

УДК 624.04

ПРАКТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ФИБРОАРМИРОВАННЫХ БАЛОК

Шейн Александр Иванович,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Механика».

Азимова Яна Александровна,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

аспирант.

Аннотация.

В работе строится и реализуется алгоритм решения оптимизационной задачи для композита (фибробетона). Алгоритм решения основан на направленном применении пакета символьной математики Maple 21 на этапе формирования математической модели задачи и конечно-элементном представлении поведения балочной системы для решения плоской задачи теории упругости композитной системы. Показана реализация этой модели для получения оптимальных схем армирования композитов. В работе выполнена оптимизация количества арматурной фибры балочной композитной системы. Приведены численные результаты решения оптимизационной задачи.

Ключевые слова: фибробетон, композит, оптимизация армирования, МКЭ, символьная математика.

PRACTICAL OPTIMIZATION FIBRO-REINFORCED BEAMS

Shein Alexander Ivanovich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor, Head of the department “Mechanics”.

Asimova Yana Alexandrovna,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

postgraduate.

Abstract.

The paper builds and implements an algorithm for solving an optimization problem for a composite (fiber concrete). The solution algorithm is based on the directed application of the symbolic mathematics package Maple 21 at the stage of forming a mathematical model of the problem and a finite element representation of the behavior of a beam system to solve a planar problem of the elasticity theory of a composite system. The implementation of this model for obtaining optimal reinforcement schemes of composites is shown. The paper optimizes the amount of reinforcement fiber of the beam composite system. Numerical results of solving the optimization problem are presented.

Keywords: fiber concrete, composite, reinforcement optimization, FEM, symbolic mathematics

Введение. Железобетон, обладая высокими эксплуатационными характеристиками и сравнительно невысокой стоимостью, занял лидирующую позицию в строительной отрасли. В связи с огромными объемами использования этого материала большое значение имеет минимизация его стоимости при сохранении прочностных и жесткостных характеристик. При этом наиболее существенную часть стоимости железобетона составляет стоимость арматуры.

Железобетон можно рассматривать как композитный материал, в котором матрица представлена цементным связующим, песчаным и щебеночным наполнителями, а армирование выполняется стальной стержневой арматурой или стальной фиброй. Для композита в виде фибробетона, так же, как и для железобетона, недостаточная прочность матрицы компенсируется армированием. В ряде случаев более долговечную эксплуатацию армированной

бетонной конструкции обеспечивает применение нестального армирования. При этом используются пластиковые волокна или стержни, (базальтоволокно и стекловолокно) или полипропиленовые волокна, микросинтетические волокна.

Известно, что матрица бетона хорошо работает в сжатых зонах, но слабо сопротивляется разрыву. Очевидно, что свойства армированного бетона как композита в конструкции можно существенно улучшать если правильно, оптимально распределять арматуру по телу конструкции. Актуальность решения данной задачи резко возрастает при переходе к 3D-технологиям строительства и фибробетону.

Математический пакет Maple предоставляет возможность программировать в его среде, создавая пакеты символьных процедур, направленные на подготовку математической модели оптимизации композита и решение сложных оптимизационных задач с использованием встроенных функций и объектно-ориентированного символьного подхода.

В работах [1-3] показано, что виртуальное тестирование реальных композитных конструкций может не только уменьшить затраты на физические эксперименты, но и позволит обеспечить экономичную гибкость проектирования. В работе [6] приведено решение задачи оптимизации стержневой арматуры балок. В статье [5] описаны теоретические основы оптимизации композитов.

Актуальность данной работы заключается в построении и реализации алгоритма решения оптимизационной задачи для композитных несущих строительных конструкций, направленного применения символьной математики на этапе формирования математической модели с конечно-элементным представлением поведения балочной системы для решения плоской задачи теории упругости композитной системы.

В Maple реализовано несколько функций для работы с символьными вычислениями, которые оказываются просто необходимыми при построении оптимизационных задач. Здесь следует выделить функции матричных

вычислений, функции решения символьных уравнений и систем, функции преобразования систем уравнений из матричной формы к отдельным строкам.

Цель работы заключается в создании оптимизационной модели композита с применением математической вычислительной программы Maple 21 и в реализации этой модели для получения оптимальных схем армирования композитов.

Построение модели и алгоритма оптимизации. В данной работе выполнена оптимизация количества арматурной фибры композитной системы, находящейся в условиях плоского напряженного состояния (типа железобетонной балки, балки-стенки, арки и т.п). Решение производилось при помощи пакета «Оптимизация» математического комплекса Maple. Программа NLPsolve, представленная в пакете «Оптимизация», позволяет найти глобальный экстремум нелинейной целевой функции при наличии нелинейных ограничений.

Для балок или балок стенок в условиях плоского напряженного состояния, матрицы жесткости конечных элементов композита являются функциями

$$K_i = f(E_{np}(\mu_i), \nu, \delta, x_{ij}, y_{ij}) \quad (1)$$

где E_{np} – приведенный модуль упругости композита, μ_i - доля армирования или тела матрицы i элемента, ν - коэффициент Пуассона, δ - толщина балки, x_{ij} , y_{ij} – координаты узлов i элемента.

Приведенный модуль упругости плоского конечного элемента композита можно определить [] по модели Фойхта для моноармированных фибробетонов по формуле:

$$E^{np} = \mu_1 \cdot E_1 + \mu_2 \cdot E_2, \quad (2)$$

где E_1 , E_2 – модули упругости бетона и фибры соответственно; μ_1 , μ_2 – объемная доля бетона и фибры в данном типе конечного элемента композита, соответственно.

Для полиармированных фибробетонов модуль упругости КЭ определяется с помощью формулы:

$$E^{np} = \mu_1 \cdot E_1 + \mu_2 \cdot E_2 + \mu_3 \cdot E_3, \quad (3)$$

здесь μ_1, μ_2, μ_3 – объемная доля бетона, первой и второй фибры в композите, соответственно.

Общая математическая модель задачи оптимизации армирования композита может быть записана в виде задачи поиска суммы минимальных объемных совокупных долей фибры в армированных объемах композита

$$\min f(\mu_i) = \sum \mu_{si} V_i \quad (4)$$

$$\text{при } K(\mu_{si})U = P, \quad (5)$$

$$U_{max} \geq U \geq U_{min} \quad (6)$$

$$[\varepsilon^+] \geq \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}, \quad (7)$$

$$[\varepsilon^-] \leq \frac{1}{2}(\varepsilon_{xi} + \varepsilon_{yi}) - \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_{xi} - \varepsilon_{yi})^2 + \gamma_{xyi}^2}, \quad (7')$$

здесь, μ_{si} – искомые доли армирования групп конечных элементов i , V_i – объемы этих групп конечных элементов; $K(\mu_{si})$ – матрица жесткости фибробетона, зависящая от искомым параметров армирования; U – неизвестный вектор узловых перемещений композита; U_{max} – вектор максимальных перемещений, подсчитанный при заданном минимальном армировании композита; U_{min} – вектор минимальных перемещений, подсчитанный при заданном максимальном армировании композита.

U – неизвестный вектор узловых перемещений композита;

P – заданный вектор узловых нагрузок.

$[\varepsilon^+]$, $[\varepsilon^-]$ – деформация, соответствующая разрыву и дроблению волокон бетона;

ε_{xi} , ε_{yi} и γ_{xyi} – деформации конечного элемента.

Армированные конечные элементы композита (зоны) можно наметить, выполнив предварительный расчет однородной конструкции. Первая зона соответствует чистому бетону без армирования. Вторую зону армируем

искомой фиброй с долей армирования $\mu(2)$, а доля бетона здесь $\mu(1)$. Третью зону – с долей $\mu(4)$ (бетон $\mu(3)$) и т.д.

При числе перемещений в пределах 1-2 сотен и использовании обычных компьютеров уравнения равновесия можно разрешить относительно этих перемещений в символьном виде

$$u_i = f(\mu_i, \nu, \delta, l, P) \quad (8)$$

и тогда задача оптимизации не будет содержать строгих равенств, а неравенства (6) преобразуются к виду

$$[u_i^+] \geq u_i(\mu_i, \nu, \delta, l, P) \geq [u_i^-]. \quad (9)$$

При этом, задача оптимизации зонального армирования примет вид:

$$\min f(\mu_i) = \sum \mu_{si} V_i \quad (10)$$

$$\text{при } [u_i^+] \geq u_i(\mu_i, \nu, \delta, l, P) \geq [u_i^-] \quad (11)$$

$$[\varepsilon^+] \geq \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2}, \quad (12)$$

$$[\varepsilon^-] \leq \frac{1}{2}(\varepsilon_{xi} + \varepsilon_{yi}) - \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_{xi} - \varepsilon_{yi})^2 + \gamma_{xyi}^2}. \quad (12')$$

Для расчета при кратковременном нагружении можно принять предельную сжимаемость $[\varepsilon^-] \approx 2,0 \cdot 10^{-3}$, предельную растяжимость при осевом растяжении $[\varepsilon^+] \approx (1,5 \div 3) \cdot 10^{-4}$, при изгибе и внецентренном сжатии $[\varepsilon^-] \approx 3,5 \cdot 10^{-3}$. Предельная растяжимость при изгибе существенно выше и краевые удлинения в этом случае могут вдвое превышать предельную растяжимость, т.е. ее можно принять равной $[\varepsilon^+] \approx 5 \cdot 10^{-4}$.

Ограничения на деформации (12) и (12'), выраженные в символьном виде, представляются чрезвычайно сложными и громоздкими выражениями. А для конечно элементной модели, состоящей из ста и более элементов, становятся просто громадными выражениями. Поэтому учет ограничений (12) и (12') целесообразно реализовывать одним из следующих двух способов. Для задач малой размерности: путем символьного решения уравнений (5),

нахождения (8) и реализации задачи оптимизации (10) – (12'). Для задач большой размерности – решаем задачу оптимизации с ограничениями по перемещениям (10) – (11) и последующей проверкой неравенств (12) – (12'). При их нарушении – пошагово увеличиваем μ_i соответствующих зон на $\Delta\mu_i$ до тех пор, пока неравенства не станут выполняться.

Реализация оптимизационных задач.

Исходные данные для расчета балки приведены в табл.1 и на рис. 1.

Таблица 1 – Исходные данные

L	1.2 м
h	0.12 м
δ	0.1 м
P	70000 Н
E(1)	$2.4 \cdot 10^{10}$ Па
E(2)	$\mu(2) \cdot 20 \cdot 10^{10} + (1 - \mu(2)) \cdot 2.4 \cdot 10^{10}$ Па
E(3)	$\mu(3) \cdot 20 \cdot 10^{10} + (1 - \mu(3)) \cdot 2.4 \cdot 10^{10}$ Па
V(1)	0,0072 м ³
V(2)	0,0018 м ³
v	0.333

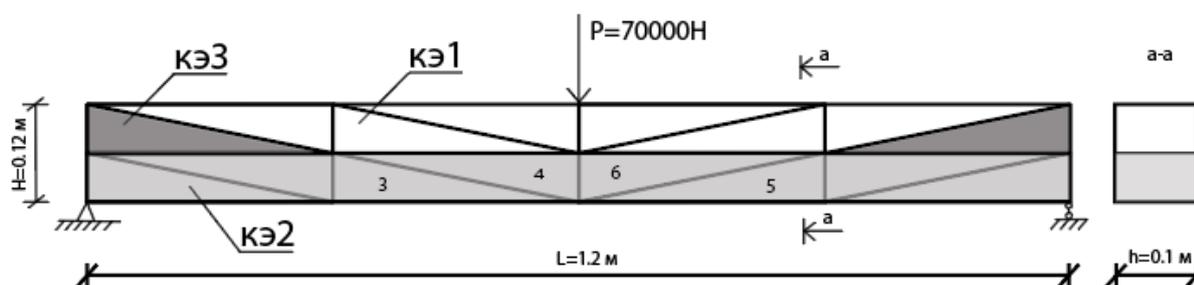


Рисунок 1 - Схема армированной фиброй балки

Здесь КЭ-1 – неармированные конечные элементы балки; КЭ-2 – армирование нижнего слоя; КЭ-3 – армирование от наклонных приопорных трещин.

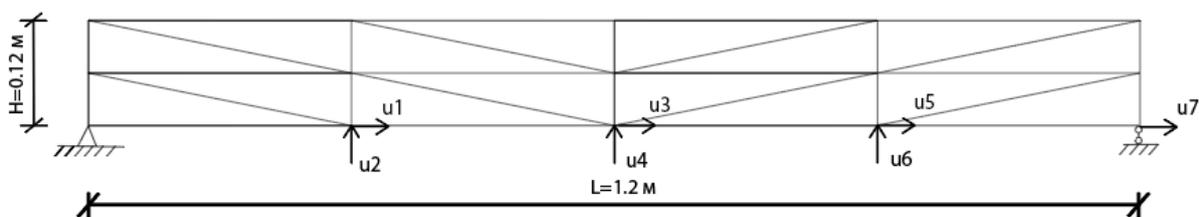


Рисунок 2 - Схема балки с перемещениями нижних узлов

По результатам решения задачу оптимизации с ограничениями по перемещениям (10) – (11) имеем:

$$\mu(2)=0,016; \mu(3)=0,00025;$$

$$U1 = 0.0000359906446981763; U2 = -0.000628423480450387;$$

$$U3 = 0.000123672495560973; U4 = -0.000953993502994372;$$

$$U5 = 0.000211354346602010; U6 = -0.000628423480721535;$$

$$U7 = 0.000247344992158734.$$

Производим проверку неравенств (12) – (12') для нижних элементов (элементы 3-6), находящихся в растянутой зоне. Проверку осуществляем для максимальной деформации $[\varepsilon^+] \approx 5 \cdot 10^{-4}$.

Для третьего и пятого элементов:

$$\varepsilon(\max 3) = 0,000173; \varepsilon(\max 5) = 0,000173; 0,000173 > [\varepsilon^+].$$

Расчетные деформации превышают предельно допустимые.

Для четвертого и шестого элементов:

$$\varepsilon(\max 4) = 0,000522; \varepsilon(\max 6) = 0,000522; [\varepsilon^+] \leq 0,000522.$$

Расчетные деформации превышают предельно допустимые. Следовательно, необходимо увеличить μ_i на $\Delta\mu_i$.

Увеличиваем $\mu(2)$ на 50%. Тогда:

$$\mu(2)=0,024; \mu(3)=0,00025;$$

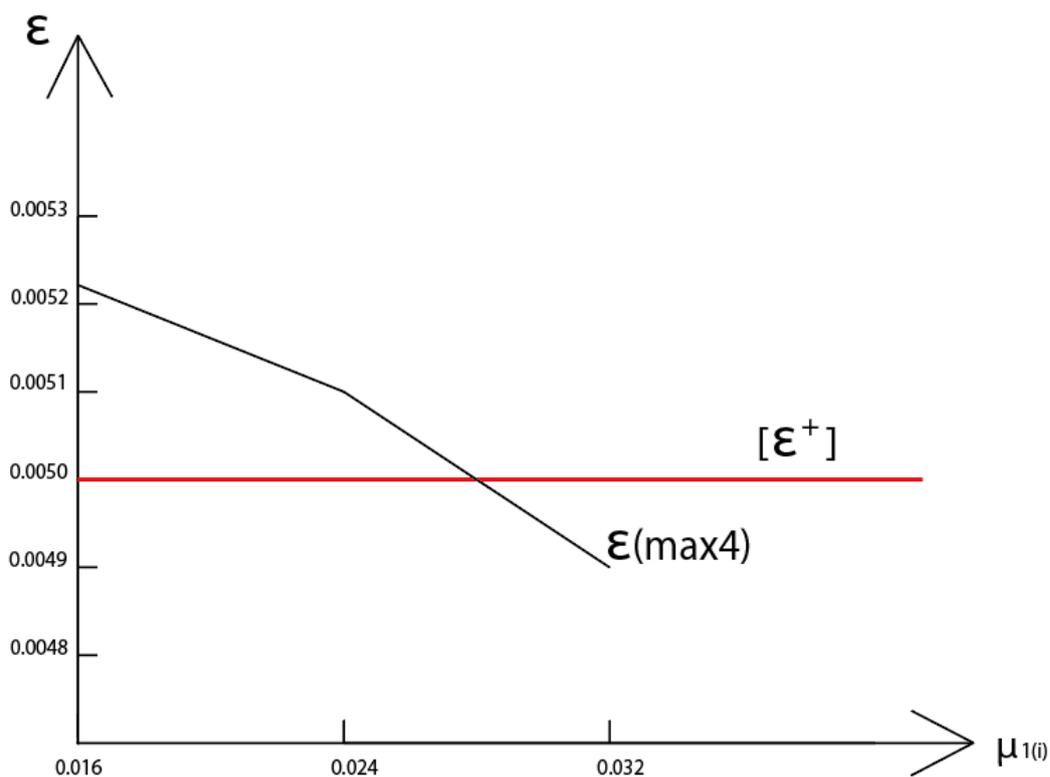


Рисунок 3 - Максимальные и расчетные деформации

Дальнейший расчет покажем в таблице 2.

Таблица 2 - Расчет армирования по предельным деформациям

N п/п	μ_i	U	ϵ^+	$[\epsilon^+]$	$\Delta\mu$	$\mu+\Delta\mu$
1	0,016	0.00003599 -0.0006284 0.0001236 -0.0009539 0.0002113 -0.0006284 0.0002473	$\epsilon(\max 3)=0,000173$ $\epsilon(\max 4)=0,000522$	0.0005	0.008	0.024
2	0.024	0.00003334 -0.0005960 0.0001145 -0.0009048 0.00019566 -0.0005960 0.00022902	$\epsilon(\max 3)=0,000169$ $\epsilon(\max 4)=0,000510$	0.0005	0.008	0.032
3	0.032	0.00008252 - 0.0010828 0.0002778 - 0.0009539 0.00021135- 0.0006284 0.00024734	$\epsilon(\max 3)=0,000165$ $\epsilon(\max 4)=0,000490$	0.0005	0	0.032

Условия выполнены. Принимаем $\mu(2)=3,2\%$; $\mu(3)=0,025\%$.

Выводы.

Разработана методика формирования математической задачи оптимизации композита на основе символьной математики Maple. Разработан и реализован надежный метод оптимизации армирования композита с учетом ограничений по перемещениям и деформациям. Работоспособность метода проверена на численном примере оптимизации армирования фибробетонной балки.

Библиографический список:

1. Johannes Reiner, Reza Vaziri. Structural analysis of composites with finite element codes: an overview of commonly used computational methods // Comprehensive Composite Materials II, Second Edition, Eight Volume Set. 2018. Т. 8. С. 61-84.
2. Meenu Teotia, R. K. Soni. Applications of finite element modelling in failure analysis of laminated glass composites: a review // Engineering Failure Analysis. 2018. С. 412-437.
3. Чернякин Сергей Алексеевич, Скворцов Юрий Васильевич. Анализ роста расслоений в композитных конструкциях // Сибирский аэрокосмический журнал. 2014. №4. С. 249-255.
4. Игнатъев Ю.Г. Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системе компьютерной математики Maple // Лекции для школы по математическому моделированию. Казань: Казанский университет. 2014. С. 298
5. Шейн А.И. Азимова Я.А. Оптимизация массы фибры фибробетонных конструкций [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2020. №11. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no11/stroitelnye-konstrukcii-zdaniya-i-sooruzheniya/11.9/at_download/file

6. Шейн А.И., Азимова Я.А. Оптимизация арматуры железобетонных конструкций в условиях плоского напряженного состояния [Электронный ресурс]// Моделирование и механика конструкций. 2019. №9. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no9/stroitel'naya-mehanika/9.5/at_download/file