

УДК 624.041

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТОНКОСТЕННОГО Z-
ОБРАЗНОГО СТЕРЖНЯ С ЗАКРУГЛЕНИЕМ, С УСИЛЕННОЙ
ОТБОРТОВКОЙ И С УСИЛЕННОЙ ПОЛКОЙ, С УЧЕТОМ
ИЗГОТОВЛЕНИЯ**

Волков Владимир Павлович,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика».

Аннотация

Статья посвящена определению геометрических характеристик гнутого тонкостенного стержня Z-образного профиля с закруглением и с усиленной отбортовкой и с усиленной полкой, с учетом изготовления при расчете его на растяжение и изгиб с кручением. Приведены расчетные формулы для определения относительных значений длины контура, главных осевых моментов инерции и главных осевых моментов сопротивления, главных секториальных координат.

Ключевые слова: гнутый тонкостенный стержень, Z-образный профиль, главные центральные оси сечения, главные осевые моменты инерции, главные осевые моменты сопротивления, главные секториальные координаты.

**GEOMETRIC CHARACTERISTICS THIN-WALLED Z-SHAPED ROD WITH
ANY CURVING, WITH REINFORCED FLANGING AND WITH
REINFORCED SHELF, WITH MANUFACTURE**

Volkov Vladimir Pavlovich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Candidate of Sciences, Associate Professor of the department «Mechanics».

Abstract

Article is devoted to definition of the geometric characteristics of a buckler

thin-walled rod Z-shaped profile with any curving and with reinforced flanging with manufacture for calculation this on tension, curve, turn. To deduce a formula of calculation dimensions length of contours, main axes moments of inertia and main axes moments of resistance, main sector coordinates.

Keywords: buckler thin-walled rod, Z-shaped profile, the main central axes section, main axes moments of inertia, main axes moments of resistance, main sector coordinates.

Условные обозначения (рис.1):

XU – главные центральные оси сечения;

$B = 2 \cdot b$ – габаритная ширина срединной линии профиля сечения;

$H = 2 \cdot h$ – габаритная высота срединной линии профиля сечения;

$\delta \ll h, b$ - постоянная толщина срединной линии профиля сечения;

$\delta_s \ll h, b$ - толщина усиленной отбортовки s ;

$\delta_n \ll h, b$ - толщина усиленной полки;

L – полная длина срединной линии профиля сечения;

r – радиус закругления срединной линии профиля сечения станком;

r_1 - радиус закругления срединной линии полки с отбортовкой;

R – наибольший радиус закругления срединной линии профиля сечения;

γ - угол между наклонной стенкой профиля и осью X ;

$b_h = \frac{b}{h} = \frac{B}{H}$ - относительная ширина профиля сечения;

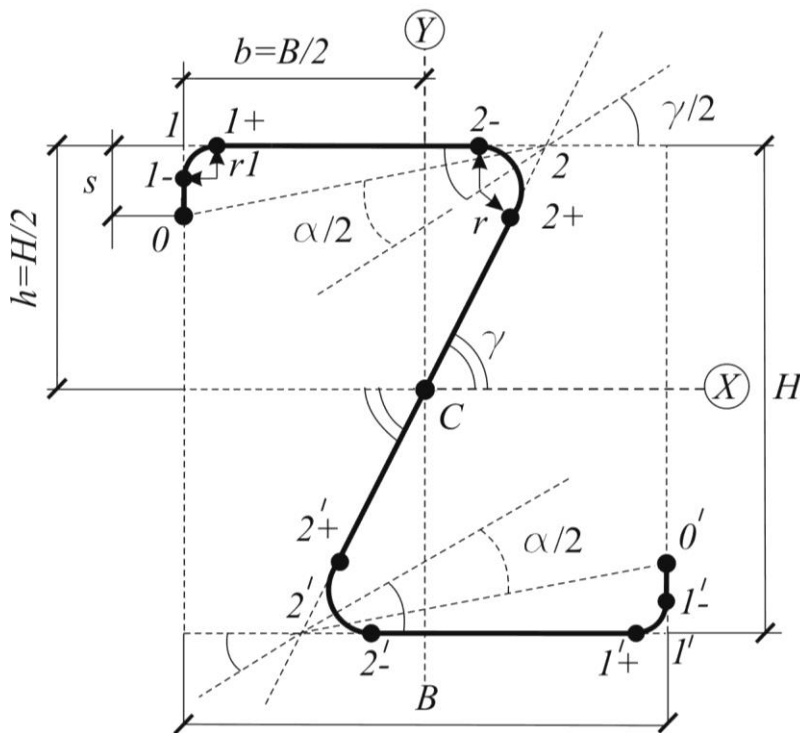
$s_h = \frac{s}{h}$ - относительная длина отбортовки;

$r_h = \frac{r}{h}$ - относительный радиус закругления профиля сечения;

$r_{1h} = \frac{r_1}{h}$ - относительный радиус закругления отбортовки.

В статье рассматривается задача определения геометрических размеров и геометрических характеристик сечения гнутого тонкостенного стержня

Z - образного сечения толщины δ в общем случае с усиленной толщиной δ_s отбортовки s с усиленной толщиной полки δ_n , параллельной главной центральной оси X , и с закруглением r и r_1 (рис.1), т.е. определяется относительная ширина сечения b_h , при заданном значении углов α γ и относительных величин r_h , r_{1h} , s_h , когда XY – главные центральные оси сечения.



Дано: $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$;

$0 < \alpha < \gamma$;

$0 \leq r_h \leq \frac{\cos \gamma}{1 + \cos \gamma}$;

$0 \leq r_{1h} \leq \frac{\cos \gamma}{1 + \cos \gamma}$

$\frac{\delta_s}{\delta}; \frac{\delta_n}{\delta}$

Найти b_h - ?

где

$$s_h = \left(b_h + \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} - \frac{r_h}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} \right) \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma - \alpha}{2}$$

Рисунок 1 – C - центр симметрии

Частные случаи, когда полка тонкостенного Z-образного стержня *постоянной толщины* δ параллельна главной центральной оси, рассмотрены:

- без отбортовки и без закругления, т.е. при $\alpha = \gamma$, $s = 0$, $r = 0$ в [1];
- без отбортовки, но с учетом закругления r , т.е. при $\alpha = \gamma$, $s = 0$ в [2], [3];

- с отбортовкой s и без закругления для сечения, равноудаленного от оси Y , когда $b = \frac{h}{\operatorname{tg}\gamma}$, т.е. при $r = 0$ в [4]. Причём, при $s \leq h$ задача имеет решение

при $\gamma \geq \arcsin \frac{2}{3} \approx 0,73$, если $\gamma \geq 0,7522$, то $\alpha \geq 0$, $s \leq h \cdot \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \gamma}$;

- с отбортовкой s и с закруглением r для сечения, равноудаленного от оси Y , когда $b = \frac{h}{\operatorname{tg}\gamma}$, в [5];

- с отбортовкой s , но без закругления, т.е. при, $r = 0$ в [6];

- с отбортовкой s и с закруглением r , т.е. при $r_1 = 0$, в [7].

Случай, когда усиленная полка тонкостенного Z -образного стержня толщиной δ_n параллельна главной центральной оси и с толщиной стенки δ , рассмотрен без учета отбортовки s и без закругления r , т.е. при $\alpha = \gamma$, $s = 0$, $r = 0$ в [8].

Случай, когда усиленная отбортовка s толщиной δ_s тонкостенного Z -образного стержня толщиной δ с полкой параллельной главной центральной оси и с учетом закругления r , т.е. при $r_1 = 0$, рассмотрен в [9].

Итак, учитывая центральную симметрию, рассмотрим верхнюю половину сечения (рис.2), причём, центр тяжести, центр изгиба или центр кручения всего сечения совпадают с центром симметрии, т.е. с точкой C (рис.2).

Случай, когда усиленная отбортовка s толщиной δ_s тонкостенного Z -образного стержня толщиной δ , с усиленной полкой толщиной δ_n , параллельной главной центральной оси, и с учетом закругления r , т.е. при $r_1 = 0$, рассмотрен в [10].

Итак, учитывая центральную симметрию, рассмотрим верхнюю половину сечения между характерными точками $\langle 0, 1-, 1+, 2-, 2+, C \rangle$ (рис.1), причём, центр тяжести, центр изгиба или центр кручения всего сечения совпадают с центром симметрии, т.е. с точкой C (рис.2).

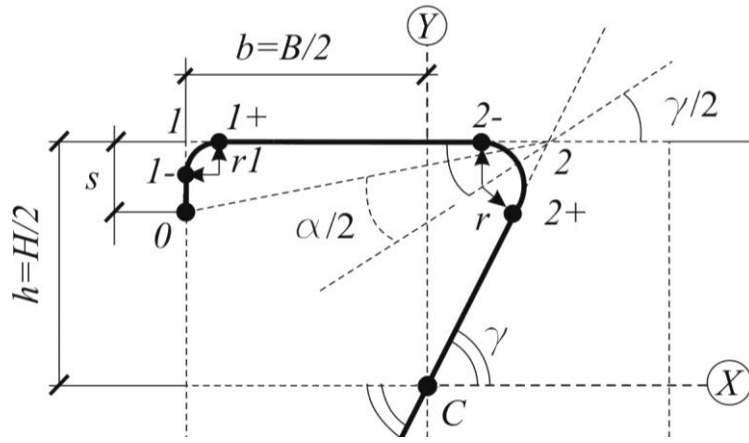


Рисунок 2 - Верхняя половина сечения. C - центр симметрии

Декартовы координаты x , y характерных точек и длины соответствующих участков l (рис.2):

$$x_{2-} = \frac{h}{\operatorname{tg} \gamma} - \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}, \quad y_{2-} = h, \quad \beta = \pi - \gamma,$$

$$x_{2+} = x_{2-} + r \cdot \sin \gamma, \quad y_{2+} = h - r - r \cdot \cos \gamma, \quad l_{C2+} = \frac{h}{\sin \gamma} - \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}},$$

$$x_0 = -b, \quad y_0 = h - s, \quad l_{01-} = s - r_1,$$

$$x_{1-} = -b, \quad y_{1-} = h - r_1, \quad l_{1+2-} = b - r_1 + x_{2-},$$

$$x_{1+} = -b + r_1, \quad y_{1+} = h, \quad l_{C1+} = \sqrt{x_{1+}^2 + y_{1+}^2}.$$

Центральные оси X Y (рис.2) являются главными [11], если

$$I_{XY} = \int_0^{\frac{l}{2}} \delta(s) \cdot x(s) \cdot y(s) \cdot ds \Rightarrow 0$$

$$\left(\frac{\delta_s}{\delta} \right) \cdot s - r_1 \cdot b \cdot \left(h - \frac{s + r_1}{2} \right) + \left(\frac{\delta_n}{\delta} \right) \cdot b - r_1^2 \cdot \frac{h}{2} +$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} (b - r_1 + r_1 \cdot \sin \varphi) \cdot (h - r_1 + r_1 \cdot \cos \varphi) \cdot r_1 \cdot d\varphi =$$

$$= \left(\frac{\delta_n}{\delta} \right) \cdot \frac{x_{2-}^2 \cdot y_{2-}}{2} + \frac{l_{C2+} \cdot x_{2+} \cdot y_{2+}}{3} + \int_0^{\beta} (x_{2-} + r \cdot \sin \varphi) \cdot (h - r + r \cdot \cos \varphi) \cdot r \cdot d\varphi,$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\delta_s}{\delta} \right) \cdot \left(s - r_1 \cdot b \cdot h - \frac{b}{2} \cdot s^2 - r_1^2 \right) + \left(\frac{\delta_n}{\delta} \right) \cdot b - r_1^2 \cdot \frac{h}{2} + \\
& + r_1 \cdot \left(b - r_1 \cdot h - r_1 \cdot \frac{\pi}{2} + r_1 \cdot b - r_1 + r_1 \cdot h - r_1 + r_1^2 \cdot \frac{1}{2} \right) = \\
& = \left(\frac{\delta_n}{\delta} \right) \cdot \frac{x_{2-}^2 \cdot y_{2-}}{2} + \frac{l_{C2+} \cdot x_{2+} \cdot y_{2+}}{3} + \\
& + r \cdot \left(x_{2-} \cdot h - r \cdot \beta + x_{2-} \cdot r \cdot \sin \beta + r \cdot h - r \cdot 1 - \cos \beta + r^2 \frac{\sin^2 \beta}{2} \right),
\end{aligned}$$

где, вводя обозначения

$$\begin{aligned}
\theta &= \tan \frac{\gamma - \alpha}{2}, \quad x_h = \frac{1}{\tan \gamma} - \frac{r_h}{\tan \frac{\gamma}{2}}, \quad \theta x_h = \theta \cdot x_h, \\
\delta_{s\delta} &= \frac{\delta_s}{\delta}, \quad \delta_{n\delta} = \frac{\delta_n}{\delta}.
\end{aligned}$$

относительное значение $b_h > 0$ найдем из решения квадратного уравнения:

$$\begin{aligned}
& b_h^3 \cdot \theta^2 \cdot \delta_{s\delta} + b_h^2 \cdot \theta \cdot \theta_{xh} - 1 \cdot 2 \cdot \delta_{s\delta} - \delta_{n\delta} + \\
& + b_h \cdot \delta_{s\delta} \cdot \theta_{xh} - r_{1h} \cdot \theta_{xh} + r_{1h} - 2 + r_{1h} \cdot 2 \cdot \delta_{n\delta} - 1 - r_{1h} \cdot \pi - 2 \cdot r_{1h} + \\
& + r_h \cdot \left(x_h \cdot \beta + r_h \cdot 1 + \cos \gamma \cdot 1 - r_h + \left(x_h + \frac{r_h \cdot \sin \gamma}{2} \right) \cdot r_h \cdot \sin \gamma \right) + \\
& + \delta_{n\delta} \cdot x_h^2 + \frac{2}{3} \cdot \left(x_h + \frac{r_h}{\sin \gamma} \right) \cdot 1 - r_h \cdot 1 + \cos \gamma \cdot \left(\frac{1}{\sin \gamma} - \frac{r_h}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} \right) = 0
\end{aligned} \tag{1}$$

Относительные координаты характерных точек и длин участков:

$$\begin{aligned}
x_{1+h} &= \frac{x_{1+}}{h}, \quad x_{2+h} = \frac{x_{2+}}{h}, \quad x_h = \frac{x_{2-}}{h} \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} - \frac{r_h}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}; \\
y_{0h} &= \frac{y_0}{h}, \quad y_{1-h} = \frac{y_{1-}}{h}, \quad y_{2+h} = \frac{y_{2+}}{h}; \\
l_{01-h} &= \frac{l_{01-}}{h}, \quad l_{1+2-h} = \frac{l_{1+2-}}{h}, \quad l_{C2+h} = \frac{l_{C2+}}{h}; \\
\gamma_1 &= \operatorname{arctg} \frac{b - r_1}{h} = \operatorname{arctg} b_h - r_{1h}.
\end{aligned}$$

Статические моменты отсеченной части относительно оси x :

$$S_x^{\text{отс}} = \int_{A^{\text{отс}}} y \cdot dA = \delta \cdot \int_{L^{\text{отс}}} y \cdot s \cdot ds = \delta \cdot S_{x,i}^{\text{отс}} = \delta \cdot h^2 \cdot S_{x,Ch}^{\text{отс}};$$

и их относительные значения $S_{x,ih}^{\text{отс}} = \frac{S_{x,i}^{\text{отс}}}{h^2}$ для характерных точек:

$$S_{x,0h}^{\text{отс}} = 0;$$

$$S_{x,1-h}^{\text{отс}} = 0 + l_{01-h} \cdot \frac{y_{0h} + y_{1-h}}{2} \cdot \delta_{s\delta};$$

$$S_{x,1+h}^{\text{отс}} = S_{x,1-h}^{\text{отс}} + y_{1-h} \cdot r_{1h} \cdot \frac{\pi}{2} + r_{1h}^2;$$

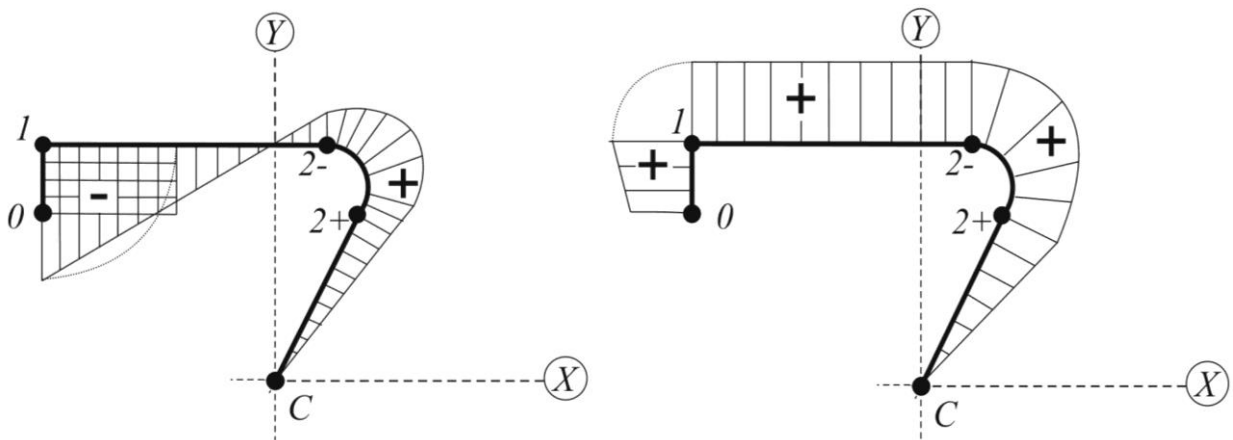
$$S_{x,2-h}^{\text{отс}} = S_{x,1+h}^{\text{отс}} + 1 \cdot l_{1+2-h} \cdot \delta_{n\delta};$$

$$S_{x,2+h}^{\text{отс}} = S_{x,2-h}^{\text{отс}} + 1 - r_h \cdot r_h \cdot \beta + r_h^2 \cdot \sin \beta;$$

$$S_{x,Ch}^{\text{отс}} = S_{x,2+h}^{\text{отс}} + l_{C2+h} \cdot \frac{y_{2+h}}{2}.$$

$$S_{x,0h}^{\text{отс}} = 0;$$

Эпюры главных центральных координат $x(s)$ и $y(s)$ на рис.3:



Эпюра $X(s)$

Эпюра $Y(s)$

Рисунок 3 - C - центр симметрии

Относительная длина контура гнутого Z-образного профиля L/H :

$$l_h = \frac{L/2}{h} \Rightarrow s_h - r_{1h} + r_{1h} \cdot \frac{\pi}{2} + b_h + x_h + r_h \cdot \beta + l_{C2+h}, \quad (2)$$

где $L/2 = s + b + r_1 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + x_{2-} + r \cdot \beta + l_{C2+}$.

Относительная площадь гнутого Z-образного профиля $A/(\delta \cdot H)$:

$$A_{\delta h} = \frac{A}{\delta \cdot H} = \frac{A}{\delta \cdot 2 \cdot h} \Rightarrow \delta_{s\delta} \cdot l_{01-h} + r_{1h} \cdot \frac{\pi}{2} + \delta_{n\delta} \cdot l_{1+2-h} + r_h \cdot \beta + l_{C2+h}, \quad (3)$$

$$\text{где } A = 2 \cdot \delta \cdot \left(\left(\frac{\delta_s}{\delta} \right) \cdot s - r_1 + r_1 \cdot \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\delta_n}{\delta} \right) \cdot b + x_{2-} + r \cdot \beta + l_{C2+} \right).$$

Главные осевые моменты инерции (рис.3) определяются по формулам:

$$I_X = \int_A y^2(s) \cdot dA \Rightarrow 2 \cdot \int_{L/2} \delta(s) \cdot y^2(s) \cdot ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot \left(\left(\frac{\delta_s}{\delta} \right) \cdot \frac{l_{01-}}{3} \cdot y_0^2 + y_{1-}^2 + y_0 \cdot y_{1-} + \left(\frac{\delta_n}{\delta} \right) \cdot l_{1+2-} \cdot h^2 + \frac{l_{C2+}}{3} \cdot y_{2+}^2 + \right. \\ \left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} h - r_1 + r_1 \cdot \sin \varphi^2 \cdot r_1 \cdot d\varphi + \int_0^{\beta} h - r + r \cdot \cos \varphi^2 \cdot r \cdot d\varphi \right)$$

$$I_x \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^3} \Rightarrow \delta_{s\delta} \cdot \frac{l_{01-h}}{3} \cdot y_{0h}^2 + y_{1-h}^2 + y_{0h} \cdot y_{1-h} + \delta_{n\delta} \cdot l_{1+2-h} + \frac{l_{C2+h}}{3} \cdot y_{2+h}^2 + \\ + r_{1h} \cdot \left[1 - r_{1h}^2 \cdot \frac{\pi}{2} + 2 \cdot r_{1h} \cdot 1 - r_{1h} + r_{1h}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \right] \quad (4) \\ + r_h \cdot \left[1 - r_h^2 \cdot \beta + 2 \cdot r_h \cdot 1 - r_h \cdot \sin \gamma + r_h^2 \cdot \frac{\beta - \sin \gamma \cdot \cos \gamma}{2} \right]$$

$$I_Y = \int_A x^2(s) \cdot dA \Rightarrow 2 \cdot \int_{L/2} \delta(s) \cdot x^2(s) \cdot ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot \left(\left(\frac{\delta_s}{\delta} \right) \cdot l_{01-} \cdot b^2 + \left(\frac{\delta_n}{\delta} \right) \cdot \frac{l_{1+2-}}{3} \cdot x_{1+}^2 + x_{2-}^2 + x_{1+} \cdot x_{2-} + \frac{l_{C2+}}{3} \cdot x_{2+}^2 + \right. \\ \left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} b - r_1 + r_1 \cdot \cos \varphi^2 \cdot r_1 \cdot d\varphi + \int_0^{\beta} x_{2-} + r \cdot \sin \varphi^2 \cdot r \cdot d\varphi \right),$$

$$I_y \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^3} \Rightarrow \delta_{s\delta} \cdot l_{01-h} \cdot b_h^2 + \delta_{n\delta} \cdot \frac{l_{1+2-h}}{3} \cdot x_{1+h}^2 + x_h^2 + x_{1+h} \cdot x_h + \frac{l_{C2+h}}{3} \cdot x_{2+h}^2 + \\ + r_{1h} \cdot \left[b_h - r_{1h}^2 \cdot \frac{\pi}{2} + 2 \cdot r_{1h} \cdot b_h - r_{1h} + r_{1h}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \right] + \quad (5) \\ + r_h \cdot \left[x_h^2 \cdot \beta + 2 \cdot r_h \cdot x_h \cdot 1 + \cos \gamma + r_h^2 \cdot \frac{\beta + \sin \gamma \cdot \cos \gamma}{2} \right].$$

Главные осевые моменты сопротивления определяются по формулам:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} \Rightarrow \frac{I_x}{h},$$

$$W_x \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^2} \Rightarrow I_x \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^3}; \quad (6)$$

$$W_y = \frac{I_y}{x_{\max}} \Rightarrow \frac{I_y}{b},$$

$$W_y \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^2} \Rightarrow \frac{1}{b_h} \cdot I_y \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^3}. \quad (7)$$

Для нахождения главного секториального момента инерции

$I_\omega = \int_A \varpi^2(s) \cdot dA$ введем секториальные координаты ω (удвоенная площадь сектора, где полюс и начальная точка отсчета выбраны в точке C), которые равны для характерных точек:

$$\omega_C = 0; \quad \omega_{2+} = 0;$$

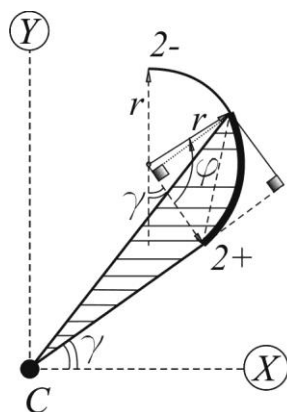


Рисунок 4 - Секториальная координата $\omega(\varphi)$ на закруглении r

$$\Delta \omega_\varphi = l_{C_{2+}} \cdot r \cdot 1 - \cos \varphi + r^2 \cdot \varphi - \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \beta,$$

$$\omega_{2-} = \omega_{2+} + l_{C_{2+}} \cdot r \cdot 1 - \cos \beta + r^2 \cdot \beta - \sin \beta;$$

$$\omega_{1+} = \omega_{2-} + h \cdot l_{1+2-};$$

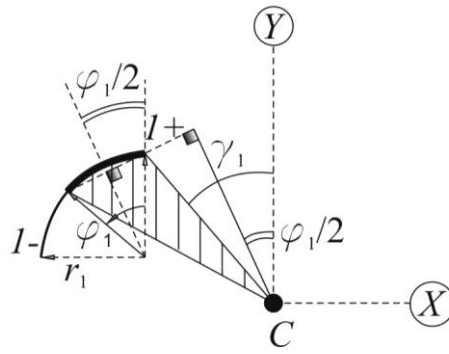


Рисунок 5 - Секториальная координата $\omega(\varphi_1)$ на закруглении r_1

$$\Delta\omega_{\varphi_1} = 2 \cdot r_1 \cdot \sin \frac{\varphi_1}{2} \cdot l_{C1+} \cdot \cos \left(\gamma_1 - \frac{\varphi_1}{2} \right) + r_1^2 \cdot \varphi_1 - \sin \varphi_1, \quad 0 \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\omega_{1-} = \omega_{1+} + l_{C1+} \cdot r_1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \left(\gamma_1 - \frac{\pi}{4} \right) + r_1^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right);$$

$$\omega_0 = \omega_{1-} + s - r_1 \cdot b;$$

Эпюра секториальных координат $\omega(s)$ с полюсом и начальной точкой отсчета в C изображена на рис.6.

Относительные секториальные координаты ω/h^2 характерных точек:

$$\omega_{Ch} = 0; \quad \omega_{2+h} = 0;$$

$$\omega_{2-h} = l_{C2+h} \cdot r_h \cdot 1 - \cos \beta + r_h^2 \cdot \beta - \sin \beta; \quad \omega_{1+h} = \omega_{2-h} + l_{1+2-h};$$

$$\omega_{1-h} = \omega_{1+h} + l_{C1+h} \cdot r_{1h} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \left(\gamma_1 - \frac{\pi}{4} \right) + r_{1h}^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right);$$

$$\omega_{0h} = \omega_{1-h} + s_h - r_{1h} \cdot b_h$$

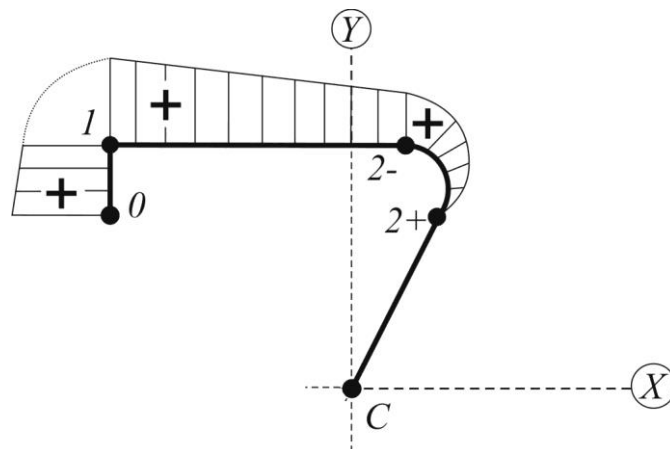


Рисунок 6 - Эпюра $\omega(s)$ с полюсом и начальной точкой отсчета в C

Для нахождения истинной начальной точки M_0 вычислим секториальный статический момент половины сечения:

$$S = \int_{A/2} \omega \cdot dA \Rightarrow \delta \cdot \int_{L/2} \omega(s) \cdot ds = 2 \cdot S_C^{\text{отс}} = \delta \cdot h^3 \cdot S_{Ch}^{\text{отс}},$$

его значение определим, суммируя отдельные участки, причём при отсчете от точки 0 эти относительные величины для характерных точек будут равны

$$\begin{aligned} S_{0h}^{\text{отс}} &= 0; \\ S_{1-h}^{\text{отс}} &= S_{0h}^{\text{отс}} + \frac{\omega_{0h} + \omega_{1-h}}{2} \cdot s_h - r_{1h} \cdot \delta_{s\delta}; \\ S_{1+h}^{\text{отс}} &= S_{1-h}^{\text{отс}} + \frac{1}{h^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega_{1+} + \Delta\omega \varphi_1 \cdot r_1 \cdot d\varphi_1 \Rightarrow S_{1-h}^{\text{отс}} + \\ &+ \omega_{1+h} \cdot r_{1h} \cdot \frac{\pi}{2} + r_{1h}^2 \cdot \left(l_{C1+h} \cdot \left(\cos \gamma_1 + \sin \gamma_1 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \right) + r_{1h} \cdot \left(\frac{\pi^2}{8} - 1 \right) \right); \\ S_{2-h}^{\text{отс}} &= S_{1+h}^{\text{отс}} + \frac{\omega_{1+h} + \omega_{2-h}}{2} \cdot l_{1+2-h} \cdot \delta_{n\delta}; \\ S_{2+h}^{\text{отс}} &= S_{2-h}^{\text{отс}} + \frac{1}{h^3} \int_0^{\beta} \omega_{2+} + \Delta\omega \varphi \cdot d\varphi \Rightarrow \\ &\Rightarrow S_{2-h}^{\text{отс}} + 0 + r_h^2 \cdot \left(l_{2+h} \cdot \left(-\sin \beta \right) r_h \cdot \left(\frac{\beta^2}{2} - \left(-\cos \beta \right) \right) \right); \\ S_{Ch}^{\text{отс}} &= S_{2+h}^{\text{отс}} + 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда постоянная D , определяющая истинную начальную точку отсчета M_0 , и s_0 – расстояние от т. (2-) до точки M_0 , где $\varpi = 0$:

$$D = \frac{S}{\int_A dA} \Rightarrow \frac{S_0}{A/2} = h^2 \cdot \frac{S_{Ch}^{\text{отс}}}{A_{\delta h}}, \quad \frac{D}{h^2} = \frac{S_{Ch}^{\text{отс}}}{A_{\delta h}} \quad (9)$$

$$S_0 = \frac{D - \omega_{2-}}{h} \Rightarrow h \cdot \left(\frac{S_{Ch}^{\text{отс}}}{A_{\delta h}} - \omega_{2-h} \right), \quad \frac{S_0}{h} = \frac{S_{Ch}^{\text{отс}}}{A_{\delta h}} - \omega_{2-h} \quad (10)$$

Главные секториальные координаты $\varpi = \omega - D$ (рис.7):

$$\varpi_C = \varpi_{2+} \Rightarrow h^2 \cdot \left(-\frac{S_{Ch}^{\text{отс}}}{l_h} \right); \quad \varpi_{2-} \Rightarrow h^2 \cdot \left(\omega_{2-h} - \frac{S_{Ch}^{\text{отс}}}{l_h} \right);$$

$$\varpi_{1+} \Rightarrow h^2 \cdot \left(\varpi_{1+h} - \frac{S_{Ch}^{отс}}{l_h} \right); \quad \varpi_{1-} \Rightarrow h^2 \cdot \left(\varpi_{1-h} - \frac{S_{Ch}^{отс}}{l_h} \right);$$

$$\varpi_0 \Rightarrow h^2 \cdot \left(\varpi_{0h} - \frac{S_{Ch}^{отс}}{l_h} \right).$$

Относительные главные секториальные координаты ϖ/h^2 характерных точек:

$$\varpi_{Ch} = \varpi_{2+h} \Rightarrow \left(-\frac{S_{Ch}^{отс}}{l_h} \right); \quad \varpi_{2-h} = \left(\varpi_{2-h} - \frac{S_{Ch}^{отс}}{l_h} \right);$$

$$\varpi_{1+h} \Rightarrow \left(\varpi_{1+h} - \frac{S_{Ch}^{отс}}{l_h} \right); \quad \varpi_{1-h} \Rightarrow \left(\varpi_{1-h} - \frac{S_{Ch}^{отс}}{l_h} \right)$$

$$\varpi_{0h} = \left(\varpi_{0h} - \frac{S_{Ch}^{отс}}{l_h} \right).$$

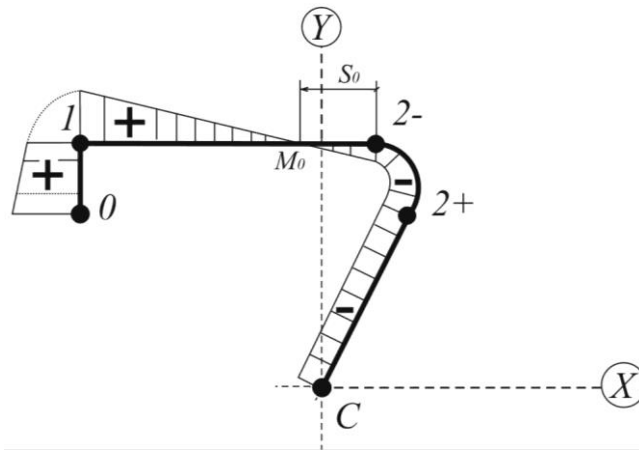


Рисунок 7 - Эпюра главных $\varpi(s)$ с полюсом в C и начальной точкой отсчета в M_0

Главный секториальный момент инерции определяется по формуле:

$$I_\omega = \int_A \varpi^2(s) \cdot dA \Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot \int_{L/2} \varpi^2(s) \cdot ds \Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot$$

$$\left(\frac{l_{01-}}{3} \cdot \varpi_0^2 + \varpi_{1-}^2 + \varpi_0 \cdot \varpi_{1-} \cdot \delta_{s\delta} + \delta_{n\delta} \cdot \frac{l_{1+2-}}{3} \cdot \varpi_{1+}^2 + \varpi_{2-}^2 + \varpi_{1+} \cdot \varpi_{2-} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& +l_{C2+} \cdot \varpi_{2+}^2 + \int_0^\beta \Delta\omega \varphi - D^2 \cdot r \cdot d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta\omega \varphi_1 - \varpi_{1+}^2 \cdot r_1 \cdot d\varphi_1 \Bigg), \\
& I_\omega \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^5} \Rightarrow \delta_{s\delta} \cdot \frac{l_{01-h}}{3} \cdot \varpi_{0h}^2 + \varpi_{1-h}^2 + \varpi_{0h} \cdot \varpi_{1-h} + \\
& + \frac{l_{1+2-h}}{3} \cdot \varpi_{1+h}^2 + \varpi_{2-h}^2 + \varpi_{1+h} \cdot \varpi_{2-h} \cdot \delta_{n\delta} + l_{C2+h} \cdot \varpi_{2+h}^2 + \\
& + r_h^3 \cdot \left[l_{C2+h}^2 \cdot \left(\frac{3 \cdot \beta}{2} + \frac{\sin 2\beta}{4} - 2 \cdot \sin \beta \right) + l_{C2+h} \cdot r_h \cdot \beta - \sin \beta^2 \right. \\
& \left. + r_h^2 \cdot \left(\frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta}{2} - \frac{\sin 2\beta}{4} - 2 \cdot \sin \beta - \beta \cdot \cos \beta \right) \right] - \\
& - 2 \cdot r_h^2 \cdot \left(l_{2+h} \cdot \beta - \sin \beta + r_h \cdot \left(\frac{\beta^2}{2} - 1 - \cos \beta \right) \right) \cdot \frac{S_{Ch}^{orc}}{l_h} + r_h \cdot \beta \cdot \left(\frac{S_{Ch}^{orc}}{l_h} \right)^2 + \\
& + r_{1h}^3 \cdot \left[l_{C1+h}^2 \cdot \left(\left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + \cos 2 \cdot \gamma_1 \cdot \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\sin 2 \cdot \gamma_1}{2} \right) + r_{1h} \cdot \frac{\pi^3 - 48 + 6 \cdot \pi}{24} + \right. \\
& \left. + l_{C1+h} \cdot r_{1h} \cdot \left(\sin \gamma_1 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)^2 + 2 \cdot \cos \gamma_1 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \right) \right] + \\
& + 2 \cdot r_h^2 \cdot \left(l_{C1+h} \cdot \left(\cos \gamma_1 + \sin \gamma_1 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \right) + r_{1h} \cdot \left(\frac{\pi^2}{8} - 1 \right) \right) \cdot \varpi_{1+h} + r_h \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \varpi_{1+h}^2 \quad (11)
\end{aligned}$$

После определения геометрических характеристик, по принципу независимости действия сил, полные нормальные напряжения в произвольной точке поперечного сечения жесткого тонкостенного Z-образного стержня (с учетом знака) определяются по формуле [7]:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot Y(s) + \frac{M_y}{I_y} \cdot X(s) + \frac{B_\omega}{I_\omega} \cdot \varpi(s), \quad (12)$$

где внутренние усилия:

N , M_x , M_y - соответственно продольная сила и изгибающие моменты относительно главных центральных осей, определяемые методом сечения;

B_{ω} - бимомент в рассматриваемом поперечном сечении, определяемый из решения дифференциального уравнения для углов закручивания при стесненном кручении тонкостенного стержня открытого профиля.

Библиографический список:

1. Волков В.П., Волкова О.В. Определение геометрических характеристик тонкостенного Z-образного стержня [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2015. №1. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostenogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file .

2. Волков В.П., Волкова О.В. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с закруглением [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2015. №2. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostenogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file .

3. Волков В.П., Волкова О.В. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с закруглением для расчета на изгиб с кручением [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2016. №3. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostenogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file .

4. Волков В.П., Кустова О.В. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с отбортовкой [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2016. №4. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostenogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file .

5. Волков В.П., Кустова О.В. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с отбортовкой и с закруглением [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2017. №5. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostenogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file .

6. Волков В.П., Кустова О.В. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с отбортовкой с учетом изготовления [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2017. №6. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostenogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file

7. Волков В.П., Кустова О.В. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с отбортовкой и с закруглением с учетом изготовления [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2018. №7. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostenogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file

8. Волков В.П. Напряженно-деформированное состояние тонкостенного Z-образного стержня переменной толщины без закругления. [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2019. №8. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostenogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file

9. Волков В.П. Геометрические характеристики Z-образного стержня с закруглением и с усиленной отбортовкой с учетом изготовления. [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2019. №9. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostenogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file

10. Волков В.П. Геометрические характеристики Z-образного стержня с закруглением, с усиленной отбортовкой и с усиленной полкой, с учетом изготовления. [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2020. №10. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometrisheskih-harakteristik-tonkostennogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file

11. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. - М: Высш. шк., 1995. 560 с.; ил.