

УДК 519.633

**АЛГОРИТМ РАСЧЁТА НАПРЯЖЁННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО  
СОСТОЯНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ УПРУГОЙ В ОТНОШЕНИИ  
ОБЪЁМНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ В ОТНОШЕНИИ  
СДВИГОВЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРИ БИЛИНЕЙНОЙ  
АППРОКСИМАЦИИ ЗАМЫКАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ  
(центрально-симметричное деформирование)**

*Бакушев Сергей Васильевич*

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,  
г. Пенза,*

*доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».*

**Аннотация.**

Работа состоит из двух частей. В первой части рассматривается построение дифференциальных уравнений равновесия сплошной геометрически линейной и геометрически нелинейной среды, находящейся в условиях центрально-симметричного деформирования, в перемещениях. Механическое поведение сплошной среды описывается линейным законом упругости в отношении объёмных деформаций и произвольным нелинейным законом в отношении сдвиговых деформаций. Диаграмма сдвигового деформирования аппроксимируется билинейной функцией. Во второй части сформулирован алгоритм определения напряжённо-деформированного состояния полупространства со сферической полостью внутри которой действует давление. Полупространство находится в условиях центрально-симметричного деформирования. Алгоритм решения задачи, а также физические зависимости и дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях могут найти применение при определении напряжённо-деформированного состояния сплошных сред и элементов строительных и машиностроительных конструкций, находящихся в условиях центрально-симметричного деформирования и описываемые математическими моделями как с учётом, так

и без учёта геометрической нелинейности, замыкающие уравнения физических соотношений для которых, построенные на основе экспериментальных данных, аппроксимированы билинейными функциями в отношении сдвиговых деформаций и линейными функциями в отношении объёмных деформаций.

**Ключевые слова:** сплошная среда, центрально-симметричная деформация, линейно-упругое объёмное деформирование, нелинейное сдвиговое деформирование, билинейные замыкающие уравнения, дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях, геометрическая линейность, геометрическая нелинейность, алгоритм решения задачи.

**ALGORITHM OF CALCULATING THE TENSE-DEFORMED STATE OF A  
SOLID ENVIRONMENT ELASTIC WITH REGARD TO VOLUME  
DEFORMATIONS AND NON-LINEAR SHIFT DEFORMATIONS IN BILINA  
APPROXIMATION OF CLOSING EQUATIONS**

**(central-symmetrical deformation)**

***Bakushev Sergey Vasilevich***

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,*

*Doctor of Sciences, Professor of the department "Mechanics".*

**Abstract.**

The work consists of two parts. The first part examines the construction of differential equations of equilibrium of a solid geometrically linear and geometrically non-linear environment, located in conditions of central-symmetrical deformation, in movements. The mechanical behavior of a solid environment is described by the linear law of elasticity with respect to volume deformations and arbitrary non-linear law with respect to shift deformations. The diagram of shift deformation is approximated by the bilina function. In the second part, the algorithm for determining the tense-deformed state of the semi-space with a spherical cavity within which the pressure acts is formulated. Semi-space is in conditions of central-symmetrical deformation. The problem solving algorithm, as well as physical dependence and

differential equations of equilibrium in movements can be used in determining the tense-deformed state of solid environments and elements of construction and engineering structures, which are in conditions of central-symmetrical deformation and described by mathematical models, both taking into account and without consideration of geometric non-linearity, closing equations of physical ratios for which, based on experimental data, approximated bilinear functions in relation to shear deformations and linear functions in relation to volume deformations.

**Keywords:** solid environment, central-symmetrical deformation, linear-elastic volume deformation, non-linear shear deformation, bilinear closing equations, differential equilibrium equations in movements, geometric linearity, geometric nonlinearity algorithm for solving a problem.

**Введение.** Физические уравнения для моделирования напряжённо-деформированного состояния сплошного деформированного тела включают две механические величины – модуль объёмного расширения (сжатия) и модуль сдвига, определяемые, вообще говоря, опытным путём. Для линейно упругих тел и модуль объёмного расширения (сжатия), и модуль сдвига являются величинами постоянными. Для нелинейных тел и модуль расширения (сжатия), и модуль сдвига зависят от характеристик напряжённого и деформированного состояний сплошной среды, то есть являются, в конце концов, нелинейными функциями инвариантов тензора деформации [1], [2]. Эти функции обычно называются замыкающими уравнениями. Определение функций, описывающих изменение модулей объёмного расширения (сжатия) и сдвига в процессе нагружения тела составляют одну из фундаментальных проблем современной механики деформируемого твёрдого тела. Подчиняясь желанию, как можно полнее учесть реальные механические свойства деформируемых тел, приходим к сложным аналитическим выражениям и для замыкающих уравнений, и для

физических уравнений, и для разрешающих дифференциальных уравнениях в перемещениях<sup>1</sup>.

Существуют различные подходы к упрощению системы разрешающих уравнений общей нелинейной теории упругости. Один из приёмов, в частности, состоит в упрощении замыкающих уравнений, то есть в аппроксимации функций описывающих нелинейный модуль объёмного расширения (сжатия) и нелинейный модуль сдвига, какими либо простыми функциями, например линейными, билинейными [3], или биквадратичными [4]. В работе [5] представлены дифференциальные уравнения равновесия сплошной среды в перемещениях, для случаев плоского одномерного, осесимметричного, центрально-симметричного деформирования, а также плоской деформации в декартовых и цилиндрических координатах при билинейной аппроксимации замыкающих уравнений.

В данной работе формулируется алгоритм решения задачи об определении напряжённо-деформированного состояния сплошной среды, находящейся в условиях центрально-симметричного деформирования  $u_R = u(R)$ ,  $u_\varphi = 0$ ,  $u_\theta = 0$ , механическое поведение которой в части объёмных деформаций описывается линейно-упругим законом, а в части сдвиговых деформаций – произвольным нелинейным законом, аппроксимированным билинейной функцией. Разрешающие физические и дифференциальные уравнения строятся для сплошной среды как без учёта (рис. 1), так и с учётом (рис. 2) геометрической нелинейности.

**Физические уравнения для геометрически линейной модели сплошной среды.** В соответствии с рис. 1 модуль объёмного расширения (сжатия) не изменяется в процессе деформирования и равен:

$$K = \frac{1}{3} K_0 = Const. \quad (1)$$

---

<sup>1</sup> Дифференциальные уравнения равновесия для общей нелинейной физически и геометрически теории упругости (В.В.Новожилов [1]) включают в коэффициентах при производных от обобщённых напряжений, производные от перемещений. Отсюда следуем необходимость строить решение задач в общей нелинейной теории упругости в перемещениях.

Модуль сдвига на первом прямолинейном участке диаграммы  $T \approx \Gamma$  будет величиной постоянной:

$$G = G_0 = \text{Const.} \quad (2)$$

На втором прямолинейном участке диаграммы  $T \approx \Gamma$  секущий модуль сдвига будет определяться выражением:

$$G = G(\Gamma) = G_1 + (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \neq \text{Const.} \quad (3)$$

Здесь  $K_0$  – начальный модуль объёмного расширения (сжатия);  $G_0$  – начальный модуль сдвига;  $G_1$  – модуль упрочнения при сдвиге.

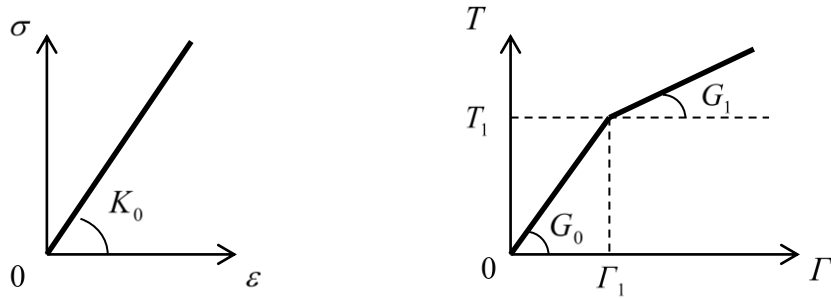


Рисунок 1 - Диаграммы объёмного  $\sigma \approx \varepsilon$  и сдвигового  $T \approx \Gamma$  деформирования

Здесь  $\sigma$  – первый инвариант тензора напряжений;  $\varepsilon$  – первый инвариант тензора деформаций;  $T$  – интенсивность касательных напряжений;  $\Gamma$  – интенсивность деформаций сдвига.

При центрально-симметричном деформировании геометрически линейной сплошной среды  $\varepsilon = \varepsilon_{RR} + 2\varepsilon_{\phi\phi}$  и  $\Gamma = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\phi\phi})^2}$ . Кроме того,

$$\varepsilon_{RR} = \frac{\partial u}{\partial R}; \quad \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{u}{R}, \quad \text{причём} \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial R} = \frac{\partial \varepsilon_{RR}}{\partial R} + 2 \frac{\partial \varepsilon_{\phi\phi}}{\partial R} = \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right);$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial R} = \frac{4}{3\Gamma} (\varepsilon_{RR} - \varepsilon_{\phi\phi}) \left( \frac{\partial \varepsilon_{RR}}{\partial R} - \frac{\partial \varepsilon_{\phi\phi}}{\partial R} \right) = \frac{4}{3\Gamma} \left[ \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right] \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right) \right].$$

Рассмотрим два основных случая физических зависимостей соответствующих случаям, первое, когда текущее напряжённо-деформированное состояние в точке соответствует уровню напряжений и

деформаций, не превосходящих точку излома графика диаграммы  $T \approx \Gamma$ , и, второе, когда текущее напряжённо-деформированное состояние в точке соответствует уровню напряжений и деформаций, превосходящих точку излома графика диаграммы  $T \approx \Gamma$ .

*Случай 1:*  $0 \leq \Gamma \leq \Gamma_1$ . В этом случае физические уравнения центрально-симметричного деформирования будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{RR} &= \frac{1}{3}K_0\varepsilon + 2G_0\left(\varepsilon_{RR} - \frac{1}{3}\varepsilon\right); \\ \sigma_{\phi\phi} = \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{3}K_0\varepsilon + 2G_0\left(\varepsilon_{\phi\phi} - \frac{1}{3}\varepsilon\right).\end{aligned}\quad (4)$$

*Случай 2:*  $\Gamma \geq \Gamma_1$ . В этом случае физические уравнения центрально-симметричного деформирования будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\sigma_{RR} &= \frac{1}{3}K_0\varepsilon + 2\left[G_1 + (G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma}\right]\left(\varepsilon_{RR} - \frac{1}{3}\varepsilon\right); \\ \sigma_{\phi\phi} = \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{3}K_0\varepsilon + 2\left[G_1 + (G_0 - G_1)\frac{\Gamma_1}{\Gamma}\right]\left(\varepsilon_{\phi\phi} - \frac{1}{3}\varepsilon\right).\end{aligned}\quad (5)$$

**Построение дифференциальных уравнений для геометрически линейной модели.** Подставляя физические уравнения (4) и (5) в дифференциальное уравнение равновесия центрально-симметричного деформирования сплошной среды:

$$\frac{\partial\sigma_{RR}}{\partial R} + \frac{2}{R}(\sigma_{RR} - \sigma_{\phi\phi}) + F_R = 0 \quad (6)$$

получим два вида разрешающих уравнений в перемещениях, имеющих одну и ту же структуру:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + B + F_R = 0. \quad (7)$$

Коэффициенты  $A$  и  $B$  в уравнении (7) зависят от вида физических уравнений.

1). Для физических уравнений (4):

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{3}K_0 + \frac{4}{3}G_0; \\
B &= \left( \frac{1}{3}K_0 + \frac{4}{3}G_0 \right) \frac{2}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right).
\end{aligned} \tag{8}$$

2). Для физических уравнений (7):

$$\begin{aligned}
A &= \left( \frac{1}{3}K_0 + \frac{4}{3}G_1 \right) + \frac{4}{3}(G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \left[ 1 - \frac{4}{3\Gamma^2} \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right)^2 \right]; \\
B &= \frac{1}{R} \left( \frac{2}{3}K_0 - \frac{4}{3}G_1 \right) \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right) - \frac{4}{3}(G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \times \\
&\times \left[ 1 - \frac{4}{3\Gamma^2} \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right)^2 \right] \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right) + \\
&+ \frac{4}{R} \left[ G_1 + (G_0 - G_1) \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \right] \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right).
\end{aligned} \tag{9}$$

В формулах (8) и (9)

$$\Gamma = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{\phi\phi})^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right)^2}.$$

Таким образом, дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях для сплошной, линейно-упругой в отношении объёмных деформаций, среды, находящейся в условиях центрально-симметричного деформирования, при билинейной аппроксимации графика диаграммы сдвиговых деформаций без учёта геометрически нелинейности построены.

**Физические уравнения для геометрически нелинейной модели.** В соответствии с рис. 2 геометрически нелинейный аналог модуля объёмного расширения (сжатия) не изменяется в процессе деформирования и равен:

$$K^* = \frac{1}{3}K_0^* = Const. \tag{10}$$

Геометрически нелинейный аналог модуля сдвига на первом прямолинейном участке диаграммы  $T^* \approx \Gamma^*$  будет величиной постоянной:

$$G^* = G_0^* = Const. \tag{11}$$

На втором прямолинейном участке диаграммы  $T^* \approx \Gamma^*$  геометрически нелинейный аналог секущего модуля сдвига будет определяться выражением:

$$G^* = G^*(\Gamma^*) = G_1^* + (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} \neq Const. \quad (12)$$

Здесь  $K_0^*$  – геометрически нелинейный аналог начального модуля объёмного расширения (сжатия);  $G_0^*$  – геометрически нелинейный аналог начального модуля сдвига;  $G_1^*$  – геометрически нелинейный аналог модуля упрочнения при сдвиге.

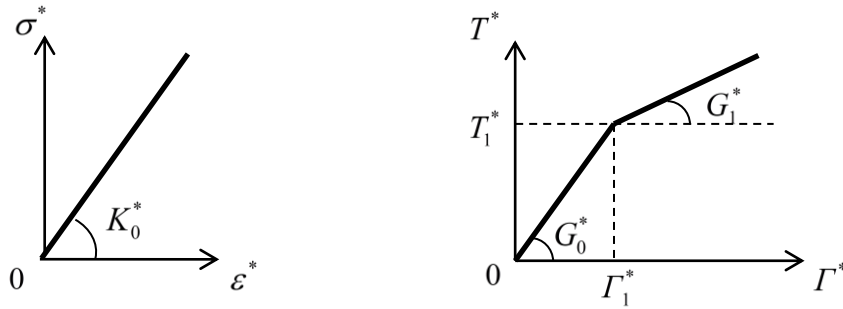


Рисунок 2 - Диаграммы объёмного  $\sigma^* \approx \varepsilon^*$  и сдвигового  $T^* \approx \Gamma^*$  деформирования

Здесь  $\sigma^*$  – первый инвариант тензора обобщённых напряжений;  $\varepsilon^*$  – первый инвариант тензора нелинейных деформаций;  $T^*$  – интенсивность обобщённых касательных напряжений;  $\Gamma^*$  – интенсивность нелинейных деформаций сдвига.

При центрально-симметричном деформировании с учётом геометрической нелинейности  $\varepsilon^* = \varepsilon_{RR}^* + 2\varepsilon_{\phi\phi}^*$  и  $\Gamma^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_{RR}^* - \varepsilon_{\phi\phi}^*)^2}$ , причём

$$\varepsilon_{RR}^* = \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial R} \right)^2; \quad \varepsilon_{\phi\phi}^* = \frac{u}{R} + \frac{1}{2} \left( \frac{u}{R} \right)^2. \text{ Кроме того,}$$

$$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial R} = \frac{\partial \varepsilon_{RR}^*}{\partial R} + 2 \frac{\partial \varepsilon_{\phi\phi}^*}{\partial R} = \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \left( 1 + \frac{u}{R} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right);$$



$$\frac{\partial \Gamma^*}{\partial R} = \frac{4}{3\Gamma^*} (\varepsilon_{RR}^* - \varepsilon_{\phi\phi}^*) \left( \frac{\partial \varepsilon_{rr}^*}{\partial r} - \frac{\partial \varepsilon_{\phi\phi}^*}{\partial r} \right) = \frac{4}{3\Gamma^*} \left[ \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial R} \right)^2 - \frac{u}{r} - \frac{1}{2} \left( \frac{u}{r} \right)^2 \right] \times \\ \times \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{u}{R} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right) \right].$$

Рассмотрим два основных случая физических зависимостей соответствующих случаям, когда текущее напряжённо-деформированное состояние в точке соответствует уровню напряжений и деформаций не превосходящих точку излома графика диаграммы  $T^* \approx \Gamma^*$ , и когда текущее напряжённо-деформированное состояние в точке соответствует уровню напряжений и деформаций превосходящих точку излома графиков диаграммы  $T^* \approx \Gamma^*$ .

*Случай 1:*  $0 \leq \Gamma^* \leq \Gamma_1^*$ . В этом случае физические уравнения центрально-симметричного деформирования геометрически нелинейной сплошной среды будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{RR}^* &= \frac{1}{3} K_0^* \varepsilon^* + 2G_0^* \left( \varepsilon_{RR}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right); \\ \sigma_{\phi\phi}^* &= \sigma_{\theta\theta}^* = \frac{1}{3} K_0^* \varepsilon^* + 2G_0^* \left( \varepsilon_{\phi\phi}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right). \end{aligned} \quad (13)$$

*Случай 2:*  $\Gamma^* \geq \Gamma_1^*$ . В этом случае физические уравнения центрально-симметричного деформирования геометрически нелинейной сплошной среды будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{RR}^* &= \frac{1}{3} K_0^* \varepsilon^* + 2 \left[ G_1^* + (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} \right] \left( \varepsilon_{RR}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right); \\ \sigma_{\phi\phi}^* &= \sigma_{\theta\theta}^* = \frac{1}{3} K_0^* \varepsilon^* + 2 \left[ G_1^* + (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} \right] \left( \varepsilon_{\phi\phi}^* - \frac{1}{3} \varepsilon^* \right). \end{aligned} \quad (14)$$

**Построение дифференциальных уравнений для геометрически нелинейной модели.** Подставляя физические уравнения (13) и (14) в дифференциальное уравнение равновесия центрально-симметричного деформирования сплошной среды с учётом геометрической нелинейности [1, 2]:

$$\frac{\partial}{\partial R} \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) \sigma_{RR}^* \right] + \frac{2}{R} \left[ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) \sigma_{RR}^* - \left( 1 + \frac{u}{R} \right) \sigma_{\phi\phi}^* \right] + F_R^* = 0 \quad (15)$$

получим два вида разрешающих уравнений в перемещениях, имеющих одну и ту же структуру:

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + B + DF_R = 0. \quad (16)$$

$$\text{Здесь } D = \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) \left( 1 + \frac{u}{R} \right)^2.$$

Коэффициенты  $A$  и  $B$  в уравнении (16) зависят от вида физических уравнений.

1). Для физических уравнений (13):

$$\begin{aligned} A &= \left( \frac{1}{3} K_0^* + \frac{4}{3} G_0^* \right) \left[ \varepsilon_{RR}^* + \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right)^2 \right] + \left( \frac{2}{3} K_0^* - \frac{4}{3} G_0^* \right) \varepsilon_{\phi\phi}^*; \\ B &= \left( \frac{1}{3} K_0^* - \frac{2}{3} G_0^* \right) \frac{2}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right) \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) + \frac{2}{R} \left\{ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) \times \right. \\ &\quad \times \left[ \left( \frac{1}{3} K_0^* + \frac{4}{3} G_0^* \right) \varepsilon_{RR}^* + \left( \frac{2}{3} K_0^* - \frac{4}{3} G_0^* \right) \varepsilon_{\phi\phi}^* \right] - \\ &\quad \left. - \left( 1 + \frac{u}{R} \right) \left[ \left( \frac{1}{3} K_0^* - \frac{2}{3} G_0^* \right) \varepsilon_{RR}^* + \left( \frac{2}{3} K_0^* + \frac{2}{3} G_0^* \right) \varepsilon_{\phi\phi}^* \right] \right\}; \end{aligned} \quad (17)$$

2). Для физических уравнений (14):

$$\begin{aligned} A &= \left( \frac{1}{3} K_0^* + \frac{4}{3} G_1^* \right) \varepsilon_{RR}^* + \left( \frac{2}{3} K_0^* - \frac{4}{3} G_1^* \right) \varepsilon_{\phi\phi}^* + \frac{4}{3} (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} (\varepsilon_{RR}^* - \varepsilon_{\phi\phi}^*) + \\ &\quad + \left[ \left( \frac{1}{3} K_0^* + \frac{4}{3} G_1^* \right) + \frac{4}{3} (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} - \frac{16}{9\Gamma^{*3}} (G_0^* - G_1^*) \Gamma_1^* (\varepsilon_{RR}^* - \varepsilon_{\phi\phi}^*)^2 \right] \times \\ &\quad \times \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right)^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B = & \left[ \left( \frac{1}{3} K_0^* - \frac{2}{3} G_1^* \right) - \frac{2}{3} (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} + \frac{8}{9 \Gamma^{*3}} (G_0^* - G_1^*) \Gamma_1^* (\varepsilon_{RR}^* - \varepsilon_{\phi\phi}^*)^2 \right] \times \\
& \times \frac{2}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial R} - \frac{u}{R} \right) \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) + \frac{2}{R} \left\{ \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial R} \right) \left\langle \left( \frac{1}{3} K_0^* + \frac{4}{3} G_1^* \right) \varepsilon_{RR}^* + \right. \right. \\
& + \left. \left( \frac{2}{3} K_0^* - \frac{4}{3} G_1^* \right) \varepsilon_{\phi\phi}^* + \frac{4}{3} (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} \varepsilon_{RR}^* - \frac{4}{3} (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} \varepsilon_{\phi\phi}^* \right\rangle - \\
& - \left( 1 + \frac{u}{R} \right) \left\langle \left( \frac{1}{3} K_0^* - \frac{2}{3} G_1^* \right) \varepsilon_{RR}^* + \left( \frac{2}{3} K_0^* + \frac{2}{3} G_1^* \right) \varepsilon_{\phi\phi}^* + \right. \\
& \left. + \frac{2}{3} (G_0^* - G_1^*) \frac{\Gamma_1^*}{\Gamma^*} (\varepsilon_{\phi\phi}^* - \varepsilon_{RR}^*) \right\rangle \left. \right\}. \tag{18}
\end{aligned}$$

В формулах (17) и (18)

$$\Gamma^* = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_{RR}^* - \varepsilon_{\phi\phi}^*)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\left[ \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial R} \right)^2 - \frac{u}{R} - \frac{1}{2} \left( \frac{u}{R} \right)^2 \right]^2}.$$

Таким образом, дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях, описывающие напряжённо-деформированное состояние сплошной, линейно-упругой в отношении объёмных деформаций, среды, находящейся в условиях центрально-симметричного деформирования, при билинейной аппроксимации графика диаграммы сдвиговых деформаций с учётом геометрической нелинейности построены.

**Алгоритм практического определения напряжённо-деформированного состояния сплошной среды.** Рассмотрим, в качестве примера, бесконечное пространство со сферической полостью, внутри которой действует равномерно-распределённое по сферической поверхности давление интенсивности  $q$ . Полупространство за сферой будет находиться в условиях центрально-симметричного деформирования. Механическое поведение материала полупространства описывается моделью, в соответствии с которой объёмные деформации и средние напряжения в точке связаны между собой линейным законом; сдвиговые деформации и касательные напряжения связаны между собой произвольным законом, аппроксимированным билинейной функцией. Диаграммы объёмного и сдвигового деформирования известны.

Требуется определить напряжённно-деформированное состояние полупространства за пределами сферы.

Алгоритм решения будет состоять из следующих этапов.

1. На основании дифференциального уравнения (7) с коэффициентами (8) определяем перемещения, а, следовательно, и деформации, и, на основании соотношений (4), напряжения в каждой точке полупространства за пределами сферической полости от действующей нагрузки  $q$ .
2. По полученным данным вычисляем интенсивность деформаций сдвига в каждой точке полупространства за пределами сферической полости.
3. Определяем геометрическое место точек полупространства – это будет сферическая поверхность (назовём её поверхностью излома) – в которых полученная величина интенсивности деформаций сдвига не превышает или равна интенсивности деформаций сдвига, соответствующей точке излома графика диаграммы  $T \approx G$ .
4. Во всех точках полупространства от исходной сферической полости до сферической поверхности излома определяем перемещения, деформации и напряжения пользуясь дифференциальным уравнением (7) с коэффициентами (9) и физическими соотношениями (5).
5. Решением нашей задачи будет напряжённно-деформированное состояние полупространства за пределами поверхности излома, полученное по соотношениями (7), (8) и (4), и напряжённно-деформированное состояние полупространства от сферической полости до поверхности излома, полученное по соотношениями (7), (9) и (5).
6. Правильность полученного решения оцениваем в каждой точке полупространства за пределами сферической полости путём сравнения интенсивностей касательных напряжений и деформаций

сдвига, вычисленных по полученным напряжениям и деформациям, и их значениям на диаграмме сдвига  $T \approx G$ .

**Замечание.** Возможен случай, когда радиус поверхности излома не превышает радиус сферической полости. Тогда напряжённо-деформированное состояние во всех точках полупространства будет соответствовать вычисленному в соответствии с пунктом 1. алгоритма.

Сформулированный выше алгоритм для геометрически линейной модели сплошной среды, без каких либо изменений переносится на модель сплошной среды, учитывающей геометрическую нелинейность.

**Заключение.** Сформулированный в статье алгоритм решения задачи, а также физические зависимости и дифференциальные уравнения равновесия в перемещениях могут найти применение при определении напряжённо-деформированного состояния не только сплошной среды, но и элементов строительных и машиностроительных конструкций, находящихся в условиях центрально-симметричного деформирования, как с учётом, так и без учёта геометрической нелинейности, физические соотношения для которых в отношении объёмных деформаций описываются линейным законом упругости, а в отношении сдвиговых деформаций описываются нелинейным законом, аппроксимируемым билинейными функциями.

#### **Библиографический список:**

1. Новожилов В.В. Теория упругости. Судпромгиз., 1958г. 370 с.
2. Бакушев С.В. Геометрически и физически нелинейная механика сплошной среды: Плоская задача. Изд. стереотип. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2020. 312 с.
3. Бакушев С.В. Аппроксимация диаграмм деформирования билинейными функциями. // Строительная механика и расчёт сооружений. 2019. №2 (283). С.2-11.

4. Бакушев С.В. Аппроксимация диаграмм деформирования квадратичными функциями. // Строительная механика и расчёт сооружений. 2020. №3 (290). С.2-14.

5. Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения и краевые задачи механики деформируемого твёрдого тела. М.: ЛЕНАНД, 2020. 304 с.