплошной среды. Для геометрически нелинейной модели сплошной среды определяем нелинейные деформации по формулам (4), затем обобщённые напряжения по формулам (8) из статьи [12]. В точках полупространства на интервалах $x < x_{\Gamma_1}$; $y < y_{\Gamma_1}$ имеем $\varepsilon(x, y) \geq \varepsilon_1$ и $\Gamma(x, y) \geq \Gamma_1$.

Случай II: внешняя нагрузка q такова, что кривая излома сдвиговых деформаций отсутствует (рис. 3).

В точках полупространства, для которых $x > x_{\varepsilon_1}; y > y_{\varepsilon_1}$ сплошная среда деформируется по закону $K = K^I, G = G^I$, то есть здесь $\varepsilon(x, y) \leq \varepsilon_1$ и $\Gamma(x, y) \leq \Gamma_1$. В точках пространства, для которых $x \leq x_{\varepsilon_1}; y \leq y_{\varepsilon_1}$ сплошная среда деформируется по закону $K = K^{II}, G = G^I$, то есть здесь $\varepsilon(x, y) \geq \varepsilon_1$ и $\Gamma(x, y) \leq \Gamma_1$.

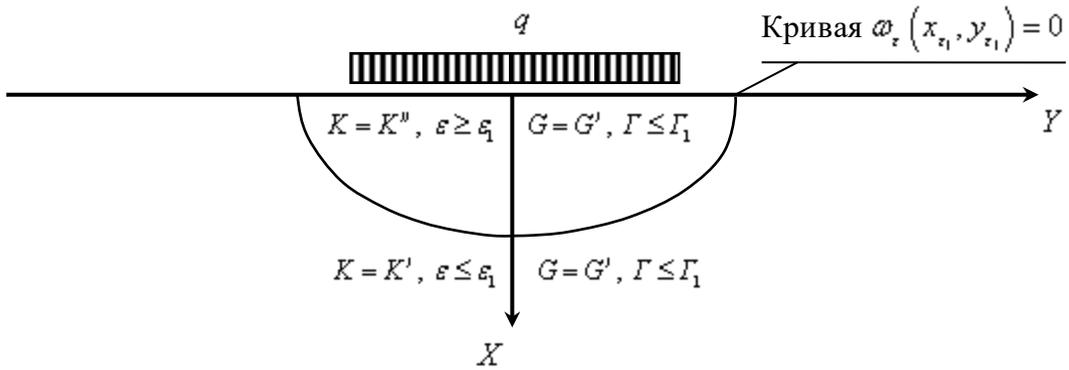


Рисунок 3 - Полупространство в условиях плоской деформации. Случай II

Случай III: кривая излома сдвиговых деформаций целиком лежит вне кривой излома объёмных деформаций, то есть $x_{\varepsilon_1} < x_{\Gamma_1}; y_{\varepsilon_1} < y_{\Gamma_1}$ (рис.4).

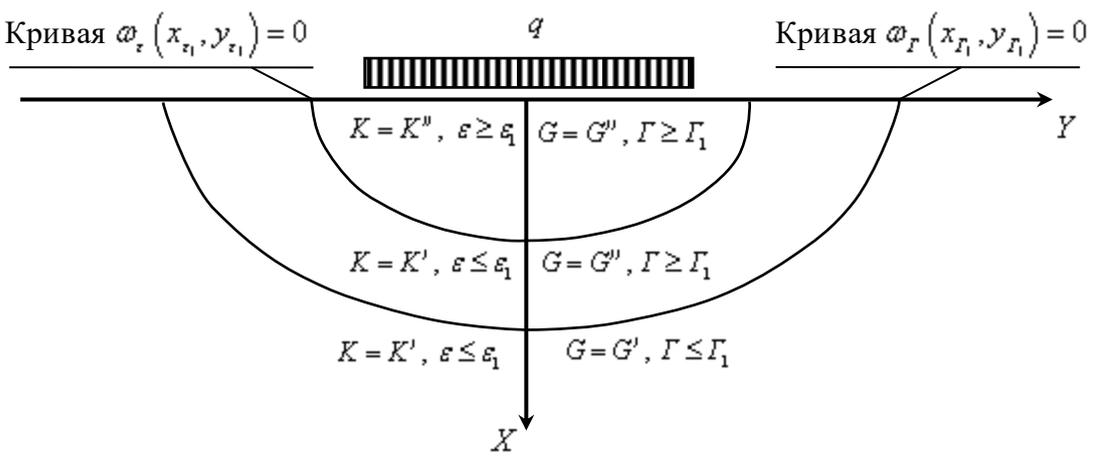


Рисунок 4 - Полупространство в условиях плоской деформации. Случай III

В точках полупространства, для которых $x \geq x_{\Gamma_1}; y \geq y_{\Gamma_1}$ сплошная среда деформируется по закону $K = K^I, G = G^I$, то есть здесь $\varepsilon(x, y) \leq \varepsilon_1$ и $\Gamma(x, y) \leq \Gamma_1$.

В точках полупространства, для которых $x_{\varepsilon_1} \leq x \leq x_{\Gamma_1}; y_{\varepsilon_1} \leq y \leq y_{\Gamma_1}$, сплошная среда деформируется по закону $K = K^I, G = G^{II}$. Для этой области определяем напряжённо-деформированное состояние. Для геометрически линейной модели сплошной среды перемещения $u(x, y)$ и $v(x, y)$ определяем из разрешающей системы дифференциальных уравнений в перемещениях – формулы (10) с коэффициентами (13) из статьи [11]. Для геометрически нелинейной модели сплошной среды перемещения $u(x, y)$ и $v(x, y)$ определяем из разрешающей системы дифференциальных уравнений в перемещениях – формулы (10) с коэффициентами (13) из статьи [12]. Далее по формулам (3) определяем деформации, а затем напряжения по формулам (7) из статьи [11] для геометрически линейной модели сплошной среды. Для геометрически нелинейной модели сплошной среды определяем нелинейные деформации по формулам (4), затем обобщённые напряжения по формулам (7) из статьи [12]. Теперь уточняем координаты точек кривой $\omega_\varepsilon(x_{\varepsilon_1}, y_{\varepsilon_1}) = 0$, так как изменился закон деформирования. В точках полупространства на интервалах $x_{\varepsilon_1} \leq x \leq x_{\Gamma_1}; y_{\varepsilon_1} \leq y \leq y_{\Gamma_1}$ имеем $\varepsilon(x, y) \leq \varepsilon_1$ и $\Gamma(x, y) \geq \Gamma_1$.

В точках полупространства, для которых $x \leq x_{\varepsilon_1}; y \leq y_{\varepsilon_1}$, сплошная среда деформируется по закону $K = K^{II}, G = G^{II}$, то есть здесь $\varepsilon(x, y) \geq \varepsilon_1$ и $\Gamma(x, y) \geq \Gamma_1$.

Случай IV: внешняя нагрузка q такова, что кривая излома объёмных деформаций отсутствует (рис. 5).

В точках полупространства, для которых $x \geq x_{\Gamma_1}; y \geq y_{\Gamma_1}$ сплошная среда деформируется по закону $K = K^I, G = G^I$, то есть здесь $\varepsilon(x, y) \leq \varepsilon_1$ и $\Gamma(x, y) \leq \Gamma_1$. В точках полупространства, для которых $x \leq x_{\Gamma_1}; y \leq y_{\Gamma_1}$ сплошная

среда деформируется по закону $K = K^I$, $G = G^II$, то есть здесь $\varepsilon(x, y) \leq \varepsilon_1$ и $\Gamma(x, y) \geq \Gamma_1$.

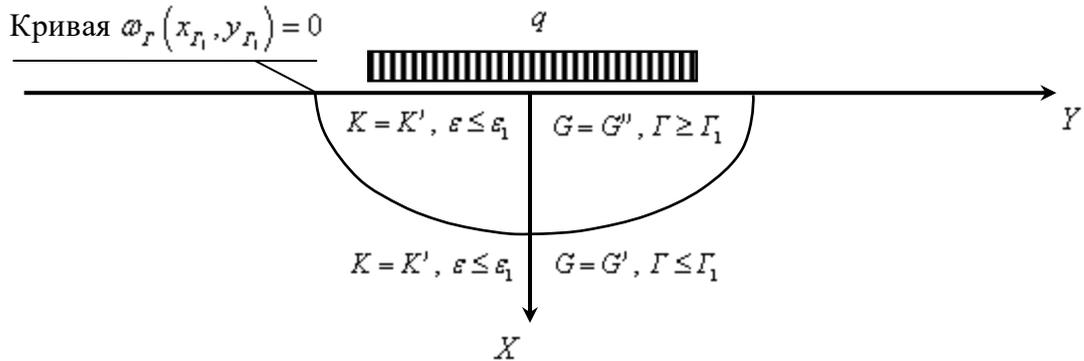


Рисунок 5 - Полупространство в условиях плоской деформации. Случай IV

Случай V: кривые излома объёмных и сдвиговых деформаций совпадают, то есть $x_{\varepsilon_1} = x_{\Gamma_1}$; $y_{\varepsilon_1} = y_{\Gamma_1}$ (рис. 6).

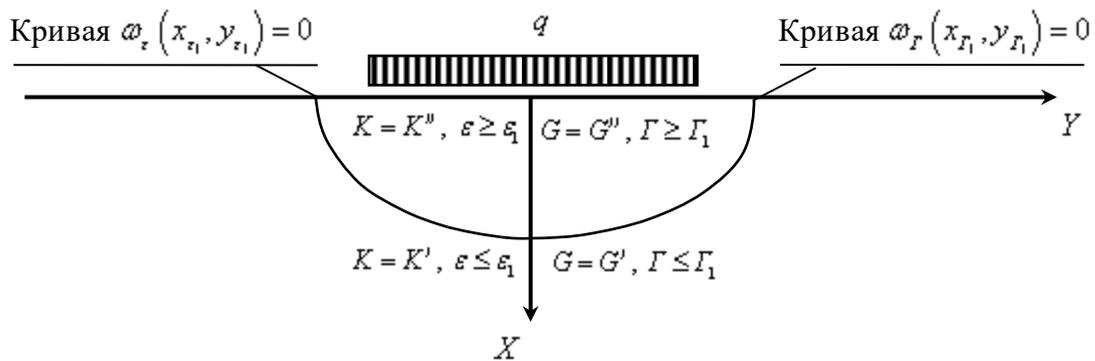


Рисунок 6 - Полупространство в условиях плоской деформации. Случай V

В точках полупространства, для которых $x \geq x_{\Gamma_1} = x_{\varepsilon_1}$; $y \geq y_{\Gamma_1} = y_{\varepsilon_1}$ сплошная среда деформируется по закону $K = K^I$, $G = G^I$, то есть здесь $\varepsilon(x, y) \leq \varepsilon_1$ и $\Gamma(x, y) \leq \Gamma_1$. В точках полупространства, для которых $x \leq x_{\Gamma_1} = x_{\varepsilon_1}$; $y \leq y_{\Gamma_1} = y_{\varepsilon_1}$ сплошная среда деформируется по закону $K = K^II$, $G = G^II$, то есть здесь $\varepsilon(x, y) \geq \varepsilon_1$ и $\Gamma(x, y) \geq \Gamma_1$.

2. Путём сравнения первого инварианта тензора напряжений и первого инварианта тензора деформаций, а также интенсивности касательных напряжений и интенсивности деформаций сдвига для геометрически линейной модели, либо первого инварианта тензора обобщённых напряжений и первого инварианта тензора нелинейных деформаций, а также интенсивности обобщённых касательных напряжений и интенсивности нелинейных деформаций сдвига для геометрически нелинейной модели, вычисленных в точках сплошной среды по напряжениям и деформациям, с их значениями на диаграммах объёмного и сдвигового деформирования, оцениваем правильность полученного решения.

Замечание. Не исключается вариант, при котором кривые излома объёмных и сдвиговых деформаций пересекаются (рис. 7). В случае, показанном на рис. 7 на участках $A-B$ и $C-D$ имеем случай I, на участке $B-C$ имеем случай III, в точках B и C имеем случай V.

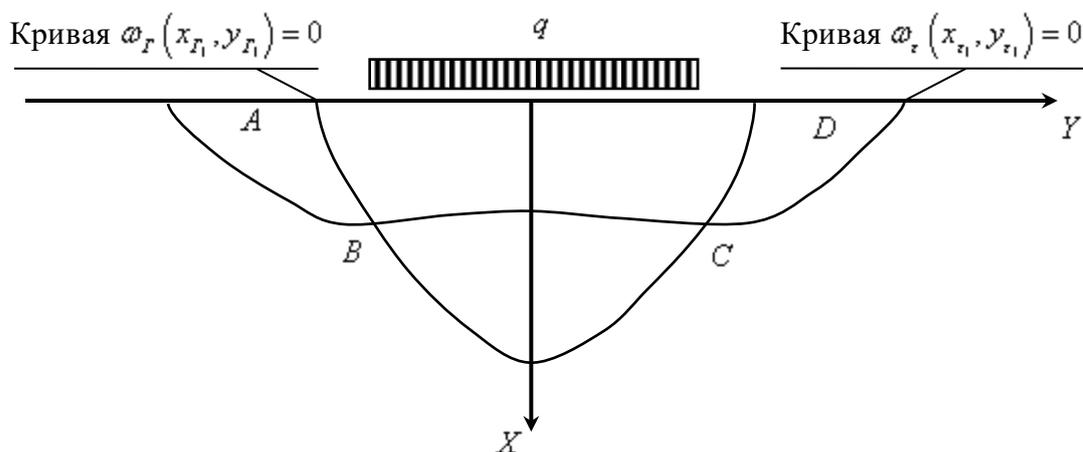


Рисунок 7 - Полупространство в условиях плоской деформации. Пересечение кривых излома объёмных и сдвиговых деформаций

Заключение. Сформулированный алгоритм решения задачи может найти применение при определении напряжённо-деформированного состояния не только сплошной среды, но и элементов строительных и машиностроительных конструкций, находящихся в условиях осесимметричного деформирования, как

с учётом, так и без учёта геометрической нелинейности, физические соотношения для которых и в отношении объёмных деформаций, и в отношении сдвиговых деформаций описываются нелинейными законами, аппроксимируемыми билинейными функциями.

Библиографический список:

1. Хан Х.Г. Теория упругости: Основы линейной теории и её применения: Пер. с нем. М.: Мир, 1988. 344 с., ил.
2. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М., Наука, 1975. 575 с.
3. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука. 1970. 939с.
4. Филоненко-Бородич М.М. Теория упругости. М.: Физматгиз, 1959. 364 с.
5. Папкович П.Ф. Теория упругости. М.-Л.: Оборонгиз. 1939. 643 с.
6. Ляв А. Е. Математическая теория упругости. М. Л., 1935. 672 с.
7. Трэффтц Е. Математическая теория упругости. Перев. с нем., ГТТИ, Москва, 1934.
8. Бакушев С.В. Аппроксимация диаграмм деформирования билинейными функциями // Строительная механика и расчёт сооружений. 2019. №2 (283). С.2-11.
9. Бакушев С.В. Аппроксимация диаграмм деформирования квадратичными функциями. // Строительная механика и расчёт сооружений. 2020. №3 (290). С. 2-14. DOI: 10.37538/0039-2383.2020.3.2.14.
10. Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения и краевые задачи механики деформируемого твёрдого тела. М.: ЛЕНАНД. 2020. 304 с.
11. Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды для плоской деформации в декартовых координатах при билинейной аппроксимации замыкающих уравнений (геометрически линейная модель) // Региональная архитектура и строительство. 2019. №1(38). С.76-85.
12. Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды для плоской деформации в декартовых координатах при билинейной

аппроксимации замыкающих уравнений (геометрически нелинейная модель) // Региональная архитектура и строительство. 2019. №2(39). С.86-100.