

УДК 624.04

## **ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ РАМЫ ПРИ БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ**

*Монахов Владимир Андреевич,*

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,  
г. Пенза,*

*доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».*

### **Аннотация**

Вывод уравнения движения рамы при динамическом нагружении рамы предлагается осуществлять в матричном виде на основе методов динамики систем твёрдых тел. При этом расчётная схема рамы подвергается дискретизации и затем участки рамы рассматриваются как абсолютно твёрдые тела, связанные упругими «шарнирами» в точках разбиений. Топология полученной механической модели рамы описывается графом и сопутствующей ему матрицей инцидентности. Геометрические и жесткостные параметры конечно-элементной модели также могут быть представлены матрицами. Руководствуясь общей методикой вывода уравнений движения систем связанных твёрдых тел в статье разработан алгоритм автоматизированного формирования уравнений движения стержневой системы при деформировании с учётом конечных перемещений на ЭВМ.

**Ключевые слова:** твёрдое тело, стержневая система, граф, матрица инцидентности, уравнение движения, матрица инерции.

## **DERIVATION OF EQUATIONS OF FRAME MOTION FOR LARGE DISPLACEMENTS**

*Monakhov Vladimir Andreevich,*

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,  
Doctor of Sciences, Professor of the department “Mechanics”.*

## Abstract

It is proposed to derive the equation of motion of the frame under dynamic loading of the frame in matrix form based on methods of dynamics of solid systems. In this case, the design scheme of the frame is discretized and then the frame sections are considered as absolutely solid bodies connected by elastic "hinges" at the points of partitions. The topology of the resulting mechanical frame model is described by a graph and its accompanying incidence matrix. Geometric and stiffness parameters of a finite element model can also be represented by matrices. Guided by the General method of deriving equations of motion for systems of connected solids, the article develops an algorithm for automated formation of equations of motion for a rod system under deformation, taking into account final displacements on a computer.

**Keywords:** solid, rod system, graph, incidence matrix, equation of motion, inertia matrix.

Конечно-элементная модель рассматриваемой стержневой системы представлена многозвенной цепью, состоящей из совокупности связанных твёрдых тел в виде отрезков стержней рамы. В местах дискретизации внедряются «шарниры», которые в общем случае могут быть наделены не только упругими свойствами, но и пластичностью, вязкостью, упрочнением и пр. Решение о степени дискретизации рамы принимается на основе анализа расчетной схемы (рис. 1,а). Минимальное число разбиений определяется структурой стержневой системы: количеством стержней, наличием мест изменения жёсткости стержней, числом стыков элементов, выполненных из разнородных материалов, характером приложения нагрузок и пр. (рис. 1,б).

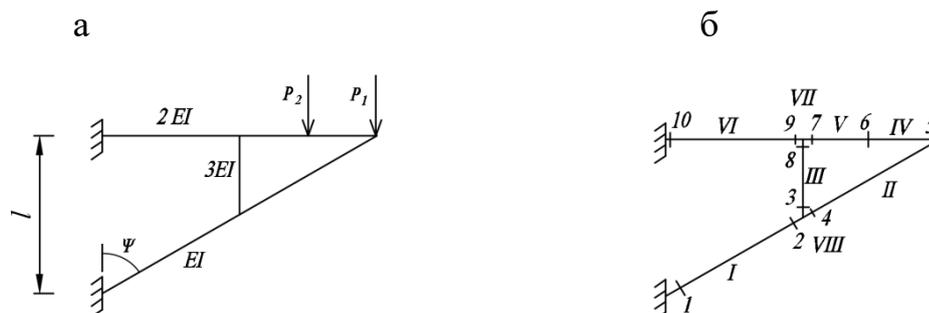


Рисунок 1 - Расчётная схема рамы и её КЭ-модель

Информация о топологии КЭ-модели характеризуется графом и сопровождается соответствующей матрицей инцидентности [1] (рис. 2).

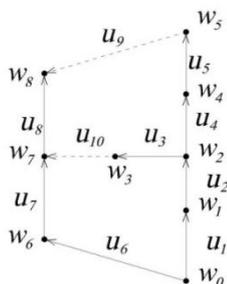


Рисунок 2 - Граф КЭ-модели рамы

Данному графу модели рамы отвечает полная матрица инцидентности размерностью  $8 \times 10$

$$[S] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Уравнения движения системы твёрдых тел, связанных шарнирами, и образующих тем самым многозвенную цепь, лежат в основе рассматриваемого автоматизированного вывода уравнений КЭ-модели [2]-[4]. При этом соответствующий ей граф должен обладать структурой «дерева». Для этого рекомендуется обычно разрывать механическую модель на части так, чтобы в дальнейшем был возможен переход к нужному типу графа. При построении графа с конечными элементами (звеньями цепи) ассоциируются вершины графа (на графе они обозначены символом  $w_i$ ), а с сечениями (шарнирами) - дуги или ветви  $u_j$ . Структура графа для данной рамы представлена на рис. 2.

Дуги графа, изображённые пунктирами, относятся к тем шарнирам, что разорваны. Указав на модели рамы центры тяжести  $C_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) конечных

элементов (см. жирные точки в кружках на рисунке 3) и определив размеры и массы каждого из них, далее формируют матрицы длин и распределения масс отрезков стержней:

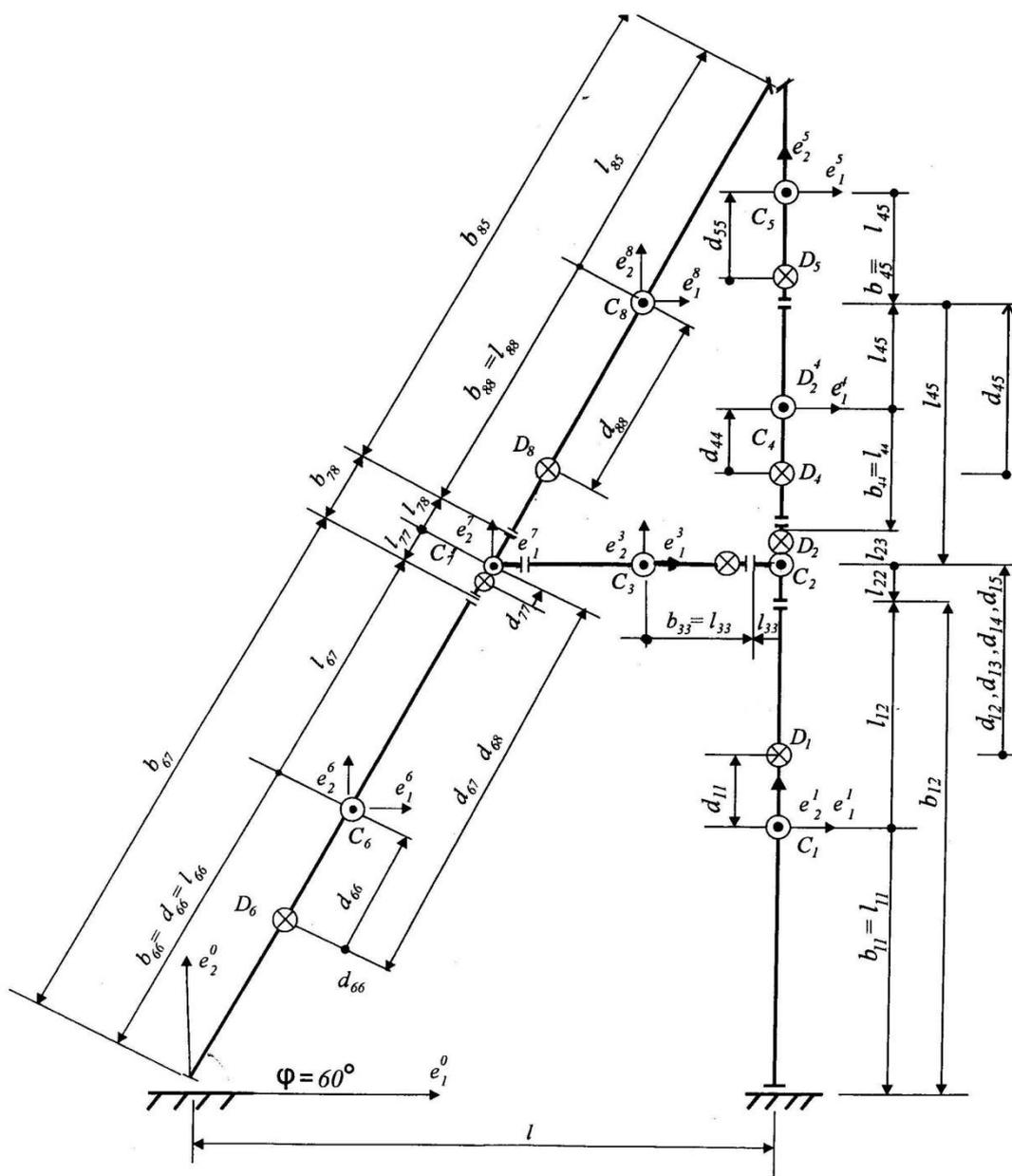


Рисунок 3 – Положение центров тяжести конечных элементов

$$[L] = \begin{bmatrix} -0,365 & 0,365 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,05 & 0,05 & 0,05 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,365 & 0,365 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,18 & 0 & 0 & 0,18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,425 & 0,425 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,05 & 0,05 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,425 \end{bmatrix},$$

$$[\mu] = \begin{bmatrix} 0.8039 & -0.1961 & -0.1961 & -0.1961 & -0.1961 & -0.1961 & -0.1961 & -0.1961 \\ -0.0269 & 0.9731 & -0.0269 & -0.0269 & -0.0269 & -0.0269 & -0.0269 & -0.0269 \\ -0.0967 & -0.0967 & 0.9033 & -0.0967 & -0.0967 & -0.0967 & -0.0967 & -0.0967 \\ -0.0983 & -0.0983 & -0.0983 & 0.9017 & -0.0983 & -0.0983 & -0.0983 & -0.0983 \\ -0.1961 & -0.1961 & -0.1961 & -0.1961 & 0.8039 & -0.1961 & -0.1961 & -0.1961 \\ -0.0269 & -0.0269 & -0.0269 & -0.0269 & -0.0269 & 0.9731 & -0.0269 & -0.0269 \\ -0.0967 & -0.0967 & -0.0967 & -0.0967 & -0.0967 & -0.0967 & 0.9033 & -0.0967 \\ -0.0983 & -0.0983 & -0.0983 & -0.0983 & -0.0983 & -0.0983 & -0.0983 & 0.9017 \end{bmatrix}.$$

Значения компонент последней матрицы вычислены по формуле

$$\mu_{ij} = \bar{\delta}_{ij} - \frac{\mu_i}{\sum_{i=1}^n \mu_i} \quad (i = 1, 2, \dots, 8; \quad j = 1, 2, \dots, 8),$$

где  $\bar{\delta}_{ij}$  - символ Кронекера,  $\mu_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ) - массы отрезков, полученные при дискретизации стержневой системы.

Формирование исходных матриц  $[L]$ ,  $[\mu]$ ,  $[S]$  выполняется в автоматическом режиме на основе простейших геометрических соотношений, выводимых через координаты узлов расчётной схемы стержневой системы, при наличии алгоритма построения матриц инцидентности на основе изображения графа[6].

Элементы ещё одной матрицы - матрицы векторов  $\bar{b}_{ij}$

$$[B] = [S]^{-1}[L] [S] =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.365 & -0.730 & -0.730 & -0.730 & -0.730 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.500 & -0.100 & -0.100 & -0.100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.180 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.366 & -0.366 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.183 & -0.183 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.425 & -0.850 & -0.850 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.050 & -0.100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.425 \end{bmatrix}$$

также определяют длины участков стержневой системы, поскольку индексация элементов матрицы  $[L]$  и структура матрицы инцидентности позволяет с помощью матрицы  $[B]$  охарактеризовать удаление шарниров (расчётных сечений) от одной из опор рамы.

Элементы третьей матрицы длин

$$[D] = -[\mu][S] =$$

$$= - \begin{bmatrix} -0.0118 & 0.3532 & 0.3532 & 0.3532 & 0.3532 & -0.3768 & -0.3768 & -0.3768 \\ -0.0405 & 0.0095 & 0.0595 & 0.0595 & 0.0595 & -0.0405 & -0.0405 & -0.0405 \\ -0.0174 & -0.0174 & 0.1626 & -0.0174 & -0.0174 & -0.0174 & -0.0174 & -0.0174 \\ -0.0898 & -0.0898 & -0.0898 & 0.0932 & 0.2762 & -0.0898 & -0.0898 & -0.0898 \\ -0.0359 & -0.0359 & -0.0359 & -0.0359 & 0.1471 & -0.0359 & -0.0359 & -0.0359 \\ -0.1772 & -0.1772 & -0.1772 & -0.1772 & -0.1772 & 0.2478 & 0.6728 & 0.6728 \\ -0.0147 & -0.0147 & -0.0147 & -0.0147 & -0.0147 & -0.0147 & 0.0353 & 0.0853 \\ -0.0418 & -0.0418 & -0.0418 & -0.0418 & -0.0418 & -0.0418 & -0.0418 & 0.3832 \end{bmatrix},$$

составлены из векторов  $\bar{d}$  (см. рис. 2).

Ориентация компонент вектора  $\bar{d}$  в глобальной системе координат задаётся матрицей углов наклона  $[\delta]$ . Компоненты вектора  $\bar{d}$  определяют положение т. н. барицентров в локальных координатных базисах  $\bar{e}_1^i - \bar{e}_2^i$ . Барицентры показаны на рисунке 2 крестиками в кружках. Аналогично определена и ориентация второй группы векторов при помощи матрицы углов  $[\beta]$ . Векторы длин  $\bar{b}$ ,  $\bar{d}$ , а также матрицы углов  $[\beta]$ ,  $[\delta]$  используются

впоследствии при вычислении элементов матриц инерции  $[M]$  и конечных перемещений  $[H]$ , входящих в уравнение движения рамы

$$[M]\bar{\phi}'' + [H]\bar{\phi}'^2 + [K]\bar{\phi} = \bar{F} + \bar{W}.$$

Здесь  $\bar{\phi}$  - вектор углов поворота конечных элементов, являющийся основной характеристикой деформированного состояния рамы при появлении больших перемещений в процессе движения. Смысл векторов  $\bar{F}$ ,  $\bar{W}$  правой части уравнения разъясняется ниже.

Элементы матрицы инерции  $[M]$  находят по формуле

$$m_{ii} = I_i + \sum_{j=1}^n \mu_j b_{ij}^2 \quad (i=1, 2, \dots, 8; \quad n=8)$$

- для диагональных и -

$$m_{ij} = \mu b_{ij} d_{jV} \cos(\phi_i - \phi_j + \delta_{ij} - \beta_{jV}) \quad (i=1, 2, \dots, 8)$$

- для побочных. Здесь  $I_i$  - момент инерции  $i$  - го звена относительно его центральной оси.

По аналогии с определением элементов матрицы масс  $[M]$  происходит и формирование матрицы конечных перемещений  $[H]$ . Формула для вычисления побочных элементов  $h_{ij}$  этой матрицы содержит, в отличие от величин  $m_{ij}$ , синусы тех же аргументов; при этом  $h_{ji} = -h_{ij}$ , а элементы главной диагонали совпадают друг с другом, т. е.,  $h_{ii} = m_{ii}$  ( $i=1, 2, \dots, 8$ ).

Матрица жесткости «шарниров» рамы  $[K] = [S][k][S]^T$  имеет тот же порядок, что и матрица инцидентности ( $n=8$ ). Здесь  $[k]$  - диагональная матрица коэффициентов жёсткости «шарниров». Значения коэффициентов находят по формуле  $k_i = (EI_i + EI_{i+1}) / (l_i + l_{i+1})$  ( $i=1, 2, \dots, 9$ ), где  $EI_i$  - жёсткость  $i$  - ого отрезка стержня при изгибе. В данном примере для рамы, изготовленной из стальных двутавров № 24 ( $EI_i = 2,1 \cdot 10^{11} \cdot 3,46 \cdot 10^{-5} = 7,27 \cdot 10^6 \text{ Н м}^2$ ) при  $l = 0,6$  м и угле наклона нижнего пояса  $\psi = 60^\circ$ , элементы матрицы жёсткости имеют следующие значения:

$$[K] = \begin{bmatrix} 27461 & -17508 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -17508 & 69116 & -31591 & -20016 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -31591 & 31591 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -20016 & 0 & 39869 & -19852 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -19852 & 19852 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 23845 & -15296 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15296 & 30593 & -15296 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -15296 & 15296 \end{bmatrix}$$

При вычислении компонент вектор-столбца  $\bar{F}_0$  внешнего воздействия, пользуются формулой

$$f_{0i} = R_i(p) + \sum_{j:w_i \leq w_j}^4 b_{ij} [P_{j1} \sin(\phi_i + \beta_{ij}) - P_{j2} \cos(\phi_i + \beta_{ij})] \quad (i=1, 2, 3, 4),$$

которая вследствие ограничения, указанного под знаком суммы во втором слагаемом, при действии только одной силы  $P_2$  даёт только три составляющих, а именно:  $f_{01} = P_2 b_{12}$ ,  $f_{02} = P_2 (b_{12} + b_{23})$ ,  $f_{03} = P_2 (b_{23} + b_{34})$ ;  $R_i(p)$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) - момент внешней силы, приложенной в пределах  $i$ -го звена, относительно центральной оси;  $P_{j1}$ ,  $P_{j2}$  - в общем случае - проекции внешней силы на оси координат. Условие  $j:w_i \leq w_j$  указывает на суммирование моментов силы  $P$  относительно опоры, оставшейся после разделения рамы на части при преобразовании КЭ-модели в связи с переходом к структуре модели с графом типа «дерева».

Компоненты вектор-столбца  $\bar{U}$  правой части уравнения относятся к условиям замкнутости контуров рамы:

$$\begin{aligned} l_1 \sin \phi_1 + l_2 \sin_2/2 + l_3 \cos \phi_3 + l_6 \sin \phi_6 + l_7 \sin \phi_7/2 &= 0, \\ l_1 \cos \phi_1 + l_2 \cos_2/2 + l_3 \sin \phi_3 + l_6 \cos \phi_6 + l_7 \cos \phi_7/2 &= l, \\ l_2 \sin_2/2 + l_3 \sin \phi_3 + l_4 \sin_4 + l_5 \sin \phi_5 + l_7 \sin \phi_7/2 + l_8 \sin \phi_8 &= 0, \\ l_2 \cos_2/2 + l_3 \cos \phi_3 + l_4 \cos_4 + l_5 \cos \phi_5 + l_7 \cos \phi_7/7 + l_8 \cos \phi_8 &= l/2, \end{aligned}$$

Одним из слагаемых вектора  $\bar{U}$  является также вектор-столбец  $\bar{V} = -[A]^T \bar{M}^*[A]$ , благодаря которому осуществляется учёт влияния моментов

(реакций) в разрезанных шарнирах. Их можно выразить через углы взаимного поворота звеньев цепи, примыкающих к указанным шарнирам, по формулам:

$M_1^* = k_1\phi_1$ ,  $M_8^* = k_8(\phi_7 - \phi_3)$ , где  $k_1$ ,  $k_8$  – коэффициенты жесткости разрезанных шарниров.

Очевидно, что не только формирование исходных матриц  $[L]$ ,  $[\mu]$ , включая матрицу инцидентности  $[S]$ , матриц длин  $[B]$ ,  $[D]$  и углов  $[\beta]$ ,  $[\delta]$ , но и построение матриц  $[M]$ ,  $[H]$  и  $[K]$  при выводе уравнения движения рамы поддаётся алгоритмизации, так что все перечисленные матричные операции могут быть выполнены в автоматическом режиме на компьютере [6].

*Вывод.* Алгоритм вывода уравнений движения консольной рамы, предложенный в статье, демонстрирует возможность формирования системы нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих динамическое деформирование упругой стержневой системы при больших перемещениях, в матричном виде.

#### **Библиографический список:**

1. Harari, F. Graph Theory: –N.-Y., 1973. 300 pp.
2. Hooker, W. W., The dynamical Attitude Equations for an n - Body Satellite. / F. Hooker, G. Margulies // Journal Astronautical Sciences. - 1965, v. XXII, №4, pp. 123-128.
3. Lilov, L. Bewegungsgleichngen fur Systeme starrer Korper mit Gelenken beliebiger Eigenschaften [Техт] / L. Lilov, J. Wittenburg // Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Mechanik. 1977, v. 57, s . 137-152.
4. Fenves, S. J., Network-topological formulation of structures analysis. / S. J. Fenves, Branin F.H. // Journal of structural division. 1963, vol. 89. ST4, pp. 189-214.
5. Монахов, В. А. Формирование матрицы поворота вектора узловых перемещений стержневой системы [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2020. № 11. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: <http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no11-mai->

2020/matematiceskoe-modelirovanie-chislennye-metody-i-kompleksy-programm/11.2/view

6. Зубов, В. С. Программирование на языке TURBO PASCAL [Текст] / В. С. Зубов. М.: Изд. – во «ФИЛИНЪ», 1997, 320 с.