УДК 519.633

АЛГОРИТМ РАСЧЁТА НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОГО ОДНОМЕРНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ, ПРИ БИЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ЗАМЫКАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ

Бакушев Сергей Васильевич.

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Аннотация.

Формулируется алгоритм определения напряжённо-деформированного состояния полупространства, находящегося в условиях плоского одномерного деформирования. Механическое поведение сплошной среды описывается и в отношении объёмных, и в отношении сдвиговых деформаций произвольными нелинейными законами. Диаграммы и объёмного, и сдвигового деформирования аппроксимируется билинейными функциями. Математическая модель сплошной среды описывается как с учётом, так и без учёта геометрической нелинейности (в смысле В.В. Новожилова). Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды, находящейся в условиях одномерного плоского деформирования, принимаются в перемещениях. Алгоритм решения задачи, может найти применение при определении напряжённо-деформированного состояния сплошных сред и элементов строительных и машиностроительных конструкций, находящихся в условиях одномерного плоского деформирования и описываемые математическими моделями как с учётом, так и без учёта геометрической нелинейности, замыкающие уравнения физических соотношений для которых, построенные на основе экспериментальных данных, аппроксимированы

билинейными функциями как в отношении объёмных, так и в отношении сдвиговых деформаций.

Ключевые слова: сплошная среда, плоская одномерная деформация, нелинейное объёмное и сдвиговое деформирование, билинейные замыкающие уравнения, дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях, геометрическая линейность, геометрическая нелинейность, алгоритм решения задачи.

ALGORITHM FOR CALCULATING THE STRESS-STRAIN STATE OF A CONTINUOUS MEDIUM UNDER CONDITIONS OF FLAT ONE-DIMENSIONAL DEFORMATION UNDER BILINEAR APPROXIMATION OF CLOSING EQUATIONS

Bakushev Sergey Vasilevich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professorof the department "Mechanics".

Abstract.

An algorithm for determining the stress-strain state of a half-space under conditions of flat one-dimensional deformation is formulated. The mechanical behavior of a continuous medium is described in relation to both volumetric and shear deformations by arbitrary nonlinear laws. Diagrams of both volumetric and shear deformation are approximated by bilinear functions. The mathematical model of the continuous medium is described both taking into account and without taking into account geometric nonlinearity (in the sense of V.V. Novozhilov). Differential equilibrium equations of a continuous medium under conditions of one-dimensional flat deformation are accepted in displacements. The algorithm for solving the problem can be used in determining the stress-strain state of continuous media and elements of building and machine-building structures that are in conditions of one-dimensional flat deformation and described by mathematical models both taking into account and without taking into account geometric nonlinearity, closing the equations of physicallyx ratios for which, built on the basis of experimental data, are approximated by bilinear functions with respect to both volumetric and shear deformations.

Keywords: solid environment, flat one-dimensional deformation, nonlinear volumetric and shear deformation, biline closing equations, differential equilibrium equations in movements, geometric linearity, geometric nonlinearity, algorithm for solving a problem.

Введение. Удачная аппроксимация диаграмм объёмного и сдвигового деформирования, другими словами – выбор математической модели, позволяет сформулировать алгоритм решения задачи расчёта деформируемых тел на действие той или иной нагрузки в его наиболее эффектном варианте [1 - 7] Алгоритм должен быть достаточно простым, логически понятным, относительно легко поверяемым, результативным и давать минимальную погрешность. Можно сказать, что одной из наиболее удачных аппроксимаций является линейная – закон Гука. Однако решения, построенные на законе Гука, дают слишком большую погрешность в напряжённо-деформируемом состоянии неупругих тел по сравнению с их реальным механическим поведением. Ввиду этого, для нелинейных диаграмм объёмного и сдвигового деформирования, соответствующих реальному механическому поведению нелинейных тел, продолжаются поиски как законов состояния, так и алгоритмов решения задач расчёта деформируемых тел [8 - 12]. В работах автора последних лет предлагается аппроксимировать диаграммы сдвигового и объёмного деформирования билинейными [13] и биквадратичными [14] функциями. Для характерных видов напряжённо-деформированного состояния сплошной среды с учётом и без учёта геометрической нелинейности – одноосного плоского [15], осесимметричного [16], центрально-симметричного [17], плоской деформации в декартовой [18, 19] и цилиндрической [20, 21] системах координат - построены расчётные дифференциальные уравнения в перемещениях при аппроксимации диаграмм объёмного и сдвигового деформирования билинейными функциями. Вопросам аппроксимации диаграмм напряжений посвящены многие работы как отечественных, так и зарубежных исследователей [22 - 25].

В данной работе формулируется алгоритм решения задачи об определении напряжённо-деформированного состояния сплошной среды, находящейся в условиях плоского одномерного деформирования $u_x = u(x),\ u_y = 0,\ u_z = 0$, механическое поведение которой и в части объёмных деформаций, и в части сдвиговых деформаций описывается произвольными нелинейными законами, аппроксимированными билинейными функциями (рис. 1).

Краткие пояснения. Разрешающие физические и дифференциальные уравнения для сплошной среды, находящейся в условиях одномерного плоского деформирования, как без учёта, так и с учётом геометрической нелинейности приведены в работе [15].

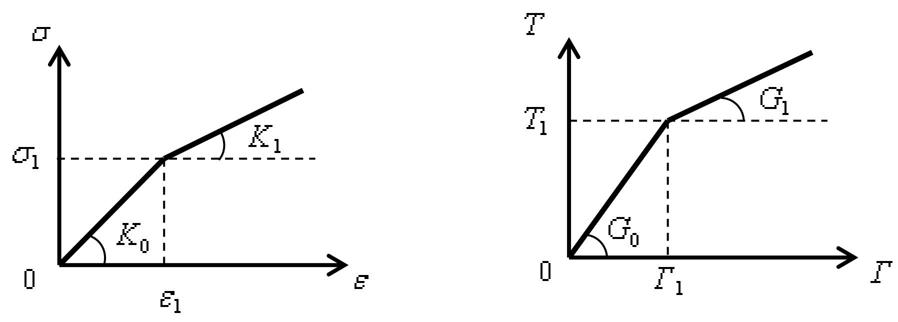

Рисунок 1 - Диаграммы объёмного $\sigma \approx \varepsilon$ и сдвигового $\mathrm{T} \approx \Gamma$ деформирования

На рис. 1 обозначено: K_0 – начальный модуль объёмного расширения (сжатия); G_0– начальный модуль сдвига; K_1 – модуль упрочнения при объёмном расширении (сжатии); G_1 – модуль упрочнения при сдвиге; σ – первый инвариант тензора напряжений; ε – первый инвариант тензора деформаций; T ; σ_1, ε_1 – координаты точки излома билинейной диаграммы объёмного деформирования; T_1, Γ_1 – координаты точки излома билинейной диаграммы сдвигового деформирования.

Для геометрически линейной модели сплошной среды секущие модули объёмного расширения (сжатия) $K = K(\varepsilon,\Gamma)$ и сдвига $G = G(\varepsilon,\Gamma)$ на первом прямолинейном участке диаграмм $\sigma \approx \varepsilon$ и $T \approx \Gamma$ будут определяться выражениями:

$$K = \frac{1}{3}K_0 = Const;\ G = G_0 = Const. \tag{1}$$

На втором прямолинейном участке диаграмм $\sigma \approx \varepsilon$ и $T \approx \Gamma$ секущий модуль объёмного расширения (сжатия) $K = K(\varepsilon,\Gamma)$ и секущий модуль сдвига $G = G(\varepsilon,\Gamma)$ будут определяться выражениями:

$$\begin{aligned} K &= K(\varepsilon) = \frac{1}{3}\left[K_1 + (K_0 - K_1)\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right] \neq Const; \\ G &= G(\Gamma) = G_1 + (G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma} \neq Const. \end{aligned} \tag{2}$$

Для геометрически нелинейной модели сплошной среды (в смысле В.В.Новожилова), секущие модули объёмного расширения (сжатия) $K^* = K^*(\varepsilon^*,\Gamma^*)$ и сдвига $G^* = G^*(\varepsilon^*,\Gamma^*)$ будут определяться теми же выражениями (1) и (2) в которых у всех величин нужно проставить звёздочки. При этом K_0^* – геометрически нелинейный аналог начального модуля объёмного расширения (сжатия); G_0^* – геометрически нелинейный аналог начального модуля сдвига; K_1^* – геометрически нелинейный аналог модуля упрочнения при объёмном расширении (сжатии); G_1^*– геометрически нелинейный аналог модуля упрочнения при сдвиге; σ^* – первый инвариант тензора обобщённых напряжений; ε^* – первый инвариант тензора нелинейных деформаций; T^* – интенсивность обобщённых касательных напряжений; Γ^* – интенсивность нелинейных деформаций сдвига ; σ_1^*, ε_1^* – координаты точки излома билинейной диаграммы объёмного деформирования; T_1^*, Γ_1^* – координаты точки излома билинейной диаграммы сдвигового деформирования.

При плоском одномерном деформировании для геометрически линейной модели $\varepsilon = \varepsilon_{xx}$; $\Gamma = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\varepsilon_{xx}^2}$, причём $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$. Для геометрически нелинейной модели $\varepsilon^* = \varepsilon_{xx}^*$; $\Gamma^* = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\varepsilon_{xx}^{*2}}$, причём $\varepsilon_{xx}^* = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$.

Алгоритм практического определения напряжённо-деформированного состояния. Пусть полупространство нагружено поверхностной равномерно-распределённой в направлении осей Y и Z, совпадающих с его дневной поверхностью, нагрузкой интенсивности q (ось X направлена внутрь полупространства). Для определения напряжённо-деформированного состояния полупространства воспользуемся следующим алгоритмом.

1. Предположим, что напряжённо-деформированное состояние в каждой точке полупространства соответствуют первому прямолинейному участку диаграмм объёмного и сдвигового деформирования, то есть $K = \frac{1}{3}K_0$, $G = G_0$. В этом случае, принимая во внимание внешнюю нагрузку q и, используя расчётные формулы, приведенные в работе [15], определяем в каждой точке полупространства перемещение u (формула (7), [15] - для геометрически линейной модели; формула (17), [1] - для геометрически нелинейной модели), деформацию ε_{xx}, напряжения σ_{xx}, $\sigma_{yy} = \sigma_{zz}$ (формулы (3), [15] - для геометрически линейной модели; формулы (13), [15] - для геометрически нелинейной модели).

2. Вычисляем первый инвариант тензора деформаций ε для геометрически линейной модели, или первый инвариант тензора нелинейных деформаций ε^* для геометрически нелинейной модели, а также интенсивность

деформаций сдвига Γ для геометрически линейной модели, или интенсивность нелинейных деформаций сдвига Γ^* для геометрически нелинейной модели.

3. Если вычисленные в пункте 2. величины удовлетворяют условиям $\varepsilon \le \varepsilon_1$ и $\Gamma \le \Gamma_1$ для геометрически линейной модели, или $\varepsilon^* \le \varepsilon_1^*$ и $\Gamma^* \le \Gamma_1^*$ для геометрически нелинейной модели, то напряжённо-деформированное состояние полупространства определено и задача решена. Если же указанные условия не удовлетворяются, то для продолжения решения переходим к пункту 4.

4. Предположим, что напряжённо-деформированное состояние в каждой точке полупространства таково, что объёмное деформирование соответствует первому прямолинейному участку диаграммы объёмного деформирования, а сдвиговое деформирование соответствует второму прямолинейному участку диаграммы сдвигового деформирования, то есть $K = \frac{1}{3} K_0$, $G = G_1 + (G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma}$. В этом случае, принимая во внимание внешнюю нагрузку q и, используя расчётные формулы, приведенные в работе [15], определяем в каждой точке полупространства перемещение u (формула (9), [15] - для геометрически линейной модели; формула (19), [15] - для геометрически нелинейной модели), деформацию ε_{xx}, напряжения σ_{xx}, $\sigma_{yy} = \sigma_{zz}$ (формулы (5), [15] - для геометрически линейной модели; формулы (15), [15] - для геометрически нелинейной модели).

5. Вычисляем первый инвариант тензора деформаций ε для геометрически линейной модели, или первый инвариант тензора нелинейных деформаций ε^* для геометрически нелинейной модели, а также интенсивность деформаций сдвига Γ для геометрически линейной модели, или интенсивность нелинейных деформаций сдвига Γ^* для геометрически нелинейной модели.

6. Если вычисленные в пункте 5. величины удовлетворяют условиям $\varepsilon \le \varepsilon_1$ и $\Gamma > \Gamma_1$ для геометрически линейной модели, или $\varepsilon^* \le \varepsilon_1^*$ и $\Gamma^* > \Gamma_1^*$ для геометрически нелинейной модели, то напряжённо-деформированное

состояние полупространства определено и задача решена. Если же указанные условия не удовлетворяются, то для продолжения решения переходим к пункту 7.

7. Предположим, что напряжённо-деформированное состояние в каждой точке полупространства таково, что объёмное деформирование соответствует второму прямолинейному участку диаграммы объёмного деформирования, а сдвиговое деформирование соответствует первому прямолинейному участку диаграммы сдвигового деформирования, то есть $K = \frac{1}{3}\left[K_1 + \left(K_0 - K_1\right)\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right]$, $G = G_0$. В этом случае, принимая во внимание внешнюю нагрузку q и, используя расчётные формулы, приведенные в работе [15], определяем в каждой точке полупространства перемещение u (формула (8), [15] - для геометрически линейной модели; формула (18), [15] - для геометрически нелинейной модели), деформацию ε_{xx}, напряжения σ_{xx}, $\sigma_{yy} = \sigma_{zz}$ (формулы (4), [15] - для геометрически линейной модели; формулы (14), [15] - для геометрически нелинейной модели).

8. Вычисляем первый инвариант тензора деформаций ε для геометрически линейной модели, или первый инвариант тензора нелинейных деформаций ε^* для геометрически нелинейной модели, а также интенсивность деформаций сдвига Γ для геометрически линейной модели, или интенсивность нелинейных деформаций сдвига Γ^* для геометрически нелинейной модели.

9. Если вычисленные в пункте 8. величины удовлетворяют условиям $\varepsilon > \varepsilon_1$ и $\Gamma \le \Gamma_1$ для геометрически линейной модели, или $\varepsilon^* > \varepsilon_1^*$ и $\Gamma^* \le \Gamma_1^*$ для геометрически нелинейной модели, то напряжённо-деформированное состояние полупространства определено и задача решена. Если же указанные условия не удовлетворяются, то для продолжения решения переходим к пункту 10.

10. Предположим, что напряжённо-деформированное состояние в каждой точке полупространства таково, что объёмное деформирование

соответствует второму прямолинейному участку диаграммы объёмного деформирования, а сдвиговое деформирование также соответствует второму прямолинейному участку диаграммы сдвигового деформирования, то есть $K = \frac{1}{3}\left[K_1 + \left(K_0 - K_1\right)\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right]$, $G = G_1 + \left(G_0 - G_1\right)\frac{\Gamma_1}{\Gamma}$. В этом случае, принимая во внимание внешнюю нагрузку q и, используя расчётные формулы, приведенные в работе [15], определяем в каждой точке полупространства перемещение u (формула (10), [15] - для геометрически линейной модели; формула (20), [15] - для геометрически нелинейной модели), деформацию ε_{xx}, напряжения σ_{xx}, $\sigma_{yy} = \sigma_{zz}$ (формулы (6), [15] - для геометрически линейной модели; формулы (16), [15] - для геометрически нелинейной модели).

11. Вычисляем первый инвариант тензора деформаций ε для геометрически линейной модели, или первый инвариант тензора нелинейных деформаций ε^* для геометрически нелинейной модели, а также интенсивность деформаций сдвига Γ для геометрически линейной модели, или интенсивность нелинейных деформаций сдвига Γ^* для геометрически нелинейной модели.

12. Если вычисленные в пункте 11. величины удовлетворяют условиям $\varepsilon > \varepsilon_1$ и $\Gamma > \Gamma_1$ для геометрически линейной модели, или $\varepsilon^* > \varepsilon_1^*$ и $\Gamma^* > \Gamma_1^*$ для геометрически нелинейной модели, то напряжённо-деформированное состояние полупространства определено и задача решена. Если же указанные условия не удовлетворяются, то это может служить сигналом о том, что при реализации алгоритма допущены ошибки.

13. Правильность полученного решения оцениваем путём сравнения первого инварианта тензора напряжений и тензора деформаций, а также интенсивности касательных напряжений и интенсивности деформаций сдвига для геометрически линейной модели, либо первого инварианта тензора обобщённых напряжений и тензора нелинейных деформаций, а также интенсивности обобщённых касательных напряжений и интенсивности нелинейных деформаций сдвига для геометрически нелинейной модели,

вычисленных по полученным напряжениям и деформациям, с их значениями на диаграммах объёмного и сдвигового деформирования.

Заключение. Сформулированный в статье алгоритм решения задачи может найти применение при определении напряжённо-деформированного состояния не только сплошной среды, но и элементов строительных и машиностроительных конструкций, находящихся в условиях одномерного плоского деформирования, как с учётом, так и без учёта геометрической нелинейности, физические соотношения для которых и в отношении объёмных деформаций, и в отношении сдвиговых деформаций описываются нелинейными законами, аппроксимируемыми билинейными функциями.

Библиографический список:

1. Гениев Г.А. К вопросу о деформационной теории пластичности сыпучей среды // Строительная механика и расчёт сооружений. - 1974. – №4. – С. 8-10.

2. Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона. М.: Стройиздат. 1974. 316 с.

3. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. М.: Стройиздат, 1996. 416 с.: ил.

4. Садовская О.В., Садовский В.М. Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред // Монография. М.: Физматлит. 2008. 368 с.

5. Еремьянц В.Э. О выборе математической модели для решения инженерных задач // Машиноведение. 2020. № 1 (11). С. 41-52.

6. Адищев В.В., Иванов А.И., Петрова О.В., Мальцев В.В. Применение нелинейных диаграмм деформирования бетона для расчета внецентренно сжатых железобетонных колонн // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2018. № 9 (717). С. 5-19.

7. Сойту Н.Ю. Методика решения задач деформирования и разрушения конструкций // Евразийское Научное Объединение. 2020. № 1-1 (59). С. 75-78.

8. Щербаков С.С. Математическое моделирование и вычислительная механика: потенциал для роста наукоемкой экономики // Наука и инновации. 2019. № 1 (191). С. 45-53.

9. Ломакин Е.В., Щендригина О.П. Напряжения и деформации в диске из физически нелинейного материала с зависящими от вида напряженного состояния свойствами // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2020. № 4. С. 25-33. DOI: 10.31857/S0572329920040091.

10. Козунова О.В. Общий подход к расчету сложных стержневых и пластинчатых систем на произвольном упругом основании // Строительная механика и расчет сооружений. 2021. № 2 (295). С. 2-15. DOI: 10.37538/0039-2383.2021.2.2.15

11. Убайдуллоев М. Н., Серазутдинов М. Н., Ахмадиев Ф. Г. Моделирование и вычислительный эксперимент по расчету напряженно-деформированного состояния железобетонной стержневой конструкции // Вестник Технологического университета. 2021. Т. 24. № 7. С. 112-116.

12. Александровский М.В. Использование метода последовательных аппроксимаций для расчета балок из нелинейно-упругого материала // Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности. 2019. № 5 (383). С. 242-247.

13. Бакушев С.В. Аппроксимация диаграмм деформирования билинейными функциями // Строительная механика и расчёт сооружений. 2019. №2 (283). С. 2-11.

14. Бакушев С.В. Аппроксимация диаграмм деформирования квадратичными функциями // Строительная механика и расчёт сооружений. 2020. №3 (290). С. 2-14. DOI: 10.37538/0039-2383.2020.3.2.14.

15. Бакушев С.В. Аппроксимация диаграмм объёмного и сдвигового деформирования конструкционных материалов билинейными функциями // Региональная архитектура и строительство. 2020. №2(43). С. 76-87.

16. Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения равновесия осесимметричной деформации при билинейной аппроксимации замыкающих уравнений // Строительная механика и расчёт сооружений. 2019. №1. С.8-17.

17. Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения равновесия центрально-симметричной деформации при билинейной аппроксимации замыкающих уравнений // Известия ВУЗов. Строительство. 2018. №11 (719). С. 5-19.

18. Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды для плоской деформации в декартовых координатах при билинейной аппроксимации замыкающих уравнений (геометрически линейная модель) // Региональная архитектура и строительство. 2019. №1(38). С. 76-85.

19. Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды для плоской деформации в декартовых координатах при билинейной аппроксимации замыкающих уравнений (геометрически нелинейная модель) // Региональная архитектура и строительство. 2019. №2(39). С. 86-100.

20. Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды для плоской деформации в цилиндрических координатах при билинейной аппроксимации замыкающих уравнений // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2021. № 69. С. 69-85. DOI: 10.17223/19988621/69/6.

21. Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды для плоской деформации в цилиндрических координатах при билинейной аппроксимации замыкающих уравнений (геометрически нелинейная модель) // Строительная механика и расчёт сооружений. 2020. №4 (291). С. 24-39. DOI: 10.37538/0039-2383.2020.4.24.39.

22. Панфилов Д.А., Пищулев А.А., Гимадетдинов К.И. Обзор существующих диаграмм деформирования бетона при сжатии в отечественных и зарубежных нормативных документах // Промышленное и гражданское строительство. 2014. № 3. С. 80-84.

23. Пинус Б.И., Безделев В.В., Гребенюк Г.И., Созонов П.С. Моделирование физической нелинейности стального стержня при одноосном

нагружении с учётом истории деформирования // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2013. № 5 (653). С. 122-128.

24. Макеев А.Ф., Овчинников И.Г. Некоторые особенности аппроксимации диаграмм деформирования материалов // Механика деформируемых сред. 1978. № 5. С. 152–157.

25. Jingquan Wang, Xingxing Zou, Yu Feng. Bilinear load-deflection model of fiber-reinforced polymer–concrete composite beam with interface sli. // Advances in Mechanical Engineering. 2015. 7(7). DOI: 10.1177/1687814015590312.