

УДК 519.633

**АЛГОРИТМ РАСЧЁТА НАПРЯЖЁННО-
ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ
УПРУГОЙ В ОТНОШЕНИИ ОБЪЁМНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ И
НЕЛИНЕЙНОЙ В ОТНОШЕНИИ СДВИГОВЫХ
ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ БИЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ
ЗАМЫКАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ
(плоское одномерное деформирование)**

Бакушев Сергей Васильевич

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Аннотация.

Рассматривается построение дифференциальных уравнений равновесия сплошной среды, находящейся в условиях одномерного плоского деформирования, в перемещениях. Механическое поведение сплошной среды описывается линейным законом упругости в отношении объёмных деформаций и произвольным нелинейным законом в отношении сдвиговых деформаций. Диаграмма сдвигового деформирования аппроксимируется билинейной функцией. Математическая модель сплошной среды строится как с учётом, так и без учёта геометрической нелинейности (в смысле В.В.Новожилова). Сформулирован алгоритм определения напряжённо-деформированного состояния полупространства, находящегося в условиях плоского одномерного деформирования. Алгоритм решения задачи, а также физические зависимости и дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях могут найти применение при определении напряжённо-деформированного состояния сплошных сред и элементов строительных и машиностроительных конструкций, находящихся в условиях одномерного плоского деформирования и описываемые математическими моделями как с учётом, так и без учёта

геометрической нелинейности, замыкающие уравнения физических соотношений для которых, построенные на основе экспериментальных данных, аппроксимированы билинейными функциями в отношении сдвиговых деформаций и линейными функциями в отношении объёмных деформаций.

Ключевые слова: сплошная среда, плоская одномерная деформация, линейно-упругое объёмное деформирование, нелинейное сдвиговое деформирование, билинейные замыкающие уравнения, дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях, геометрическая линейность, геометрическая нелинейность, алгоритм решения задачи.

**ALGORITHM OF CALCULATING THE TENSE-DEFORMED
STATE OF A SOLID ENVIRONMENT ELASTIC WITH REGARD
TO VOLUME DEFORMATIONS AND NON-LINEAR SHIFT
DEFORMATIONS IN BILINA APPROXIMATION OF CLOSING
EQUATIONS**

(flat one-dimensional deformation)

Bakushev Sergey Vasilevich

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor of the department "Mechanics".

Abstract.

The construction of differential equations of equilibrium of a solid environment, located in conditions of one-dimensional flat deformation, in movements is considered. The mechanical behavior of a solid environment is described by the linear law of elasticity with respect to volume deformations and arbitrary non-linear law with respect to shift deformations. The diagram of shift deformation is approximated by the bilina function. The mathematical model of a solid environment is built both with regard to and without consideration of geometric non-linearity (in the sense of V.V.Novozhilov). The algorithm for determining the tense-deformed state of semi-space, which is in conditions of flat one-dimensional

deformation, has been formulated. The problem solving algorithm, as well as physical dependence and differential equations of equilibrium in movements can be used in determining the tense-deformed state of solid environments and elements of construction and engineering structures, in one-dimensional flat deformation and described by mathematical models both with and without geometric non-linearity, the closing equations of physical ratios for which, based on experimental data, are approximated by biline functions in relation to shift deformations and linear functions in relation to volume deformations.

Keywords: solid environment, flat one-dimensional deformation, linear-elastic volume deformation, non-linear shift deformation, biline closing equations, differential equilibrium equations in movements, geometric linearity, geometric nonlinearity algorithm for solving a problem.

Введение. Геометрические соотношения, физические зависимости и уравнения равновесия совместно с краевыми условиями составляют основную группу уравнений для расчёта сплошной среды и деформируемых тел. Одной из наиболее простых, но наименее достоверных по получаемым результатам, является модель линейной теории упругости, когда зависимости между напряжениями и деформациями описываются линейным законом. Для точного описания напряжённо-деформированного состояния деформируемого тела (сплошной среды), физические зависимости должны соответствовать данным эксперимента, то есть описываться нелинейными функциями. При этом связь между объёмными деформациями и средним напряжением должна описываться, вообще говоря, одними нелинейными функциями, а связь между сдвиговыми деформациями и касательными напряжениями - другими нелинейными функциями. Кроме того, необходимо отказаться от гипотез, принятых в линейной теории упругости и оставить лишь гипотезу о сплошности и однородности деформируемого тела. Сформулированные обстоятельства приводят к теории упругости нелинейной как физически, так и геометрически [1, 2].

Один из приёмов, позволяющих упростить решение задач теории упругости в общей нелинейной постановке, заключается в том, что замыкающие соотношения физических уравнений аппроксимируются какими-либо простыми функциями, например билинейными [3]. На основе билинейной аппроксимации автором в работе [4] представлен ряд характерных задач механики деформируемого твёрдого тела, в которых получены дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды для случаев одномерной плоской, осесимметричной, центрально-симметричной деформации, а также плоской деформации в декартовых и цилиндрических координатах.

В данной работе формулируется алгоритм решения задачи об определении напряжённо-деформированного состояния сплошной среды, находящейся в условиях плоского одномерного деформирования $u_x = u(x)$, $u_y = 0$, $u_z = 0$, механическое поведение которой в части объёмных деформаций описывается линейно-упругим законом, а в части сдвиговых деформаций – произвольным нелинейным законом, аппроксимированным билинейной функцией. Разрешающие физические и дифференциальные уравнения строятся для сплошной среды как без учёта (рис. 1), так и с учётом (рис. 2) геометрической нелинейности.

Физические уравнения для геометрически линейной модели сплошной среды. В соответствии с рис. 1 модуль объёмного расширения (сжатия) не изменяется в процессе деформирования и равен:

$$K = \frac{1}{3} K_0 = Const. \quad (1)$$

Модуль сдвига на первом прямолинейном участке диаграммы $T \approx G$ будет величиной постоянной:

$$G = G_0 = Const. \quad (2)$$

На втором прямолинейном участке диаграммы $T \approx G$ секущий модуль сдвига будет определяться выражением:

$$G = G(\Gamma) = G_1 + (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \neq Const. \quad (3)$$

Здесь K_0 – начальный модуль объёмного расширения (сжатия); G_0 – начальный модуль сдвига; G_1 – модуль упрочнения при сдвиге.

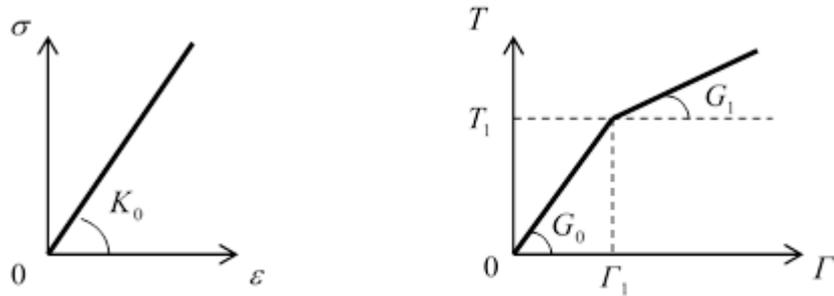


Рисунок 1 - Диаграммы объёмного $\sigma \approx \varepsilon$ и сдвигового $T \approx \Gamma$ деформирования

Здесь σ – первый инвариант тензора напряжений; ε – первый инвариант тензора деформаций; T – интенсивность касательных напряжений; Γ – интенсивность деформаций сдвига.

При плоском одномерном деформировании сплошной среды для геометрически линейной модели $\varepsilon = \varepsilon_{xx}$; $\Gamma = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_{xx}^2}$, причём $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$ и,

следовательно, $\Gamma = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}$. Тогда $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial x} = \frac{4}{3\Gamma} \varepsilon_{xx} \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial x} = \frac{4}{3\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \text{ При этом } \Gamma = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon^2}.$$

Рассмотрим два основных случая физических зависимостей соответствующих случаям, первое, когда текущее напряжённо-деформированное состояние в точке соответствует уровню напряжений и деформаций, не превосходящих точку излома графика диаграммы $T \approx \Gamma$, и, второе, когда текущее напряжённо-деформированное состояние в точке соответствует уровню напряжений и деформаций, превосходящих точку излома графика диаграммы $T \approx \Gamma$.

Случай 1: $0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1$. В этом случае физические уравнения плоского одномерного деформирования будут иметь вид:

$$\sigma_{xx} = \left(\frac{1}{3} K_0 + \frac{4}{3} G_0 \right) \varepsilon_{xx}; \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \left(\frac{1}{3} K_0 - \frac{2}{3} G_0 \right) \varepsilon_{xx}. \quad (4)$$

Случай 2: $\Gamma \geq \Gamma_1$. В этом случае физические уравнения плоского одномерного деформирования будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{1}{3} K_0 \varepsilon + 2 \left[G_1 + (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \right] \left(\varepsilon_{xx} - \frac{1}{3} \varepsilon \right); \\ \sigma_{yy} = \sigma_{zz} &= \frac{1}{3} K_0 \varepsilon + 2 \left[G_1 + (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \right] \left(\varepsilon_{yy} - \frac{1}{3} \varepsilon \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Дифференциальные уравнения для геометрически линейной модели.

Подставляя физические уравнения (4) и (5) в дифференциальное уравнение равновесия одномерного плоского деформирования сплошной среды $\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + F_x = 0$, получим два вида разрешающих уравнений в перемещениях.

1). Для физических уравнений (4) дифференциальное уравнение равновесия в перемещениях получает вид:

$$\left(\frac{1}{3} K_0 + \frac{4}{3} G_0 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F_x = 0. \quad (6)$$

3). Для физических уравнений (5) дифференциальное уравнение равновесия в перемещениях записывается в следующем виде:

$$\left\{ \left(\frac{1}{3} K_0 + \frac{4}{3} G_1 \right) + \frac{4}{3} (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \left[1 - \frac{4}{3\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F_x = 0. \quad (7)$$

Таким образом, дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для сплошной, линейно-упругой в отношении объёмных деформаций, среды, находящейся в условиях одномерного плоского деформирования, при билинейной аппроксимации графика диаграммы сдвиговых деформаций без учёта геометрически нелинейности построены.

Физические уравнения для геометрически нелинейной модели сплошной среды. В соответствии с рис. 2 геометрически нелинейный аналог

модуля объёмного расширения (сжатия) не изменяется в процессе деформирования и равен:

$$K^* = \frac{1}{3} K_0^* = Const. \quad (8)$$

Геометрически нелинейный аналог модуля сдвига на первом прямолинейном участке диаграммы $T^* \approx \Gamma^*$ будет величиной постоянной:

$$G^* = G_0^* = Const. \quad (9)$$

На втором прямолинейном участке диаграммы $T^* \approx \Gamma^*$ геометрически нелинейный аналог секущего модуля сдвига будет определяться выражением:

$$G^* = G^*(\Gamma^*) = G_1^* + (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} \neq Const. \quad (10)$$

Здесь K_0^* – геометрически нелинейный аналог начального модуля объёмного расширения (сжатия); G_0^* – геометрически нелинейный аналог начального модуля сдвига; G_1^* – геометрически нелинейный аналог модуля упрочнения при сдвиге.

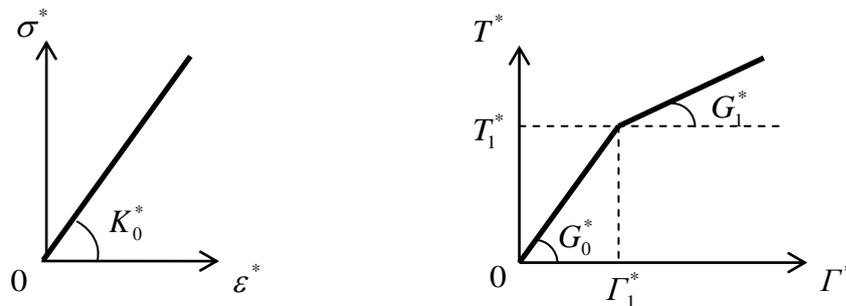


Рисунок 2 - Диаграммы объёмного $\sigma^* \approx \varepsilon^*$ и сдвигового $T^* \approx \Gamma^*$ деформирования

Здесь σ^* – первый инвариант тензора обобщённых напряжений; ε^* – первый инвариант тензора нелинейных деформаций; T^* – интенсивность обобщённых касательных напряжений; Γ^* – интенсивность нелинейных деформаций сдвига.

При плоском одномерном деформировании сплошной среды, описываемой геометрически нелинейной моделью $\varepsilon^* = \varepsilon_{xx}^*$; $\Gamma^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_{xx}^{*2}}$,

причём $\varepsilon_{xx}^* = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$ и, следовательно, $\Gamma^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]^2}$. Тогда

$$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_{xx}^*}{\partial x} = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Gamma^*}{\partial x} = \frac{4}{3\Gamma^*} \varepsilon_{xx}^* \frac{\partial \varepsilon_{xx}^*}{\partial x} = \frac{4}{3\Gamma^*} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

При этом $\Gamma^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_{xx}^{*2}}$.

Рассмотрим два основных случая физических зависимостей соответствующих случаям, когда текущее напряжённо-деформированное состояние в точке соответствует уровню напряжений и деформаций не превосходящих точку излома графика диаграммы $T^* \approx \Gamma^*$, и когда текущее напряжённо-деформированное состояние в точке соответствует уровню напряжений и деформаций превосходящих точку излома графиков диаграммы $T^* \approx \Gamma^*$.

Случай 1: $0 \leq \Gamma^* \leq \Gamma_1^*$. В этом случае физические уравнения одномерного плоского деформирования геометрически нелинейной сплошной среды будут иметь вид:

$$\sigma_{xx}^* = \left(\frac{1}{3} K_0^* + \frac{4}{3} G_0^* \right) \varepsilon_{xx}^*; \quad \sigma_{yy}^* = \sigma_{zz}^* = \left(\frac{1}{3} K_0^* - \frac{2}{3} G_0^* \right) \varepsilon_{xx}^*. \quad (11)$$

Случай 2: $\Gamma^* \geq \Gamma_1^*$. В этом случае физические уравнения одномерного плоского деформирования геометрически нелинейной сплошной среды будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^* &= \frac{1}{3} K_0^* \varepsilon^* + 2 \left[G_1^* + (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} \right] \left(\varepsilon_{xx}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right); \\ \sigma_{yy}^* = \sigma_{zz}^* &= \frac{1}{3} K_0^* \varepsilon^* + 2 \left[G_1^* + (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} \right] \left(\varepsilon_{yy}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Дифференциальные уравнения для геометрически нелинейной модели. Подставляя физические уравнения (11) и (12) в дифференциальное уравнение равновесия одномерного плоского деформирования сплошной среды при учёте геометрической нелинейности $\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sigma_{xx}^* \right] + F_x^* = 0$, получим два вида разрешающих уравнений в перемещениях.

1). Для физических уравнений (11):

$$\left(\frac{1}{3} K_0^* + \frac{4}{3} G_0^* \right) \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) F_x^* = 0. \quad (13)$$

2). Для физических уравнений (12):

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \left\{ \left(\frac{1}{3} K_0^* + \frac{4}{3} G_1^* \right) + \frac{4}{3} (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} - \frac{16}{9} (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^{*3}} \times \right. \\ & \times \left. \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right]^2 \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left\{ \left(\frac{1}{3} K_0^* + \frac{4}{3} G_1^* \right) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] + \right. \\ & \left. + \frac{4}{3} (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) F_x^* = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Таким образом, дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях, описывающие напряжённо-деформированное состояние сплошной, линейно-упругой в отношении объёмных деформаций, среды, находящейся в условиях одномерного плоского деформирования, при билинейной аппроксимации графика диаграммы сдвиговых деформаций с учётом геометрической нелинейности построены.

Алгоритм практического определения напряжённо-деформированного состояния сплошной среды. Рассмотрим, в качестве примера, полупространство, на свободной поверхности которого действует равномерно-распределённая, бесконечно-протяжённая нагрузка интенсивности q . Полупространство будет находиться в условиях плоского одномерного деформирования. Механическое поведение материала полупространства описывается моделью, в соответствии с которой объёмные деформации и

средние напряжения в точке связаны между собой линейным законом; сдвиговые деформации и касательные напряжения связаны между собой произвольным законом, аппроксимированным билинейной функцией. Диаграммы объёмного и сдвигового деформирования известны. Требуется определить напряжённо-деформированное состояние полупространства.

Алгоритм решения будет состоять из следующих этапов.

1. Предполагаем, что деформации и напряжения в полупространства таковы, что интенсивность деформаций сдвига не выходит за пределы точки излома графика диаграммы $T \approx \Gamma$.
2. На основании дифференциального уравнения (6) определяем перемещения, а, следовательно, и деформации, и, на основании соотношений (4), напряжения в каждой точке полупространства от действующей нагрузки q .
3. По полученным данным вычисляем интенсивность деформаций сдвига.
4. Если полученная величина интенсивности деформаций сдвига меньше интенсивности деформаций сдвига, соответствующей точке излома графика диаграммы $T \approx \Gamma$, то задача решена, и полученные деформации и напряжения соответствуют действующей нагрузке. Иначе переходим к пункту 5.
5. Если полученная величина интенсивности деформаций сдвига больше интенсивности деформаций сдвига, соответствующей точке излома графика диаграммы $T \approx \Gamma$, то пользуясь дифференциальным уравнением (7) и физическими соотношениями (5) находим перемещения, деформации и напряжения в каждой точке полупространства от действующей нагрузки q . Эти характеристики напряжённо-деформированного состояния полупространства будут решением нашей задачи.
6. Правильность полученного решения оцениваем путём сравнения интенсивностей касательных напряжений и деформаций сдвига,

вычисленных по полученным напряжениям и деформациям, и их значениям на диаграмме сдвига $T \approx G$.

Сформулированный выше алгоритм для геометрически линейной модели сплошной среды, без каких либо изменений переносится на модель сплошной среды, учитывающей геометрическую нелинейность.

Заключение. Сформулированный в статье алгоритм решения задачи, а также физические зависимости и дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях могут найти применение при определении напряжённо-деформированного состояния не только сплошной среды, но и элементов строительных и машиностроительных конструкций, находящихся в условиях одномерного плоского деформирования, как с учётом, так и без учёта геометрической нелинейности, физические соотношения для которых в отношении объёмных деформаций описываются линейным законом упругости, а в отношении сдвиговых деформаций описываются нелинейным законом, аппроксимируемым билинейными функциями.

Библиографический список:

1. Новожилов В.В. Теория упругости. Судпромгиз., 1958г. 370 с.
2. Бакушев С.В. Геометрически и физически нелинейная механика сплошной среды: Плоская задача. Изд. стереотип. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2020. 312 с.
3. Бакушев С.В. Аппроксимация диаграмм деформирования билинейными функциями // Строительная механика и расчёт сооружений. 2019. №2 (283). С.2-11.
4. Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения и краевые задачи механики деформируемого твёрдого тела. М.: ЛЕНАНД, 2020. 304 с.