

УДК 539.371

**СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ПЛОСКИХ  
НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН ДЕФОРМАЦИЙ В СПЛОШНОЙ СРЕДЕ,  
ОПИСЫВАЕМОЙ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ДЕФОРМАЦИОННОЙ  
ТЕОРИЕЙ ПЛАСТИЧНОСТИ БЕТОНА**

*Бакушев Сергей Васильевич,*

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,  
г. Пенза,*

*доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».*

**Аннотация**

Статья посвящена вычислению скоростей распространения плоских одномерных упругопластических волн деформаций слабого разрыва в сплошной среде, механическое поведение которой описывается уравнениями модифицированной деформационной теории пластичности бетона, как с учётом, так и без учёта геометрической нелинейности (в смысле В.В. Новожилова). Скорости распространения плоских одномерных волн деформаций слабого разрыва в бетонном массиве существенно определяется как значением механических констант бетона, так и характером их изменения по мере возрастания нагрузки. Учёт геометрической нелинейности мало, вообще говоря, влияет на величину скоростей плоских одномерных волн деформаций в бетонном массиве, но, вместе с тем, приводит к снижению значения скоростей волн. Результаты исследований могут быть использованы при решении задач динамического расчёта зданий и сооружений.

**Ключевые слова:** волны деформаций, скорости распространения, бетонный массив, плоская одномерная деформация, геометрическая линейность, геометрическая нелинейность.

# PROPAGATION VELOCITIES OF ONE-DIMENSIONAL PLANE NONLINEAR DEFORMATION WAVES IN A CONTINUOUS MEDIUM DESCRIBED BY THE MODIFIED DEFORMATION THEORY OF CONCRETE PLASTICITY

*Bakushev Sergey Vasilevich,*

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,*

*Doctor of Sciences, Professor of the department "Mechanics".*

## **Abstract**

The article is devoted to the calculation of the propagation velocities of planar one-dimensional elastic-plastic waves of weak rupture deformations in a continuous medium, the mechanical behavior of which is described by the equations of the modified deformation theory of concrete plasticity, both taking into account and without taking into account geometric nonlinearity (in the sense of V.V. Novozhilov). The propagation rate of flat one-dimensional waves of weak rupture deformations in a concrete mass is significantly determined both by the value of the mechanical constants of concrete and by the nature of their change as the load increases. Taking into account geometric nonlinearity has little, generally speaking, effect on the magnitude of the velocities of plane one-dimensional waves of deformations in a concrete array, but, at the same time, leads to a decrease in the value of wave velocities. The results of the research can be used in solving the problems of dynamic calculation of buildings and structures.

**Keywords:** waves of deformations, propagation speed, concrete array, flat one-dimensional deformation, geometric linearity, geometric non-linearity.

## **Введение.**

Конструкции из бетона и бетонные массивы достаточно часто подвергаются динамическим воздействиям. При этом по конструкции распространяются различного рода упругие и упругопластические волны деформаций слабого и сильного разрыва: продольные, поперечные, изгибные,

крутильные, поверхностные, волны Лява и так далее. Если математическая модель деформирования бетона описывается нелинейными диаграммами объёмного и сдвигового деформирования, то волны деформаций будут нелинейными, то есть упругопластическими. Исследованию процесса распространения волн деформаций в деформируемых телах посвящены многочисленные исследования, в частности, работы профессора Х.А. Рахматулина [1], а также работы [2 - 7] и так далее.

Основной характеристикой волны деформаций является скорость её распространения.

### **Определение скоростей распространения волн деформаций.**

Для определения скоростей распространения одномерных волн деформаций - нестационарных поверхностей сильных разрывов вторых производных перемещений, являющихся, вообще говоря, поверхностями слабых разрывов деформаций, напряжений и скоростей частиц - воспользуемся кинематическими и динамическими условиями совместности [8].

Пусть  $\omega(x,t) = 0$  - уравнение линии разрыва на фазовой плоскости  $xot$ . Обозначая символом [...] скачок функций при переходе через линию  $\omega(x,t) = 0$  и, применяя кинематические условия совместности

$$\left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2 \partial x_k^2} \right] = \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \lambda_u \quad (1)$$

к уравнениям динамическим уравнениям равновесия при одномерном плоском деформировании сплошной среды, получим динамическое условие совместности

$$\left[ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] = \frac{a}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]. \quad (2)$$

Учитывая (1), соотношение (2) можно переписать в следующем виде:

$$\left( \frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 \lambda_u = \frac{a}{\rho} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \lambda_u. \quad (3)$$

Поскольку коэффициент прерывности  $\lambda_u \neq 0$  и, учитывая, что скорость распространения поверхности разрыва  $\omega(x,t)=0$  определяется выражением

$N^2 = \left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 / \left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2$ , то из соотношения (3) получаем:

$$N^2 = \frac{a}{\rho}. \quad (4)$$

Формула (4) определяет скорости распространения плоских одномерных волн деформаций слабого разрыва.

### Математическая модель бетона.

В данной работе рассматриваются вопросы определения скоростей распространений одномерных плоских геометрически линейных и геометрически-нелинейных волн деформаций слабого разрыва в сплошной среде, механическое поведение которой описывается уравнениями модифицированной деформационной теории пластичности бетона [9].

Запись деформационных соотношений модифицированной деформационной теории пластичности бетона в форме перекрёстных зависимостей между первыми и вторыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций  $T = T(\varepsilon, \Gamma)$ ,  $\sigma = \sigma(\varepsilon, \Gamma)$  для геометрически линейной модели имеет вид [9]:

$$T = G(\varepsilon, \Gamma) \cdot \Gamma; \quad \sigma = 3K(\varepsilon, \Gamma) \cdot \varepsilon, \quad (5)$$

где  $G(\varepsilon, \Gamma) = G_0 D(\varepsilon, \Gamma)$ ,  $K(\varepsilon, \Gamma) = K_0 D(\varepsilon, \Gamma) \cdot (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^2)$ , (6)

причём

$$D(\varepsilon, \Gamma) = 1 - \frac{\frac{\Gamma}{\Gamma_c}}{\sqrt{\left[ f \frac{K_0}{G_0} \frac{\varepsilon}{\Gamma} (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^2) \right]^2 + 4 - f \frac{K_0}{G_0} \frac{\varepsilon}{\Gamma} (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^2)}}; \quad (7)$$

здесь

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}; \quad \varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}; \\
T &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2)}; \\
\Gamma &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 + \frac{3}{2}(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2)}; \\
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \dots, \quad \varepsilon_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{8}$$

При учёте геометрической нелинейности деформационные соотношения модифицированной деформационной теории бетона (5) имеют вид:

$$T^* = G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) \cdot \Gamma^*; \quad \sigma^* = 3K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) \cdot \varepsilon^*, \tag{9}$$

где  $G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) = G_0 D^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$ ,  $K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) = K_0 D^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) \cdot (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^{*2})$ ,  $\tag{10}$

причём

$$D^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) = 1 - \frac{\frac{\Gamma^*}{\Gamma_c}}{\sqrt{\left[ f \frac{K_0}{G_0} \frac{\varepsilon^*}{\Gamma^*} (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^{*2}) \right]^2 + 4 - f \frac{K_0}{G_0} \frac{\varepsilon^*}{\Gamma^*} (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^{*2})}}. \tag{11}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\sigma^* &= \sigma_{xx}^* + \sigma_{yy}^* + \sigma_{zz}^*; \quad \varepsilon = \varepsilon_{xx}^* + \varepsilon_{yy}^* + \varepsilon_{zz}^*; \\
T^* &= \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_{xx}^* - \sigma_{yy}^*)^2 + (\sigma_{yy}^* - \sigma_{zz}^*)^2 + (\sigma_{zz}^* - \sigma_{xx}^*)^2 + 6(\sigma_{xy}^{*2} + \sigma_{yz}^{*2} + \sigma_{zx}^{*2})}; \\
\Gamma^* &= \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_{xx}^* - \varepsilon_{yy}^*)^2 + (\varepsilon_{yy}^* - \varepsilon_{zz}^*)^2 + (\varepsilon_{zz}^* - \varepsilon_{xx}^*)^2 + \frac{3}{2}(\varepsilon_{xy}^{*2} + \varepsilon_{yz}^{*2} + \varepsilon_{zx}^{*2})}; \\
\varepsilon_{xx}^* &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right], \quad \dots, \quad \varepsilon_{zx}^* = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Формулы (9) записаны на основании гипотезы об эквивалентности формы записи замыкающих уравнений [10] суть которой состоит в том, что форма записи зависимостей между инвариантами тензоров деформаций и напряжений в геометрически линейных средах и форма записи зависимостей между инвариантами тензоров нелинейных деформаций и обобщённых напряжений в геометрически нелинейных средах одинакова. В этом случае, физические

зависимости для геометрически нелинейной модели деформационной теории пластичности бетона будут иметь вид (9), в которых  $K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) \Leftrightarrow K(\varepsilon, \Gamma)$ ,  $G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) \Leftrightarrow G(\varepsilon, \Gamma)$  (знак  $\Leftrightarrow$  означает тождество по форме).

В формулах (5), (6), (7), (9), (10), (11) обозначено:  $G_0$  – начальный модуль сдвига при чистом сдвиге;  $K_0$  – начальный коэффициент объёмного расширения-сжатия;  $\varepsilon_c$  – предельная объёмная деформация при чистом сдвиге;  $\tilde{g}_0^* = -\frac{1}{\Gamma_c^2}$  – модуль дилатации;  $\Gamma_s = \Gamma_c k_\lambda$  – предельная интенсивность деформаций сдвига;  $\Gamma_c$  – предельная интенсивность деформаций сдвига при чистом сдвиге;  $k_\lambda = \frac{1}{2}(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4})$  – коэффициент изменения предельного значения интенсивности касательных напряжений для рассматриваемого вида напряжённого состояния по сравнению с предельным значением интенсивности касательных напряжений при чистом сдвиге;  $\lambda$  – параметр,  $\lambda = -f \frac{\sigma}{3T}$ ;  $f$  – аналог коэффициента внутреннего трения,  $f = \frac{3T_c(R_c - R_p)}{R_c R_p}$ ;  $R_c$  – предел прочности при одноосном сжатии;  $R_p$  – предел прочности при одноосном растяжении;  $T_c = \sqrt{\frac{1}{3} R_c R_p}$  – предел прочности при чистом сдвиге.

Существенно заметить, что компоненты тензора обобщённых напряжений  $\sigma_{ij}^*$  связаны с истинными напряжениями  $\sigma_{ij}$ , действующими по граням косоугольного параллелепипеда, рёбра которого до деформации были параллельны осям декартовой системы координат  $XYZ$ , соотношениями:

$$\sigma_{ij}^* = k_{ij} = \frac{1}{1 + E_j} \frac{A_i^*}{A_i} \sigma_{ij}, \quad i = x, y, z; \quad j = x, y, z; \quad (\text{не суммировать})$$

здесь  $E_j$  – относительное удлинение волокон сплошной среды, параллельных до деформации осям декартовой системы координат:

$E_j = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{jj}} - 1$ ,  $j = x, y, z$ ;  $A_i^*/A_i$  - отношение площадей элементарных площадок, выделенных в сплошной среде после деформации, к их площадям до деформации, которые до деформации были перпендикулярны осям декартовой системы координат XYZ:  $A_i^* = A_i \sqrt{(1 + 2\varepsilon_{jj})(1 + 2\varepsilon_{kk}) - \varepsilon_{jk}^2}$ ,  $i, j, k = x, y, z$  (круговая перестановка индексов).

### Динамические уравнения равновесия.

При плоской одномерной деформации  $u = u(x)$ ,  $v = 0$ ,  $w = 0$  система динамических уравнений равновесия в перемещениях сводится к одному уравнению [11], имеющему, для геометрически линейной модели следующий вид:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (13)$$

Здесь

$$a = \left( K + \frac{4}{3} G \right) + \left[ \left( \frac{\partial K}{\partial \varepsilon} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\partial K}{\partial \Gamma} \text{Sign}(\varepsilon_{xx}) \right) + \frac{4}{3} \left( \frac{\partial G}{\partial \varepsilon} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\partial G}{\partial \Gamma} \text{Sign}(\varepsilon_{xx}) \right) \right] \varepsilon_{xx},$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Уравнения (13) описывают процесс распространение плоских одномерных волн деформаций слабого разрыва в геометрически линейной и нелинейно-упругой сплошной среде.

Для геометрически нелинейной модели сплошной среды разрешающее динамическое уравнение в перемещениях имеет следующую форму:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) F_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (14)$$

Здесь  $F_x$  - удельная объёмная сила в состоянии до деформации;

$$a = \left( K^* + \frac{4}{3} G^* \right) \varepsilon_{xx}^* + \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \left[ \left( K^* + \frac{4}{3} G^* \right) + \left( \frac{\partial K^*}{\partial \varepsilon^*} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\partial K^*}{\partial \Gamma^*} \text{Sign}(\varepsilon_{xx}^*) \right) \varepsilon_{xx}^* + \frac{4}{3} \left( \frac{\partial G^*}{\partial \varepsilon^*} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\partial G^*}{\partial \Gamma^*} \text{Sign}(\varepsilon_{xx}^*) \right) \varepsilon_{xx}^* \right],$$

$$\varepsilon_{xx}^* = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2.$$

Уравнение (14) описывает процесс распространения плоских одномерных волн деформаций слабого разрыва в геометрически нелинейной и нелинейно-упругой сплошной среде.

### Построение графика скоростей волн деформаций.

Построим графики скоростей плоских одномерных волн деформаций в зависимости от уровня развития деформаций в бетоне и значений его механических констант. В соответствии с деформационными зависимостями (5), (6) и (7), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial \varepsilon} &= K_0 (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^2) \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}; & \frac{\partial G}{\partial \varepsilon} &= G_0 \frac{\partial D}{\partial \varepsilon}; & \frac{\partial G}{\partial \Gamma} &= G_0 \frac{\partial D}{\partial \Gamma}; \\ \frac{\partial K}{\partial \Gamma} &= 2K_0 \tilde{g}_0 \Gamma \cdot D(\varepsilon, \Gamma) + K_0 (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^2) \frac{\partial D}{\partial \Gamma}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь

$$\frac{\partial D}{\partial \varepsilon} = \frac{f \frac{K_0}{G_0 \Gamma_c} (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^2) \left\{ \frac{f \frac{K_0}{G_0} \frac{\varepsilon}{\Gamma} (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^2)}{\sqrt{\left[ f \frac{K_0}{G_0} \frac{\varepsilon}{\Gamma} (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^2) \right]^2 + 4}} - 1 \right\}}{\left\{ \sqrt{\left[ f \frac{K_0}{G_0} \frac{\varepsilon}{\Gamma} (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^2) \right]^2 + 4} - f \frac{K_0}{G_0} \frac{\varepsilon}{\Gamma} (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^2) \right\}^2};$$



$$\frac{\partial D}{\partial \Gamma} = -\frac{\frac{1}{\Gamma_c}}{\sqrt{\left[ f \frac{K_0}{G_0} \frac{\varepsilon}{\Gamma} (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^2) \right]^2 + 4} - f \frac{K_0}{G_0} \frac{\varepsilon}{\Gamma} (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^2)} +$$

$$+ \frac{\frac{\Gamma}{\Gamma_c} f \frac{K_0}{G_0} \varepsilon \left( 2\tilde{g}_0 - \frac{1 + \tilde{g}_0 \Gamma^2}{\Gamma^2} \right) \left[ 2f \frac{K_0}{G_0} \frac{\varepsilon}{\Gamma} (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^2) - 1 \right]}{\left\{ \sqrt{\left[ f \frac{K_0}{G_0} \frac{\varepsilon}{\Gamma} (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^2) \right]^2 + 4} - f \frac{K_0}{G_0} \frac{\varepsilon}{\Gamma} (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^2) \right\}^2}.$$

Используя деформационные зависимости (9), (10) и (11) получим:

$$\frac{\partial K^*}{\partial \varepsilon^*} = K_0 (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^{*2}) \frac{\partial D^*}{\partial \varepsilon^*}; \quad \frac{\partial G^*}{\partial \varepsilon^*} = G_0 \frac{\partial D^*}{\partial \varepsilon^*}; \quad \frac{\partial G^*}{\partial \Gamma^*} = G_0 \frac{\partial D^*}{\partial \Gamma^*}$$

$$\frac{\partial K^*}{\partial \Gamma^*} = 2K_0 \tilde{g}_0 \Gamma^* \cdot D^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) + K_0 (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^{*2}) \frac{\partial D^*}{\partial \Gamma^*}. \quad (16)$$

Здесь

$$\frac{\partial D^*}{\partial \varepsilon^*} = \frac{f \frac{K_0}{G_0 \Gamma_c} (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^{*2}) \left\{ \frac{f \frac{K_0}{G_0} \frac{\varepsilon^*}{\Gamma^*} (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^{*2})}{\sqrt{\left[ f \frac{K_0}{G_0} \frac{\varepsilon^*}{\Gamma^*} (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^{*2}) \right]^2 + 4}} - 1 \right\}}{\left\{ \sqrt{\left[ f \frac{K_0}{G_0} \frac{\varepsilon^*}{\Gamma^*} (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^{*2}) \right]^2 + 4} - f \frac{K_0}{G_0} \frac{\varepsilon^*}{\Gamma^*} (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^{*2}) \right\}^2};$$

$$\frac{\partial D^*}{\partial \Gamma^*} = -\frac{\frac{1}{\Gamma_c}}{\sqrt{\left[ f \frac{K_0}{G_0} \frac{\varepsilon^*}{\Gamma^*} (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^{*2}) \right]^2 + 4} - f \frac{K_0}{G_0} \frac{\varepsilon^*}{\Gamma^*} (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^{*2})} +$$

$$+ \frac{\frac{\Gamma^*}{\Gamma_c} f \frac{K_0}{G_0} \varepsilon^* \left( 2\tilde{g}_0 - \frac{1 + \tilde{g}_0 \Gamma^{*2}}{\Gamma^{*2}} \right) \left[ 2f \frac{K_0}{G_0} \frac{\varepsilon^*}{\Gamma^*} (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^{*2}) - 1 \right]}{\left\{ \sqrt{\left[ f \frac{K_0}{G_0} \frac{\varepsilon^*}{\Gamma^*} (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^{*2}) \right]^2 + 4} - f \frac{K_0}{G_0} \frac{\varepsilon^*}{\Gamma^*} (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^{*2}) \right\}^2}.$$

При плоской одномерной деформации бетонного массива без учёта геометрической нелинейности  $\varepsilon_1 \neq 0$ ;  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ , то есть  $\varepsilon = \varepsilon_1$ ;  $\Gamma = \frac{2\varepsilon_1}{\sqrt{3}} \text{Sign } \varepsilon_1$ .

При учёте геометрической нелинейности  $\varepsilon_1^* \neq 0$ ;  $\varepsilon_2^* = \varepsilon_3^* = 0$ , то есть  $\varepsilon^* = \varepsilon_1^*$ ;  $\Gamma^* = \frac{2\varepsilon_1^*}{\sqrt{3}} \text{Sign } \varepsilon_1^*$ . Значения механических констант примем

следующими:  $R_c = 20 \text{ МПа}$ ;  $R_p = 2 \text{ МПа}$ ;  $K_0 = 1,4 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ;  $G_0 = 1,2 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ;

$\Gamma_c = 0,583 \cdot 10^{-3}$ . При этом получим  $\tilde{g}_0 = -\frac{1}{\Gamma_c^2} = -2942136,992$ ;

$T_c = \sqrt{\frac{1}{3} R_c R_p} = 3,65 \text{ МПа}$ ;  $f = \frac{3T_c (R_c - R_p)}{R_c R_p} = 4,93$ . Плотность бетона

$\rho = 2400 \text{ кг/м}^3$ .

Для определения возможного интервала изменений интенсивности деформаций сдвига, воспользуемся результатами работы [9], в частности неравенством

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma}{\Gamma_c} + f \frac{K_0}{G_0} \frac{n\sqrt{3}}{2m} \cdot \text{Sign } \varepsilon_1 \cdot (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^2) - \\ - \sqrt{\left[ f \frac{K_0}{G_0} \frac{n\sqrt{3}}{2m} \cdot \text{Sign } \varepsilon_1 \cdot (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^2) \right]^2 + 4} \leq 0 \end{aligned} \quad (17)$$

обеспечивающим выполнение уравнений деформационной теории пластичности бетона на интервале  $0 \leq \Gamma \leq \Gamma_s$ , то есть до достижения им состояния предельного равновесия.

Для случая плоской одномерной деформации сжатия бетонного массива  $\varepsilon_1 < 0$ , имеем  $n = 1$ ,  $m = 1$ . При этом неравенство (17) получает вид:

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_c} - f \frac{K_0}{G_0} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^2) - \sqrt{\left[ -f \frac{K_0}{G_0} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (1 + \tilde{g}_0 \Gamma^2) \right]^2 + 4} \leq 0. \quad (18)$$

График левой части неравенства (18) показан на рис. 1.

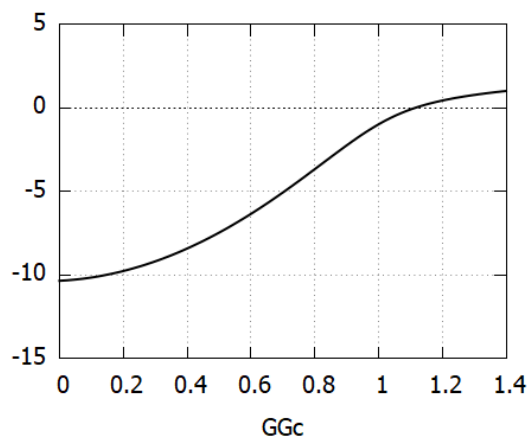


Рисунок 1 - График левой части неравенства (18)

На рис. 2 показан график скоростей  $N$  одномерных плоских волн деформаций в бетонном массиве в зависимости от уровня деформированного состояния  $\frac{\Gamma}{\Gamma_c}$  обозначенного на графике переменной  $GGc$ .

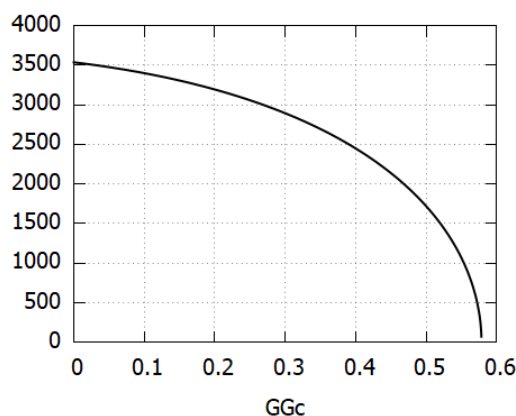


Рисунок 2 - График скоростей  $N$  одномерных плоских волн деформаций в бетонном массиве

Следует отметить, что учёт геометрической нелинейности мало, вообще говоря, влияет на величину скоростей плоских одномерных волн деформаций в бетонном массиве, что подтверждается в приведённой ниже таблице, но, вместе с тем, приводит к снижению значения скоростей волн.

Таблица 1

	$\Gamma/\Gamma_c = 0,1$	$\Gamma/\Gamma_c = 0,2$	$\Gamma/\Gamma_c = 0,3$	$\Gamma/\Gamma_c = 0,4$	$\Gamma/\Gamma_c = 0,5$
<i>N</i> , м/сек. Геометрически линейная модель.	3398,39	3192,51	2892,41	2447,59	1718,38
<i>N</i> , м/сек. Геометрически нелинейная модель.	3398,13	3192,00	2891,66	2446,64	1717,19

**Выводы.**

Скорость распространения плоских одномерных волн деформаций слабого разрыва в бетонном массиве существенно определяется как значением механических констант бетона, так и характером их изменения по мере возрастания нагрузки. Учёт геометрической нелинейности мало, вообще говоря, влияет на величину скоростей плоских одномерных волн деформаций в бетонном массиве, но, вместе с тем, приводит к снижению значения скоростей волн.

Результаты исследований могут быть использованы при решении задач динамического расчёта зданий и сооружений.

**Библиографический список:**

1. Рахматулин Х.А. Прочность и разрушение при кратковременных нагрузках / Х.А. Рахматулин, Е.И. Шемякин, Ю.А. Демьянов, А.В. Звягин : учеб. пособие. М.: Университетская книга; Логос, 2008. – 624 с.

2. Галин Г.Я. О распространении возмущений в средах с нелинейной зависимостью напряжений от деформации и температуры // Доклады АН СССР, 1958. Т. 120. №4 С. 730-733.

3. Куликовский А.Г., Свешникова Е.И. Нелинейные волны в упругих средах. М.: Московский лицей, 1998.
4. Никифоровский В.С., Шемякин Е.И. Динамическое разрушение твёрдых тел. Новосибирск: Наука, 1979.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир. 1975.
6. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986.
7. Бакушев С.В. К вопросу об определении скоростей трёхмерных волн деформаций в нелинейной механике деформируемого твёрдого тела // Строительная механика и расчёт сооружений. 1992. №3. С.36-41.
8. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.4 Ч.2. М. «Наука», 1981, 550 с.
9. Бакушев С.В. Модифицированная деформационная теория пластичности бетона. // Промышленное и гражданское строительство. 2022. № 2. С. 17-23. DOI: 10.33622/0869-7019.2022.02.17-23.
10. Бакушев С.В. Геометрически и физически нелинейная механика сплошной среды: Плоская задача. М.: Книжный дом «Либроком», 2013. 312 с.
11. Бакушев С.В. Некоторые вопросы динамики геометрически-нелинейных сплошных сред. // Тр. ин-та / ЦНИИСК им. В.А.Кучеренко - Методы расчёта и оптимизации строительных конструкций на ЭВМ. 1990. С.191-198.