

УДК 519.633

**АЛГОРИТМ РАСЧЁТА НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО
СОСТОЯНИЯ УПРУГОЙ В ОТНОШЕНИИ ОБЪЁМНЫХ И
НЕЛИНЕЙНОЙ В ОТНОШЕНИИ СДВИГОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ
СПЛОШНОЙ СРЕДЫ ПРИ БИЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ
ЗАМЫКАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ (ПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ В
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ)**

Бакушев Сергей Васильевич

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Аннотация.

Формулируется алгоритм определения напряжённо-деформированного состояния полупространства, находящегося в условиях плоской деформации в цилиндрической системе координат. Механическое поведение сплошной среды описывается в отношении объёмных деформаций линейным законом упругости, а в отношении сдвиговых деформаций – произвольным нелинейным законом, аппроксимируемым билинейной функцией. Математическая модель сплошной среды описывается как с учётом, так и без учёта геометрической нелинейности (в смысле В.В. Новожилова). Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды, находящейся в условиях плоской деформации, строятся в цилиндрических координатах в перемещениях. Алгоритм решения задачи, а также физические зависимости и дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях могут найти применение при определении напряжённо-деформированного состояния сплошных сред и элементов строительных и машиностроительных конструкций, находящихся в условиях плоской деформации и описываемые математическими моделями как с учётом, так и без учёта геометрической нелинейности, замыкающие уравнения физических соотношений для которых, построенные на основе

экспериментальных данных, аппроксимированы билинейными функциями в отношении сдвиговых деформаций и линейными функциями в отношении объёмных деформаций.

Ключевые слова: сплошная среда, плоская деформация, цилиндрические координаты, линейное объёмное и нелинейное сдвиговое деформирование, дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях, геометрическая линейность, геометрическая нелинейность, алгоритм решения задачи.

**ALGORITHM FOR CALCULATING THE STRESS-STRAIN STATE
ELASTIC WITH RESPECT TO VOLUMETRIC AND NONLINEAR WITH
RESPECT TO SHEAR DEFORMATIONS OF A CONTINUOUS MEDIUM
WITH BILINEAR APPROXIMATION OF CLOSING EQUATIONS (FLAT
DEFORMATION IN CYLINDRICAL COORDINATES)**

Bakushev Sergey Vasilevich

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor of the department "Mechanics".

Abstract.

An algorithm for determining the stress-strain state of a half-space under conditions of flat deformation in a cylindrical coordinate system is formulated. The mechanical behavior of a continuous medium is described in relation to volumetric deformations by the linear law of elasticity, and in relation to shear deformations by an arbitrary nonlinear law approximated by the bilinear function. The mathematical model of the continuous medium is described both taking into account and without taking into account geometric nonlinearity (in the sense of V.V. Novozhilov). Differential equilibrium equations of a continuous medium under conditions of flat deformation are constructed in cylindrical coordinates in displacements. The algorithm for solving the problem, as well as physical dependencies and differential equations of equilibrium in displacements can be used in determining the stress-strain state of continuous media and elements of building and engineering structures that

are in conditions of flat deformation and described by mathematical models both taking into account geometric nonlinearity, closing the equations of physical relations for which, built on the basis of experimental yes They are approximated by bilinear functions for shear deformations and linear functions for volumetric deformations.

Keywords: continuum, plane strain, cylindrical coordinates, linear volumetric and nonlinear shear deformation, differential equilibrium equations in displacements, geometric linearity, geometric nonlinearity, algorithm for solving a problem.

Введение. Решение задач механики деформируемого твёрдого тела – это, как правило, достаточно сложная многовариантная процедура, состоящая из нескольких этапов. Первый этап, связанный с постановкой задачи, должен включать формулировку задачи, разработку расчётной схемы, выбор исходных данных и результатов решения задачи. На втором этапе следует задачу сформулировать в терминах математики, то есть разработать расчётные уравнения (как правило, это дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений в частных производных), а также сформулировать краевые и начальные (если требуется) условия. Третий этап решения задачи следует посвятить разработке расчётного алгоритма, то есть разработать последовательность действий, однозначно приводящая к решению поставленной задачи. Четвёртый этап алгоритма должен быть связан с программной реализацией разработанного алгоритма, то есть необходимо написать расчётную программу на одном из языков программирования, ввести эту программу в компьютер, отладить, решить тестовые примеры и разработать удобный пользовательский интерфейс. На пятом этапе можно приступить к решению поставленной задачи.

В ряде работ автора реализуется второй этап сформулированной выше процедуры для решения физически и геометрически нелинейных задач механики деформируемого твёрдого тела. В основе разрабатываемой методики лежит представление о возможности замены нелинейных диаграмм объёмного и сдвигового деформирования билинейными [1], либо биквадратичными [2]

функциями. Физические соотношения и расчётные дифференциальные уравнения в перемещениях для характерных случаев напряжённо-деформированного состояния сплошной среды – одномерного плоского, осесимметричного, центрально-симметричного деформирования и плоской деформации в декартовых и цилиндрических координатах с учётом и без учёта геометрической нелинейности (в смысле В.В. Новожилова), при билинейной аппроксимации диаграмм объёмного и сдвигового деформирования, представлены в работе [3].

Вопросам расчёта деформируемых тел и конструкций, находящихся в условиях плоской деформации, посвящены многие работы отечественных и зарубежных исследователей [4, 5, 6, 7, 8, 9, 10].

В данной работе формулируется алгоритм решения задачи об определении напряжённо-деформированного состояния сплошной среды, находящейся в условиях плоской деформации в цилиндрических координатах $u = u(r, \varphi)$, $v = v(r, \varphi)$, $w = 0$, механическое поведение которой в части объёмных деформаций описывается линейно-упругим законом, а в части сдвиговых деформаций – произвольным нелинейным законом, аппроксимированным билинейной функцией.

Физические уравнения для геометрически линейной модели сплошной среды. В соответствии с рис. 1 модуль объёмного расширения (сжатия) не изменяется в процессе деформирования и равен:

$$K^I = \frac{1}{3} K_0 = Const. \quad (1)$$

Модуль сдвига на первом прямолинейном участке диаграммы $T = T(\Gamma)$ будет величиной постоянной:

$$G^I = G_0 = Const. \quad (2)$$

На втором прямолинейном участке диаграммы $T = T(\Gamma)$ секущий модуль сдвига будет определяться выражением:

$$G'' = G(\Gamma) = G_1 + (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \neq Const. \quad (3)$$

Здесь K_0 – начальный модуль объёмного расширения (сжатия); G_0 – начальный модуль сдвига; G_1 – модуль упрочнения при сдвиге; σ – первый инвариант тензора напряжений; ε – первый инвариант тензора деформаций; T – интенсивность касательных напряжений; Γ – интенсивность деформаций сдвига; T_1, Γ_1 – координаты точки излома билинейной диаграммы сдвигового деформирования.

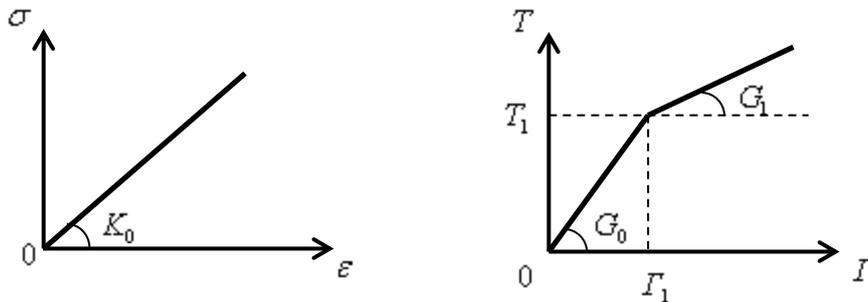


Рисунок 1 - Диаграммы объёмного $\sigma \approx \varepsilon$ и сдвигового $T \approx \Gamma$ деформирования

При плоской деформации сплошной среды в цилиндрических координатах для геометрически линейной модели $\varepsilon = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}$ и

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi})^2 + \varepsilon_{rr}^2 + \varepsilon_{\varphi\varphi}^2 + \frac{3}{2} \varepsilon_{r\varphi}^2}, \quad \text{причём} \quad \varepsilon_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right);$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\varphi r} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r}.$$

Рассмотрим два основных случая физических зависимостей: первое, когда текущее напряжённо-деформированное состояние в точке соответствует уровню напряжений и деформаций, не превосходящих точку излома графика диаграммы $T = T(\Gamma)$, и, второе, когда текущее напряжённо-деформированное состояние в точке соответствует уровню напряжений и деформаций, превосходящих точку излома графика диаграммы сдвигового деформирования.

Случай 1: $0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1$. В этом случае физические уравнения будут иметь

вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{3}K_0\varepsilon + 2G_0\left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon\right); \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{3}K_0\varepsilon + 2G_0\left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon\right); \\ \sigma_{r\varphi} &= \sigma_{\varphi r} = G_0\varepsilon_{r\varphi}, \quad \sigma_{zz} = \left(\frac{1}{3}K_0 - \frac{2}{3}G_0\right)\varepsilon.\end{aligned}\tag{4}$$

Случай 2: $\Gamma \geq \Gamma_1$. В этом случае физические уравнения записываются в следующей форме:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{3}K_0\varepsilon + 2\left[G_1 + (G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma}\right]\left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon\right); \\ \sigma_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{3}K_0\varepsilon + 2\left[G_1 + (G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma}\right]\left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon\right); \\ \sigma_{r\varphi} &= \sigma_{\varphi r} = \left[G_1 + (G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma}\right]\varepsilon_{r\varphi}; \\ \sigma_{zz} &= \left\{\frac{1}{3}K_0 - \frac{2}{3}\left[G_1 + (G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma}\right]\right\}\varepsilon.\end{aligned}\tag{5}$$

Дифференциальные уравнения для геометрически линейной модели.

Подставляя физические уравнения (4) и (5) в дифференциальные уравнения равновесия плоской деформации сплошной среды в цилиндрических координатах

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} + F_r &= 0; \\ \frac{\partial\sigma_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{2}{r}\sigma_{r\varphi} + F_\varphi &= 0.\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

получим два вида разрешающих уравнений в перемещениях, имеющих одну и ту же структуру:

$$\begin{cases} A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + B_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} + D_1 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + E_1 \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + F_1 \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \varphi} + A + F_r = 0; \\ A_2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + B_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + C_2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} + D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + E_2 \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + F_2 \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \varphi} + B + F_\varphi = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Коэффициенты $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ и $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2$ в уравнениях (7) зависят от вида физических уравнений.

1). Для физических уравнений (4) получим:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{3}K_0 + \frac{4}{3}G_0; \quad B_1 = G_0 \frac{1}{r^2}; \quad C_1 = 0; \quad D_1 = 0; \quad E_1 = 0; \\ F_1 &= \left(\frac{1}{3}K_0 + \frac{1}{3}G_0 \right) \frac{1}{r}; \\ A &= \left(\frac{1}{3}K_0 + \frac{4}{3}G_0 \right) \frac{1}{r} \left(\frac{u}{r} - \frac{u}{r} \right) - \left(\frac{1}{3}K_0 + \frac{7}{3}G_0 \right) \frac{1}{r^2} \frac{v}{\varphi}, \\ A_2 &= 0; \quad B_2 = 0; \quad C_2 = \left(\frac{1}{3}K_0 + \frac{1}{3}G_0 \right) \frac{1}{r}; \quad D_2 = G_0; \\ E_2 &= \left(\frac{1}{3}K_0 + \frac{4}{3}G_0 \right) \frac{1}{r^2}; \quad F_2 = 0; \\ B &= G_0 \frac{1}{r} \left(\frac{v}{r} - \frac{v}{r} \right) + \left(\frac{1}{3}K_0 + \frac{7}{3}G_0 \right) \frac{1}{r^2} \frac{u}{\varphi}. \end{aligned} \quad (8)$$

2). Для физических уравнений (5) будем иметь:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{3}K_0 + \frac{4}{3}G_1 + \frac{4}{3}(G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} - \frac{4}{3}(G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) (2\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi}); \\ B_1 &= \left[G_1 + (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} - (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \varepsilon_{r\varphi}^2 \right] \frac{1}{r^2}; \\ C_1 &= -2(G_0 - G_1) \varepsilon_{r\varphi} \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left[\left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) + \frac{1}{3}(2\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi}) \right] \frac{1}{r}; \\ D_1 &= -2(G_0 - G_1) \varepsilon_{r\varphi} \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon \right); \\ E_1 &= -\frac{2}{3}(G_0 - G_1) \varepsilon_{r\varphi} \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} (2\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}) \frac{1}{r^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1 &= \left[\frac{1}{3}K_0 - \frac{2}{3}G_1 - \frac{2}{3}(G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma} - \frac{4}{3}(G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) (2\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}) \right] \\
&\quad \cdot \frac{1}{r} + \left[G_1 + (G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma} - (G_0 - G_1)\varepsilon_{r\varphi}^2 \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \right] \frac{1}{r}; \\
A &= \left[\frac{1}{3}K_0 - \frac{2}{3}G_1 - \frac{2}{3}(G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma} - \frac{4}{3}(G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) (2\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}) \right] \\
&\quad \cdot \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{u}{r} \right) + 2(G_0 - G_1)\varepsilon_{r\varphi} \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left(\varepsilon_{rr} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) - \\
&\quad - \frac{2}{3}(G_0 - G_1)\varepsilon_{r\varphi} \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} (2\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}) \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \left[G_1 + (G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma} - \right. \\
&\quad \left. - (G_0 - G_1)\varepsilon_{r\varphi}^2 \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \right] \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \left[G_1 + (G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma} \right] (\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi});
\end{aligned} \tag{9}$$

$$A_2 = -\frac{2}{3}(G_0 - G_1)\varepsilon_{r\varphi} \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} (2\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi});$$

$$B_2 = -2(G_0 - G_1)\varepsilon_{r\varphi} \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) \frac{1}{r^2};$$

$$\begin{aligned}
C_2 &= \left[\frac{1}{3}K_0 + \frac{1}{3}G_1 + \frac{1}{3}(G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma} - (G_0 - G_1)\varepsilon_{r\varphi}^2 \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} - \frac{4}{3}(G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) (2\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\varphi\varphi}) \right] \frac{1}{r};
\end{aligned}$$

$$D_2 = G_1 + (G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma} - (G_0 - G_1)\varepsilon_{r\varphi}^2 \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3};$$

$$\begin{aligned}
E_2 &= \left[\frac{1}{3}K_0 + \frac{4}{3}G_1 + \frac{4}{3}(G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma} - \frac{4}{3}(G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot (2\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}) \right] \frac{1}{r^2};
\end{aligned}$$

$$F_2 = -2(G_0 - G_1)\varepsilon_{r\varphi} \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left[\frac{1}{3}(2\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}) + \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3}\varepsilon \right) \right] \frac{1}{r};$$

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{3}K_0 + \frac{4}{3}G_1 + \frac{4}{3}(G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma} - \frac{2}{3}(G_0 - G_1)\varepsilon_{r\varphi} \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} (2\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr}) \frac{1}{r} \cdot \\
&\quad \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{u}{r} \right) - \left[G_1 + (G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma} - (G_0 - G_1)\varepsilon_{r\varphi}^2 \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) \frac{1}{r} - \frac{2}{r} \left[G_1 + (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \right] \varepsilon_{r\varphi} + \frac{4}{3} (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \cdot \\ & \cdot \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3} \varepsilon \right) \left(2\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{rr} \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + 2(G_0 - G_1) \varepsilon_{r\varphi} \frac{\Gamma_1}{\Gamma^3} \left(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \frac{1}{3} \varepsilon \right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Таким образом, дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях, в цилиндрических координатах, для линейно-упругой в отношении объёмных и нелинейной в отношении сдвиговых деформаций, сплошной среды, находящейся в условиях плоской деформации, при билинейной аппроксимации графика диаграммы сдвиговых деформаций без учёта геометрически нелинейности построены.

Физические уравнения для геометрически нелинейной модели сплошной среды. Физические соотношения и замыкающие уравнения для геометрически нелинейной модели сплошной среды для случая плоской деформации будут записываться в форме, аналогичной соотношениям (1) – (5) (если у всех величин, входящих в эти формулы проставить звёздочки).

Таким образом, σ^* – первый инвариант тензора обобщённых напряжений; ε^* – первый инвариант тензора нелинейных деформаций; T^* – интенсивность обобщённых касательных напряжений; Γ^* – интенсивность нелинейных деформаций сдвига; K_0^* – геометрически нелинейный аналог начального модуля объёмного расширения (сжатия); G_0^* – геометрически нелинейный аналог начального модуля сдвига; G_1^* – геометрически нелинейный аналог начального модуля упрочнения при сдвиге; T_1^* , Γ_1^* – координаты точки излома билинейной диаграммы сдвигового деформирования.

При плоской деформации сплошной среды в цилиндрических координатах, описываемой геометрически нелинейной моделью $\varepsilon^* = \varepsilon_{rr}^* + \varepsilon_{\varphi\varphi}^*$ и

$$\Gamma^* = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_{rr}^* - \varepsilon_{\varphi\varphi}^*)^2 + \varepsilon_{rr}^{*2} + \varepsilon_{\varphi\varphi}^{*2} + \frac{3}{2} \varepsilon_{r\varphi}^{*2}}, \quad \text{причём} \quad \varepsilon_{r\varphi}^* = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 \right];$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^* = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right) + \frac{1}{2r^2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right)^2 \right];$$

$$\varepsilon_{r\varphi}^* = \varepsilon_{\varphi r}^* = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) + \frac{\partial v}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right).$$

Дифференциальные уравнения для геометрически нелинейной модели. Подставляя геометрически нелинейные аналоги физических уравнений (4) и (5) в дифференциальные уравнения равновесия плоской деформации сплошной среды при учёте геометрической нелинейности

$$\left\{ \begin{aligned} & r \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \sigma_{rr}^* + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \sigma_{r\varphi}^* \right] + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \sigma_{\varphi r}^* + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \sigma_{\varphi\varphi}^* \right] + \\ & + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \sigma_{rr}^* + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \sigma_{r\varphi}^* - \frac{\partial v}{\partial r} \sigma_{\varphi r}^* - \left(1 + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) \sigma_{\varphi\varphi}^* + r F_r^* = 0; \\ & r \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial v}{\partial r} \sigma_{rr}^* + \left(1 + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) \sigma_{r\varphi}^* \right] + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{\partial v}{\partial r} \sigma_{\varphi r}^* + \left(1 + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) \sigma_{\varphi\varphi}^* \right] + \\ & + \frac{\partial v}{\partial r} \sigma_{rr}^* + \left(1 + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) \sigma_{r\varphi}^* + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \sigma_{\varphi r}^* + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \sigma_{\varphi\varphi}^* + r F_{\varphi}^* = 0 \end{aligned} \right. \quad (10)$$

получим два вида разрешающих уравнений в перемещениях, имеющих одну и ту же структуру:

$$\left\{ \begin{aligned} & A_1 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + B_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} + D_1 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + E_1 \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + F_1 \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \varphi} + A + r F_r^* = 0; \\ & A_2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + B_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + C_2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} + D_2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + E_2 \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + F_2 \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \varphi} + B + r F_{\varphi}^* = 0. \end{aligned} \right. \quad (11)$$

Коэффициенты $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ и $A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2$ в уравнениях (11) зависят от вида физических уравнений.

1). Для геометрически нелинейного аналога физических уравнений (4) получим:

$$A_1 = r \left[\frac{1}{3} K_0^* \varepsilon^* + 2G_0^* \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right] + r \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 \left(\frac{1}{3} K_0^* + \frac{4}{3} G_0^* \right) + r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right)^2 G_0^*;$$

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 G_0^* + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{3} K_0^* \varepsilon^* + 2G_0^* \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right] + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \right)^2 \\
&\cdot \left(\frac{1}{3} K_0^* + \frac{4}{3} G_0^* \right); \\
C_1 &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \left(\frac{2}{3} K_0^* + \frac{2}{3} G_0^* \right) + 2G_0^* \varepsilon_{r\varphi}^*; \\
D_1 &= r \frac{\partial v}{\partial r} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \left(\frac{1}{3} K_0^* + \frac{4}{3} G_0^* \right) + r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \left(1 + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) G_0^*; \\
E_1 &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) G_0^* + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \left(1 + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) \left(\frac{1}{3} K_0^* + \frac{4}{3} G_0^* \right); \\
F_1 &= \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \left(1 + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) + \frac{\partial v}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \right] \left(\frac{1}{3} K_0^* - \frac{2}{3} G_0^* \right) + \\
&+ \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \left(1 + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) + \frac{\partial v}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \right] G_0^*; \\
A &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} - 1 \right) - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right)^2 - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right)^2 - \right. \\
&- \left. \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \frac{\partial v}{\partial r} \right] \left(\frac{1}{3} K_0^* - \frac{2}{3} G_0^* \right) - \frac{\partial v}{\partial r} G_0^* \varepsilon_{r\varphi}^* - \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \right. \\
&+ r \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - r \frac{\partial v}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) \left. \right] G_0^* - \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \cdot \\
&\cdot \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right] G_0^* - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{3} K_0^* \varepsilon^* + 2G_0^* \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right] + \\
&+ \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \left[\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right] \cdot \\
&\cdot \left(\frac{1}{3} K_0^* + \frac{4}{3} G_0^* \right) + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \left[\frac{1}{3} K_0^* \varepsilon^* + 2G_0^* \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right] + \\
&+ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) G_0^* \varepsilon_{r\varphi}^* - \left(1 + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \left[\frac{1}{3} K_0^* \varepsilon^* + 2G_0^* \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right].
\end{aligned} \tag{12}$$

$$A_2 = r \frac{\partial v}{\partial r} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \left(\frac{1}{3} K_0^* + \frac{4}{3} G_0^* \right) + r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \left(1 + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) G_0^*;$$

$$\begin{aligned}
B_2 &= \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \frac{\partial v}{\partial r} G_0^* + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \left(1 + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{1}{3} K_0^* + \frac{4}{3} G_0^* \right); \\
C_2 &= \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \left(1 + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial v}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \right] \left(\frac{1}{3} K_0^* + \frac{1}{3} G_0^* \right); \\
D_2 &= r \left[\frac{1}{3} K_0^* \varepsilon^* + 2G_0^* \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right] + r \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 \left(\frac{1}{3} K_0^* + \frac{4}{3} G_0^* \right) + \\
&\quad + r \left(1 + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right)^2 G_0^*; \\
E_2 &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 G_0^* + \frac{1}{r} \left(1 + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right)^2 \left(\frac{1}{3} K_0^* + \frac{4}{3} G_0^* \right) + \\
&\quad + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{3} K_0^* \varepsilon^* + 2G_0^* \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right]; \\
F_2 &= \frac{\partial v}{\partial r} \left(1 + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \left[\left(\frac{2}{3} K_0^* + \frac{2}{3} G_0^* \right) \right] + 2G_0^* \varepsilon_{r\varphi}^*; \\
B &= \frac{\partial v}{\partial r} \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial r} - 1 \right) - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right)^2 - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right)^2 - \right. \\
&\quad - \left. \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \frac{\partial v}{\partial r} \right] \left(\frac{1}{3} K_0^* - \frac{2}{3} G_0^* \right) + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) G_0^* \varepsilon_{r\varphi}^* - \frac{1}{r} \left(1 + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \left(r \frac{\partial v}{\partial r} - v \right) + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} - u \right) \right] \cdot \\
&\quad \cdot G_0^* - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right] G_0^* + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{3} K_0^* \varepsilon^* + \right. \\
&\quad + \left. 2G_0^* \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right] + \frac{1}{r} \left(1 + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) \left[\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \right. \\
&\quad - \left. \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right] \left(\frac{1}{3} K_0^* + \frac{4}{3} G_0^* \right) + \frac{\partial v}{\partial r} \left[\frac{1}{3} K_0^* \varepsilon^* + 2G_0^* \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right] + \\
&\quad + \left(2 + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) G_0^* \varepsilon_{r\varphi}^* + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \left[\frac{1}{3} K_0^* \varepsilon^* + 2G_0^* \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right].
\end{aligned}$$

2). Для геометрически нелинейного аналога физических уравнений (5) будем иметь:

$$\begin{aligned}
A_1 &= r \left\{ \frac{1}{3} K_0^* \varepsilon^* + 2 \left[G_1^* + (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} \right] \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right\} + r \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \left[b_1^1 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) + b_3^1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \right] + r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \left[b_1^{11} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \right. \\
&\quad \left. + b_3^{11} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \right]; \\
B_1 &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \left[b_2^{11} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) + b_3^{11} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{3} K_0^* \varepsilon^* + \right. \\
&\quad \left. + 2 \left[G_1^* + (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} \right] \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right\} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \left[b_2^{111} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) + b_3^{111} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right]; \\
C_1 &= r \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \left[b_2^1 \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) + b_3^1 \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] + 2 \left[G_1^* + (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} \right] \varepsilon_{r\varphi}^* + \\
&\quad + r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \left[b_2^{11} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) + b_3^{11} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \left[b_1^{11} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) + b_3^{11} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \right] + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \left[b_1^{111} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \right. \\
&\quad \left. + b_3^{111} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \right]; \\
D_1 &= r \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \left[b_1^1 \frac{\partial v}{\partial r} + b_3^1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} + 1 \right) \right] + r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \left[b_1^{11} \frac{\partial v}{\partial r} + \right. \\
&\quad \left. + b_3^{11} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} + 1 \right) \right]; \\
E_1 &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \left[b_2^{11} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} + 1 \right) + b_3^{11} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right] + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \cdot \\
&\quad \cdot \left[b_2^{111} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} + 1 \right) + b_3^{111} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right]; \\
F_1 &= r \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \left[b_2^1 \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} + 1 \right) + b_3^1 \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right] + r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left[b_2^{11} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} + 1 \right) + b_3^{11} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right] + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \left[b_1^{11} \frac{\partial v}{\partial r} + \right. \\
& \left. + b_3^{11} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} + 1 \right) \right] + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \left[b_1^{111} \frac{\partial v}{\partial r} + b_3^{111} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} + 1 \right) \right]; \\
A = & r \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \left\{ b_2^1 \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{u}{r} \right) - b_2^1 \frac{1}{r} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right)^2 \right] + \right. \\
& + b_2^1 \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) - b_2^1 \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) + b_3^1 \frac{1}{r} \left(\frac{v}{r} - \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) - \\
& - b_3^1 \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + b_3^1 \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{v}{r} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) - b_3^1 \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + b_3^1 \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r} \right) \left. \right\} - \\
& - \frac{\partial v}{\partial r} \left[G_1^* + (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} \right] \varepsilon_{r\varphi}^* + r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \left\{ b_2^1 \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{u}{r} \right) - \right. \\
& - b_2^1 \frac{1}{r} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right)^2 \right] + b_2^1 \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) - \\
& - b_2^1 \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) - b_3^1 \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) - b_3^1 \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \\
& - b_3^1 \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) \left. \right\} + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \left[b_2^{11} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} + 1 \right) - \right. \\
& - b_2^{11} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) - b_3^{11} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - b_3^{11} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + b_3^{11} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left. \right] - \\
& - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left\{ \frac{1}{3} K_0^* \varepsilon^* + 2 \left[G_1^* + (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} \right] \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right\} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right). \\
& \cdot \left[b_2^{111} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} + 1 \right) - b_2^{111} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) - b_3^{111} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \right. \\
& - b_3^{111} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + b_3^{111} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left. \right] + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \left\{ \frac{1}{3} K_0^* \varepsilon^* + \right. \\
& + 2 \left[G_1^* + (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} \right] \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \left. \right\} - \left(1 + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right). \\
& \cdot \left\{ \frac{1}{3} K_0^* \varepsilon^* + 2 \left[G_1^* + (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} \right] \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right\} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right).
\end{aligned}$$

$$\cdot \left[G_1^* + (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} \right] \varepsilon_{r\varphi}^*. \quad (13)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= r \left\{ \frac{1}{3} K_0^* \varepsilon^* + 2 \left[G_1^* + (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} \right] \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right\} + r \frac{\partial v}{\partial r} \left[b_1^1 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \right. \\ &+ b_3^1 \left. \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \right] + r \left(1 + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \left[b_1^{11} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) + b_3^{11} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \right]; \\ B_2 &= \frac{\partial v}{\partial r} \left[b_2^{11} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) + b_3^{11} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] + \left(1 + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \cdot \\ &\cdot \left[b_2^{111} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) + b_3^{111} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right]; \\ C_2 &= r \frac{\partial v}{\partial r} \left[b_2^1 \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) + b_3^1 \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] + r \left(1 + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \cdot \\ &\cdot \left[b_2^{11} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) + b_3^{11} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial v}{\partial r} \left[b_1^{11} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) + b_3^{21} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \right] + \\ &+ \left(1 + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \left[b_1^{111} \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) + b_3^{111} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \right]; \\ D_2 &= r \frac{\partial v}{\partial r} \left[b_1^1 \frac{\partial v}{\partial r} + b_3^1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} + 1 \right) \right] + r \left(1 + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \cdot \\ &\cdot \left[b_1^{11} \frac{\partial v}{\partial r} + b_3^{11} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} + 1 \right) \right]; \\ E_2 &= \frac{\partial v}{\partial r} \left[b_2^{11} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} + 1 \right) + b_3^{11} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \left\{ \frac{1}{3} K_0^* \varepsilon^* + \right. \\ &+ 2 \left[G_1^* + (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} \right] \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \left. \right\} + \left(1 + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \cdot \\ &\cdot \left[b_2^{111} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} + 1 \right) + b_3^{111} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right]; \\ F_2 &= r \frac{\partial v}{\partial r} \left[b_2^1 \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} + 1 \right) + b_3^1 \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right] + 2 \left[G_1^* + (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} \right] \varepsilon_{r\varphi}^* + \\ &+ r \left(1 + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \left[b_2^{11} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} + 1 \right) + b_3^{11} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right] + \frac{\partial v}{\partial r} \left[b_1^{11} \frac{\partial v}{\partial r} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + b_3^{11} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} + 1 \right) \Big] + \left(1 + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \left[b_1^{111} \frac{\partial v}{\partial r} + b_3^{111} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} + 1 \right) \right]; \\
B = & r \frac{\partial v}{\partial r} \left\{ b_2^1 \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{u}{r} \right) - b_2^1 \frac{1}{r} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right)^2 \right] + \right. \\
& + b_2^1 \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) - b_2^1 \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) - b_3^1 \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} - \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \\
& \left. - b_3^1 \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) - b_3^1 \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) \right\} + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \cdot \\
& \cdot \left[G_1^* + (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} \right] \varepsilon_{r\varphi}^* + r \left(1 + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \left\{ b_2^{11} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{u}{r} \right) - \right. \\
& - b_2^{11} \frac{1}{r} \left[\left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right)^2 \right] + b_2^{11} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) - \\
& - b_2^{11} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) - b_3^{11} \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) - b_3^{11} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \\
& \left. - b_3^{11} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) \right\} + \frac{\partial v}{\partial r} \left[b_2^{11} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left(1 + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \right) - \right. \\
& \left. - b_2^{11} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) - b_3^{11} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - b_3^{11} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + b_3^{11} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right] + \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left\{ \frac{1}{3} K_0^* \varepsilon^* + 2 \left[G_1^* + (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} \right] \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right\} + \left(1 + \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \cdot \\
& \cdot \left[b_2^{111} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} + 1 \right) - b_2^{111} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r} + 1 \right) - b_3^{111} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \right. \\
& \left. + b_3^{111} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial v}{\partial r} \left\{ \frac{1}{3} K_0^* \varepsilon^* + 2 \left[G_1^* + (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} \right] \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right\} + \\
& + \left(2 + \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \left[G_1^* + (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} \right] \varepsilon_{r\varphi}^* + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \cdot \\
& \cdot \left\{ \frac{1}{3} K_0^* \varepsilon^* + 2 \left[G_1^* + (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} \right] \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right) \right\}
\end{aligned}$$

В формулах (13)

$$b_1^1 = 2G_1^* + \left(\frac{1}{3}K_0^* - \frac{2}{3}G_1^* \right) - \frac{2}{3}(G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} + 2(G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} -$$

$$- (G_0^* - G_1^*) \frac{4}{3} (2\varepsilon_{rr}^* - \varepsilon_{\varphi\varphi}^*) \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^* \right) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^{*3}};$$

$$b_1^{11} = - (G_0^* - G_1^*) \frac{2}{3} (2\varepsilon_{rr}^* - \varepsilon_{\varphi\varphi}^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^{*3}} \varepsilon_{r\varphi}^*;$$

$$b_1^{111} = \frac{1}{3}K_0^* - \frac{2}{3}G_1^* - \frac{2}{3}(G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} - (G_0^* - G_1^*) \frac{4}{3} (2\varepsilon_{rr}^* - \varepsilon_{\varphi\varphi}^*) \cdot$$

$$\cdot \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^* \right) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^{*3}};$$

$$b_2^1 = \frac{1}{3}K_0^* - \frac{2}{3}G_1^* - \frac{2}{3}(G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} - (G_0^* - G_1^*) \frac{4}{3} (2\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \varepsilon_{rr}^*) \cdot$$

$$\cdot \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^* \right) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^{*3}};$$

$$b_2^{11} = - (G_0^* - G_1^*) \frac{2}{3} (2\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \varepsilon_{rr}^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^{*3}} \varepsilon_{r\varphi}^*;$$

$$b_2^{111} = \frac{1}{3}K_0^* + \frac{4}{3}G_1^* + \frac{4}{3}(G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} - (G_0^* - G_1^*) \frac{4}{3} (2\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \varepsilon_{rr}^*) \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^* \right) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^{*3}}.$$

$$b_3^1 = -2(G_0^* - G_1^*) \varepsilon_{r\varphi}^* \left(\varepsilon_{rr}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^* \right) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^{*3}};$$

$$b_3^{11} = G_1^* + (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} - (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^{*3}} (\varepsilon_{r\varphi}^*)^2;$$

$$b_3^{111} = -2(G_0^* - G_1^*) \varepsilon_{r\varphi}^* \left(\varepsilon_{\varphi\varphi}^* - \frac{1}{3}\varepsilon^* \right) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^{*3}}.$$

Таким образом, дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях, в цилиндрических координатах, описывающие напряжённо-деформированное состояние линейно-упругой в отношении объёмных и нелинейной в отношении сдвиговых деформаций, сплошной среды, находящейся в условиях плоской деформации, при билинейной аппроксимации графика диаграммы сдвиговых деформаций с учётом геометрической нелинейности построены.

Алгоритм практического определения напряжённо-деформированного состояния сплошной среды. Рассмотрим, в качестве примера, полупространство, находящееся в условиях плоской деформации. На

поверхности полупространства на ограниченном участке, в направлении оси Y , совпадающей со свободной границей полупространства, действует нагрузка, интенсивностью $q(y)$, бесконечно протяжённая в направлении оси Z (ось X направлена вниз). Механическое поведение материала полупространства описывается моделью, в соответствии с которой объёмные деформации и средние напряжения в точке связаны между собой линейным законом; сдвиговые деформации и касательные напряжения связаны между собой произвольным законом, аппроксимированным билинейной функцией. Диаграммы объёмного и сдвигового деформирования известны. Требуется определить напряжённо-деформированное состояние полупространства.

Алгоритм решения задачи будет состоять из следующих этапов.

1. Предполагаем, что деформации и напряжения в полупространстве таковы, что интенсивность деформаций сдвига не выходит за пределы точки излома графика диаграммы $T = T(\Gamma)$.
2. На основании дифференциальных уравнений (7) с коэффициентами (8) и физическими соотношениями (4) определяем перемещения, а, следовательно, и деформации, и, на основании соотношений (4), напряжения в каждой точке полупространства от действующей внешней нагрузки $q(y)$.
3. По полученным данным вычисляем в каждой точке полупространства интенсивность деформаций сдвига Γ .
4. Определяем геометрическое место точек полупространства – это будет некоторая цилиндрическая поверхность, бесконечно протяжённая в направлении оси Z , (назовём её поверхностью излома) – в которых полученная величина интенсивности деформаций сдвига не превышает или равна интенсивности деформаций сдвига, соответствующей точке излома графика диаграммы $T = T(\Gamma)$.
5. Во всех точках полупространства от его поверхности до цилиндрической поверхности излома определяем перемещения,

деформации и напряжения пользуясь дифференциальными уравнениями (7) с коэффициентами (9) и физическими соотношениями (5).

6. Решением нашей задачи будет напряжённо-деформированное состояние полупространства за пределами поверхности излома, полученное по соотношениям (7), (8) и (4), и напряжённо-деформированное состояние полупространства от его поверхности до поверхности излома, полученное по соотношениями (7), (9) и (5).
7. Правильность полученного решения оцениваем в каждой точке полупространства путём сравнения интенсивностей касательных напряжений и деформаций сдвига, вычисленных по полученным напряжениям и деформациям, и их значениям на диаграмме сдвига $T = T(\Gamma)$.

Сформулированный выше алгоритм для геометрически линейной модели сплошной среды, без каких-либо изменений переносится на модель сплошной среды, учитывающей геометрическую нелинейность.

Заключение. Сформулированный в статье алгоритм решения задачи, а также физические зависимости и дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях могут найти применение при определении напряжённо-деформированного состояния сплошной среды, находящейся в условиях плоской деформации в цилиндрических координатах, как с учётом, так и без учёта геометрической нелинейности, физические соотношения для которой в отношении объёмных деформаций описываются линейным законом упругости, а в отношении сдвиговых деформаций описываются произвольным нелинейным законом, аппроксимируемым билинейной функцией.

Библиографический список:

1. Бакушев С.В. Аппроксимация диаграмм деформирования билинейными функциями. // Строительная механика и расчёт сооружений. 2019. №2 (283). С. 2-11.

2. Бакушев С.В. Аппроксимация диаграмм деформирования квадратичными функциями. // Строительная механика и расчёт сооружений. 2020. №3 (290). С. 2-14. DOI: 10.37538/0039-2383.2020.3.2.14.

3. Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения и краевые задачи механики деформируемого твёрдого тела. М.: ЛЕНАНД, 2020. 304 с.

4. Микенина О.А., Ревуженко А.Ф. Линейная теория упругости, свободная от постулата о диффеоморфизме: плоская деформация. // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2020. № 3 (45). С. 162-167. DOI: 10.37972/chgru.2020.60.58.016.

5. Ломакин Е.В., Минаев Н.Г. Поля напряжений вблизи кругового отверстия в пористой среде в условиях плоской деформации. // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. 2020. № 3. С. 39-47. DOI: 10.31857/S0572329920030083.

6. Дудко В.В., Манцыбора А.А. Динамика плоских деформаций в разномодульных изотропно-упругих средах. // Сибирский журнал промышленной математики. 2021. Т. 24. № 1 (85). С. 18-31. DOI: 10.33048/SIBJIM.2021.24.102.

7. Переяславская И.И., Артемов М.А., Барановский Е.С. К вопросу математического моделирования осесимметричного плосконапряжённого состояния сжимаемого упругопластического тела. // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2017. № 1 (31). С. 22-39.

8. Xin-ni Mou, Li-xin Lu, Yun-ling Zhou. Evaluation of in-plane compressive densification strain of honeycomb paperboard. // Advances in Mechanical Engineering. 2020. Vol. 12 issue: 4. Doi: org/10.1177/1687814020913424.

9. Jelena Srnec Novak, Francesco De Bona, Denis Benasciutti. Benchmarks for Accelerated Cyclic Plasticity Models with Finite Elements. // Metals. 2020. Vol. 10, no. 781, p. 781. DOI: org/10.3390/met10060781.

10. Sergei Alexandrov, Elena Lyamina, Yeong-Maw Hwang. Finite Pure Plane Strain Bending of Inhomogeneous Anisotropic Sheets. // Symmetry. 2020. Vol. 13, no. 145, p. 145. Doi: [org/10.3390/sym13010145](https://doi.org/10.3390/sym13010145).