

УДК 539.3

**ВЛИЯНИЕ ФОРМЫ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ И СИЛЫ  
ТЯЖЕСТИ НА ДЕФОРМИРОВАНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ БЕТОННЫХ  
СТЕРЖНЕЙ ПРИ КВАЗИСТАТИЧЕСКИХ НАГРУЗКАХ**

*Немировский Юрий Владимирович,*

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича,  
г. Новосибирск,*

*доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник  
лаборатории «Физика быстропотекающих процессов».*

*Тихонов Сергей Владимирович,*

*Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова, г. Чебоксары,  
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Компьютерные  
технологии».*

**Аннотация**

В работе рассматриваются многослойные бетонные стержни постоянного поперечного сечения с учетом физической нелинейности свойств материала каждого слоя. Предполагается, что на шарнирно закрепленный стержень действуют квазистатические продольные и поперечные нагрузки и сила тяжести. Рассматриваемые задачи решаются методом Бубнова-Галеркина в математическом пакете Maple. Проведен анализ влияния формы поперечного сечения при фиксированных нагрузках и расходе материала на продольные перемещения, прогибы и максимальные деформации в слоях стержней.

**Ключевые слова:** физическая нелинейность, прогиб, деформация, бетон, фибробетон, форма поперечного сечения, метод Бубнова-Галеркина.

**INFLUENCE OF THE CROSS-SECTION SHAPE AND GRAVITY ON  
DEFORMATION OF THE MULTILAYERED CONCRETE RODS UNDER  
QUASI-STATIC LOADS**

***Nemirovskii Yuri Vladimirovich,***

*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk,*

*Doctor of Sciences, Leading Researcher of the “Physics of Fast Processes Laboratory”.*

***Tikhonov Sergey Vladimirovich,***

*I. Ulianov Chuvash State University, Cheboksary,*

*Candidate of Sciences, Associate Professor of the department “Computer Technologies”.*

## **Abstract**

The work considers the multilayered concrete rods of constant cross-section, taking into account the nonlinearity of material properties in each layer. It is supposed that quasi-static longitudinal and transverse loads and gravity influence on the hinged rod. The problems under consideration are solved by the Bubnov-Galerkin method in the Maple mathematical package. The analysis of influence of the cross-section shape at fixed loads and material consumption for the longitudinal displacements, deflections and maximum deformations in the layers of rods is carried out.

**Keywords:** physical nonlinearity, deflection, deformation, concrete, fibra-reinforced concrete, cross-section shape, the Bubnov-Galerkin method.

Рассмотрим многослойный стержень с постоянным вдоль ее длины поперечным сечением. Положим, что в поперечном сечении ось  $OZ$  будет являться осью симметрии. Ось  $OX$  направим вдоль длины балки, ось  $OZ$  вертикально вверх. Начало координат поместим на нижнюю грань стержня. Обозначим через  $S_{1j}, \dots, S_{nj}$  соответствующие слои стержня  $j$ -ой формы сечения, контуры  $S_{ij}$  слоя в поперечном сечении ограничивают функции  $b_{ij}(z)$ ,

где  $i$ -номер слоя,  $j$ -порядковый номер формы сечения,  $h_{i-1j} \leq z < h_{ij}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n_j$ ,  $h_{0j} = 0$ ,  $n_j$  – количество слоев в стержень  $j$ -ой формы сечения.

Закон деформирования для каждого слоя бетонного стержня примем в форме [1]

$$\sigma_i = A_{1i}\varepsilon + A_{2i}\varepsilon^2, \quad (1)$$

где коэффициенты  $A_{1i}, A_{2i}$  определим методом наименьших квадратов из реальных диаграмм деформирования бетонов [2]. Результаты расчета коэффициентов аппроксимации  $A_{1i}, A_{2i}$  методом наименьших квадратов приведены в таблице 1 по экспериментальным данным, полученным в работе [3], где  $\bar{A}$  – средняя ошибка аппроксимации,  $-\varepsilon_*^-, \varepsilon_*^+$  – предельные деформации при сжатии (–) и растяжении (+).

Таблица 1 – Результаты расчета коэффициентов аппроксимации методом наименьших квадратов

Класс бетона	$\varepsilon_*^-, 10^{-3}$	$\varepsilon_*^+, 10^{-3}$	$A_1, \text{МПА}$	$A_2, \text{МПА}$	$\bar{A}$
B10	0,84	0,038	12 488	5 078 524	0,33
B30	1,35	0,045	32 351	11 660 358	0,38
B50	1,86	0,047	56 490	21 305 730	0,39

Рассмотрим случай шарнирного закрепления стержня длины  $l$  (рисунок 1). Будем считать, что на верхнюю грань стержня действуют распределенные поперечная  $q_1$  и продольная  $q_3$  нагрузки, а на нижнюю – поперечная  $q_2$  и продольная  $q_4$  нагрузки. Кроме того, на стержень действуют массовые силы  $q_{si}$  проекции которой на соответствующие оси равны  $q_{six}$  и  $q_{siz}$  (рисунок 1).

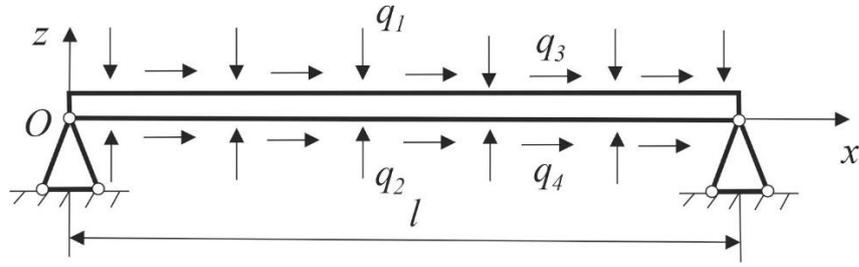


Рисунок 1 – Случай шарнирно-опертого стержня длины  $l$

Тогда для продольного усилия  $N$ , изгибающего момента  $M_y$ , проекций вектора распределенной нагрузки  $q_x$ ,  $q_z$  и распределенного момента  $m_y$  на соответствующие оси, вызванные действием нагрузок  $q_1, q_2, q_3, q_4$ , получим соотношения

$$N = \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} dz \int_{-b_i(z)}^{b_i(z)} \sigma_{xi} dy, \quad M_y = \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} dz \int_{-b_i(z)}^{b_i(z)} z \sigma_{xi} dy, \quad (2)$$

$$q_x = \int_{-b_1(0)}^{b_1(0)} q_3 dy + \int_{-b_n(h_n)}^{b_n(h_n)} q_4 dy + \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} dz \int_{-b_i(z)}^{b_i(z)} q_{six} dy,$$

$$q_z = \int_{-b_1(0)}^{b_1(0)} q_2 dy + \int_{-b_n(h_n)}^{b_n(h_n)} q_1 dy + \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} dz \int_{-b_i(z)}^{b_i(z)} q_{siz} dy,$$

$$m_y = - \int_{-b_n(h_n)}^{b_n(h_n)} x q_1 dy - \int_{-b_1(0)}^{b_1(0)} x q_2 dy + h_n \int_{-b_n(h_n)}^{b_n(h_n)} q_3 dy - \sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} dz \int_{-b_i(z)}^{b_i(z)} (x q_{skz} - z q_{skx}) dy.$$

Уравнения равновесия в случае продольно-поперечного изгиба имеют вид [4]

$$\frac{dN}{dx} + q_x = 0, \quad \frac{d^2 M_y}{dx^2} + \frac{dm_y}{dx} - q_z = 0. \quad (3)$$

Воспользуемся классическими кинематическими гипотезами Кирхгофа-Лява [4]

$$\varepsilon(x, y, z) = \varepsilon_0(x) + z \kappa_y(x), \quad \varepsilon_0(x) = \frac{du_0}{dx}, \quad \kappa_y = - \frac{d^2 w_0}{dx^2}. \quad (4)$$

где  $u_0$ ,  $w_0$  – компоненты вектора перемещений точек осевой линии стержня.

Тогда из соотношений (1), (3), (4) получим систему из двух дифференциальных уравнений относительно перемещений  $u_0, w_0$ .

Вследствие принятого закрепления стержня имеем граничные условия

$$u_0(0) = w_0(0) = u_0(l) = w_0(l) = 0, \quad (5)$$

$$\left. \frac{du_0}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{du_0}{dx} \right|_{x=l} = \left. \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right|_{x=0} = \left. \frac{d^2 w_0}{dx^2} \right|_{x=l} = 0. \quad (6)$$

Будем искать приближенное решение полученной системы методом Бубнова-Галеркина в математическом пакете Maple [6].

Решение представим в виде

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^N B_k y_k(x), \quad w_0(x) = \sum_{k=1}^N C_k r_k(x), \quad (7)$$

где  $B_k, C_k$  – искомые коэффициенты.

Если положить

$$y_k(x) = \cos \frac{k-1}{l} \pi x - \cos \frac{k+1}{l} \pi x, \quad r_k(x) = \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad (8)$$

тогда граничные условия (5), (6) будут удовлетворяться для любого значения  $k$ .

Если подставить в систему, которую можно получить из (1), (3), (4) разложения (7), (8), то получим систему из двух уравнений вида

$$L_1(x) = 0, \quad L_2(x) = 0. \quad (9)$$

Примем в качестве базисных функций в методе Бубнова-Галеркина функции

$$f_k(x) = \cos \frac{k-1}{l} \pi x - \cos \frac{k+1}{l} \pi x, \quad k = 1 \dots N. \quad (10)$$

Составим систему из  $2N$  алгебраических уравнений относительно  $2N$  неизвестных  $B_k, C_k, k = 1 \dots N$

$$\int_0^l L_i(x) f_k(x) dx = 0, \quad i = 1 \dots 2, \quad k = 1 \dots N. \quad (11)$$

Значение искомым коэффициентов  $B_k, C_k$  определим из указанной системы каким-либо численным методом [7]. Значение изгибающих моментов и продольного усилия определяется соотношениями (1).

Будем рассматривать сечения одинаковой поперечной площади и примем, что плотность рассматриваемых бетонов одинаковая и равна  $\rho = 1800 \text{ кг} / \text{м}^3$ , т.е. все рассматриваемые стержни будут обладать одинаковой массой и отличаться формой поперечного сечения и составом материалов каждого слоя. Все сечения будем подбирать таким образом, чтобы площади поверхностей, на которые действуют распределенные нагрузки были одинаковы.

Действующие нагрузки примем равными

$$q_1 = t_{11} + t_{12}x, q_2 = t_{21} + t_{22}x, q_3 = t_{31} + t_{32}x, q_4 = t_{41} + t_{42}x, \quad (12)$$

$$q_{s_{ix}} = g_x \rho \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} b_i(z) dz, \quad q_{s_{iz}} = g_z \rho \sum_{i=1}^n \int_{h_{i-1}}^{h_i} b_i(z) dz,$$

где  $g_x, g_z$  – проекции вектора ускорения свободного падения на соответствующие оси.

Примем, что форма поперечного сечения конструкции имеет вид однопоясчатого сечения рисунок 2 (конструкция №1), где рядом с номером сечения  $S_j$  указан материал соответствующего слоя.

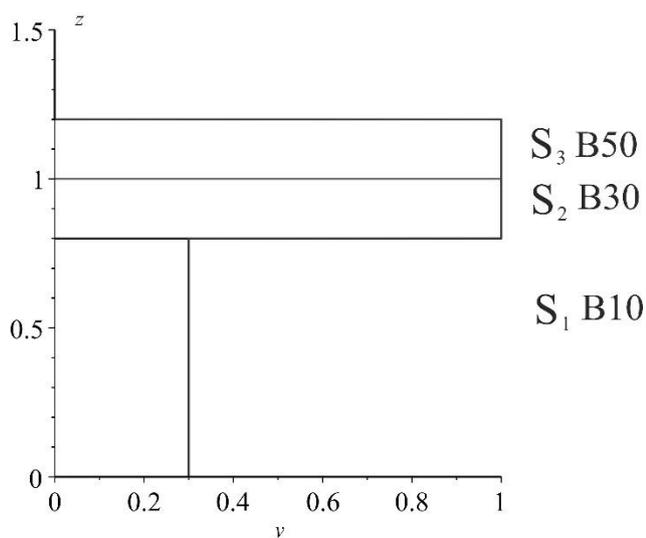


Рисунок 2 – Форма сечения конструкции №1

Если взять в качестве параметров нагрузок значения

$$\begin{aligned}
 t_{11} &= -1800 \text{ Н / м}, t_{12} = 200 \text{ Н / м}^2, t_{21} = 0, t_{22} = 0, \\
 t_{31} &= 10000 \text{ Н / м}, t_{32} = 1000 \text{ Н / м}^2, t_{41} = 0, t_{42} = 0,
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

а силу тяжести направить вертикально вниз ( $g_x = 0, g_z = -9,81 \text{ м / с}^2$ ), тогда при  $N=5$  в результате численного расчета компоненты вектора перемещений и распределение деформации на верхних и нижних контактных границах слоев по длине стержня примут вид изображенный на рисунках 3-5.

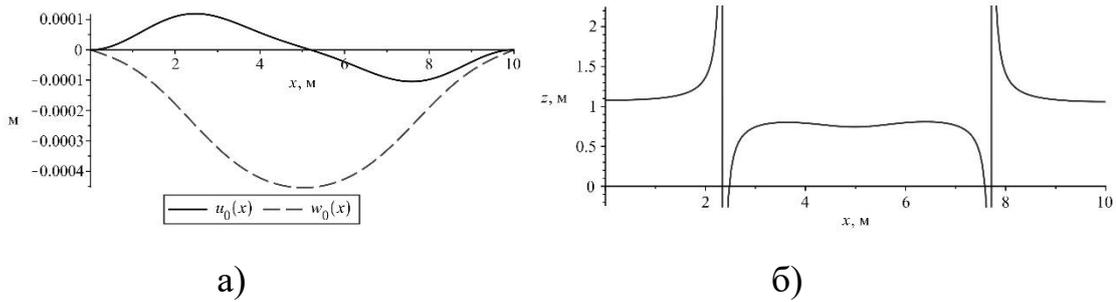


Рисунок 3 – Распределение компонентов вектора перемещений по длине стержня (конструкция №1)

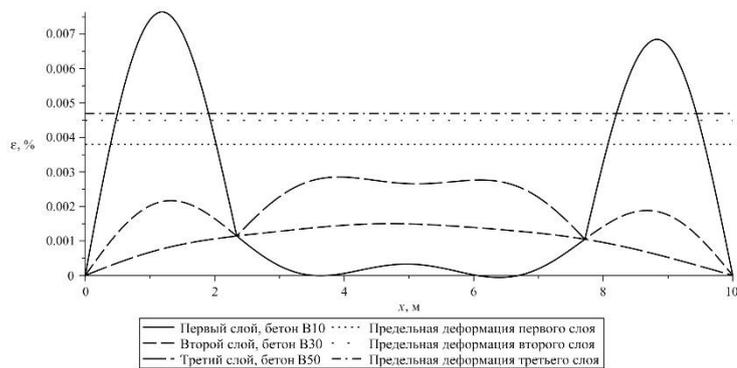


Рисунок 4 – Распределение деформации материалов на верхних контактных границах слоев по длине стержня (конструкция №1)

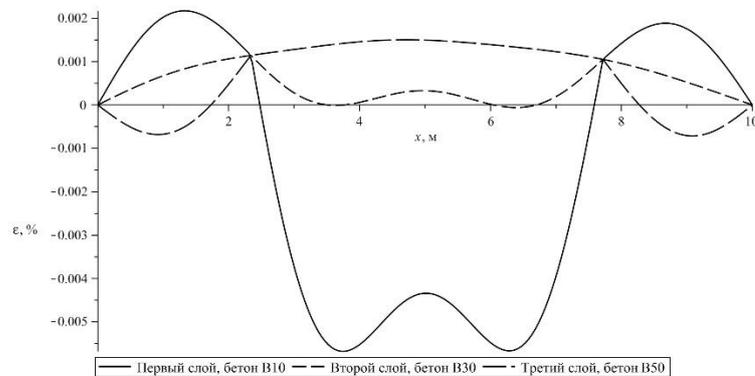


Рисунок 5 – Распределение деформации материалов на нижних контактных границах слоев по длине стержня (конструкция №1)

Определим максимальное значение  $u_{0m}, w_{0m}$  компонентов вектора перемещений  $u_0, w_0$ , максимальную деформацию растяжения в  $i$ -ом слое  $\varepsilon_{mi}$ , для оценки способности стержня выдерживать более высокие нагрузки будем рассматривать отношения максимальной деформации растяжения на верхних контактных границах слоев по длине стержня –  $\varepsilon_{mi}$  к предельной деформации  $\varepsilon_{*i}^+$  соответствующего материала слоя –  $\varepsilon_{mi} / \varepsilon_{*i}^+$  (таблица 2).

Как видно из рисунка 4 и таблицы 2 в рассматриваемом случае максимальная деформация превышает предельно допустимую [8,9].

Для рассматриваемого типа конструкции изменим форму поперечного сечения, таким образом, чтобы расход бетона каждой марки остался одинаковым рисунок 6 (конструкция №2). Нагрузки в этом случае и всех последующих будем рассматривать одинаковыми (13).

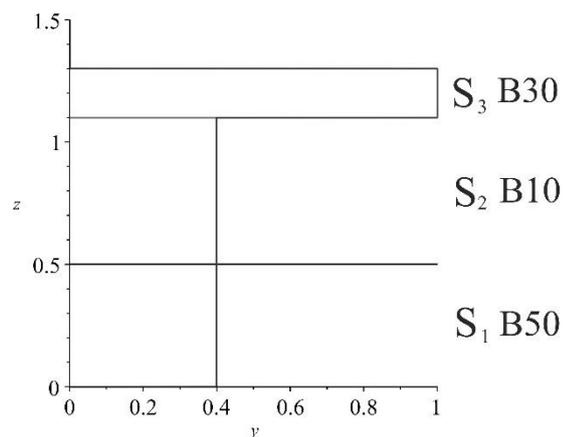


Рисунок 6 – Форма сечения конструкции №2

В результате расчетов получим графики компонентов перемещений и деформации в каждом слое (рисунки 7-9).

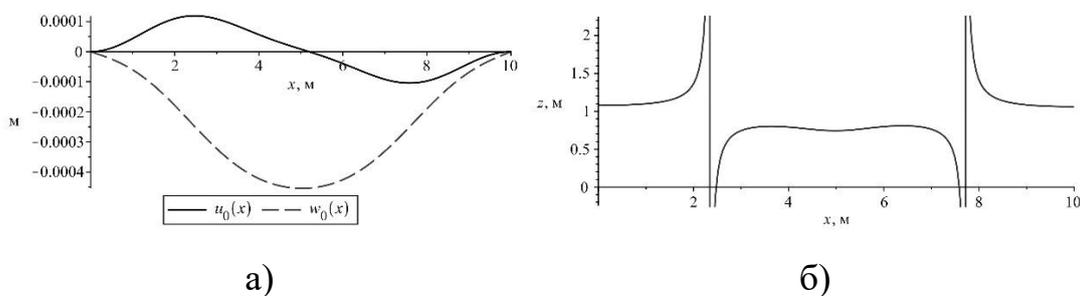


Рисунок 7 – Распределение а) компонентов вектора перемещений, б) нейтральной линии по длине стержня

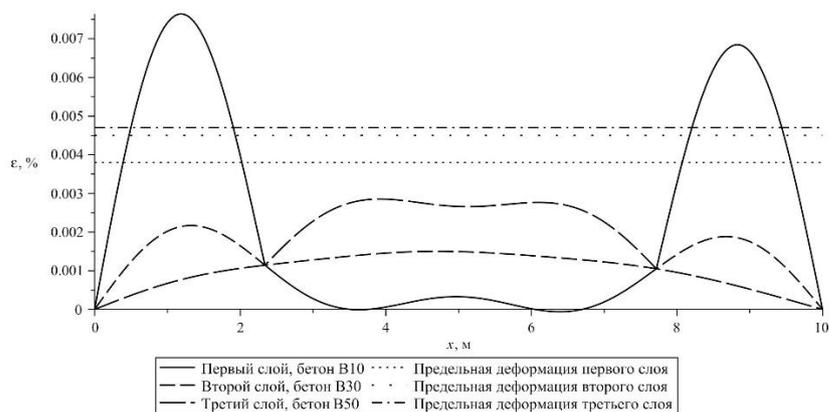


Рисунок 8 – Распределение деформации материалов на верхних контактных границах слоев по длине стержня (конструкция №2)

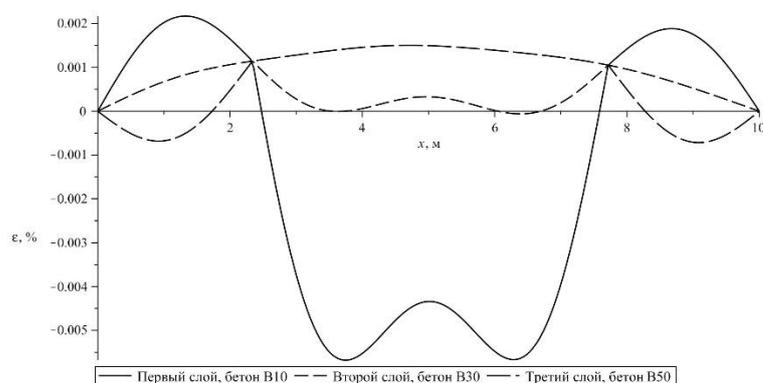


Рисунок 9 – Распределение деформации материалов на нижних контактных границах слоев по длине стержня (конструкция №2)

Как видно из полученных решений (рисунки 7-9) и таблицы 2 деформация не превышает соответствующих предельно допустимых значений для конструкции № 2, в отличие от конструкции № 1 при одинаковом расходе бетона каждой марки для изготовления каждой из этих конструкций, причем максимальное продольное перемещение  $u_{0m}$  оказалось во втором случае в 4,72 раза меньше, максимальный прогиб в 1,39 раза меньше, максимальная деформация (растяжения) по длине стержня в первом слое в 4,22 раза меньше, во втором больше в 1,31 раза, в третьем больше в 1,24 раза. Таким образом, конструкция № 2 оказалась более эффективной чем конструкция № 1 при заданных внешних нагрузках.

Рассмотрим случай, когда в конструкции 2 все материалы заменены на бетон марки В50 рисунок 10 (конструкция №3). В этом случае площадь поперечного сечения и масса стержня останутся неизменными.

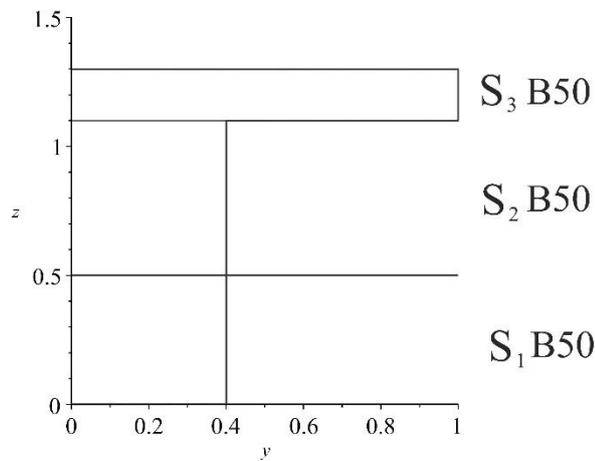


Рисунок 10 – Форма сечения конструкции № 3

Для компонентов перемещения и деформации в слоях решение примет вид, изображенный на рисунках 11-13.

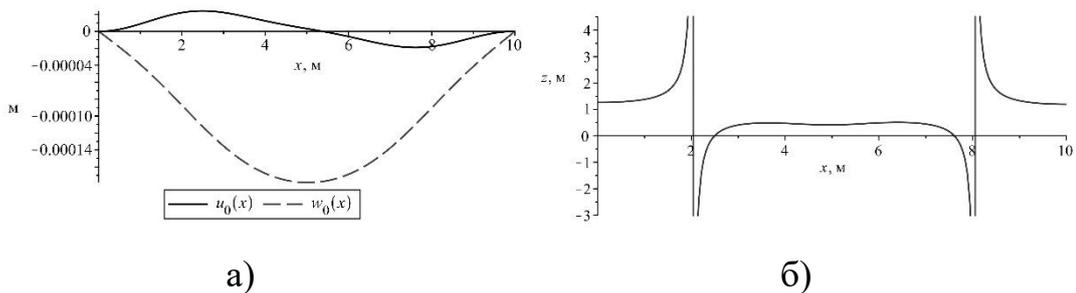


Рисунок 11 – Распределение а) компонентов вектора перемещений, б) нейтральной линии по длине стержня (конструкция №3)

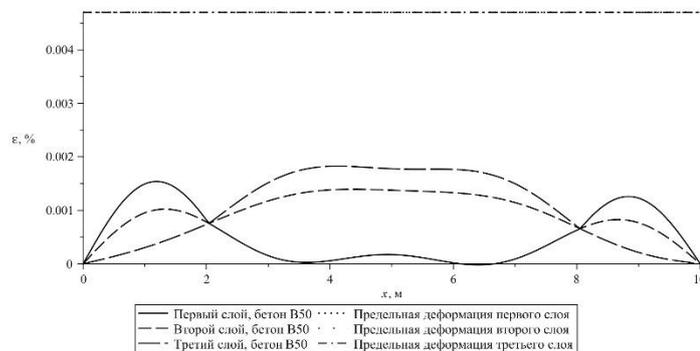


Рисунок 12 – Распределение деформации материалов на верхних контактных границах слоев по длине стержня (конструкция №3)

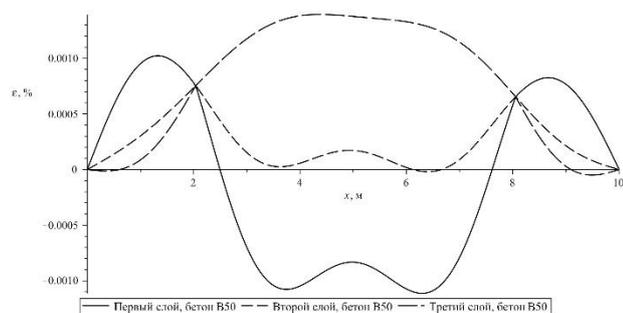


Рисунок 13 – Распределение деформации материалов на нижних контактных границах слоев по длине стержня (конструкция №3)

Как видно из полученных решений, деформация в этом случае не превышает предельных значений, причем максимальное продольное перемещение  $u_{0m}$  оказалось в третьем случае в 5,47 раза меньше чем в первом, максимальный прогиб в 2,54 раза меньше, максимальная деформация (растяжения) по длине стержня в первом слое в 5,07 раза меньше, во втором в 1,57 раза, в третьем в 1,61 раза. Причем отношение указанных деформаций в конструкции № 3 к соответствующим предельным меньше 0,38 во всех слоях (таблица 2), таким образом, конструкция № 3 имеет существенный запас ресурса несущей способности и может выдержать большие нагрузки.

Рассмотрим теперь случай двутаврового сечения (рисунок 14, конструкция №4), который получен из конструкции № 1 таким образом, чтобы масса бетонов каждой марки осталось неизменной (рисунок 14).

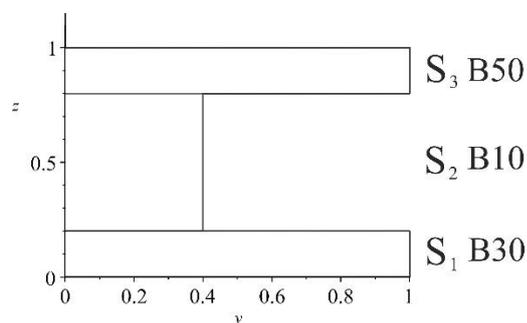


Рисунок 14 – Форма сечения конструкции № 4

В этом случае решения имеют вид, изображённой на рисунках 15-17.

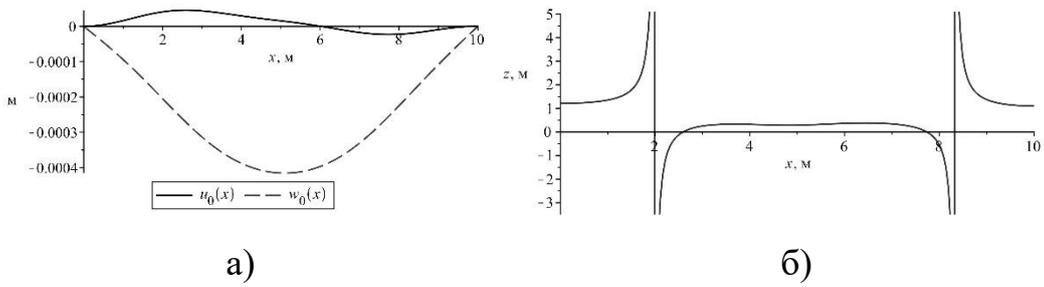


Рисунок 15 – Распределение а) компонентов вектора перемещений, б) нейтральной линии по длине стержня (конструкция №4)

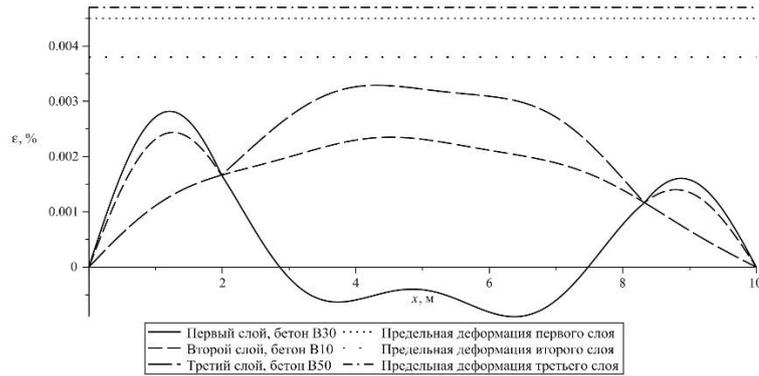


Рисунок 16 – Распределение деформации материалов на верхних контактных границах слоев по длине стержня (конструкция №4)

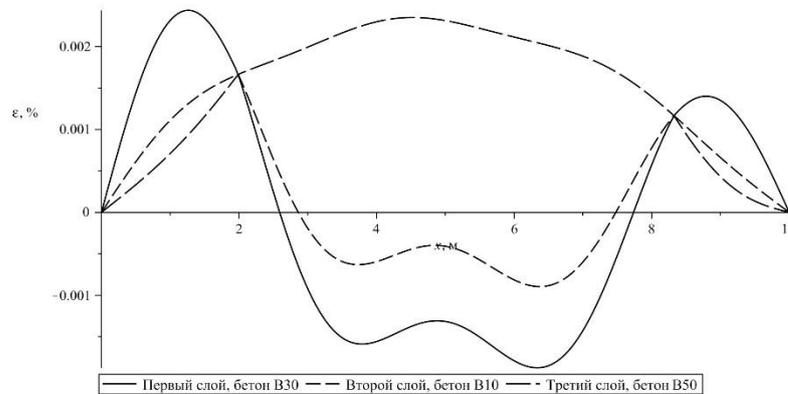


Рисунок 17 – Распределение деформации материалов на нижних контактных границах слоев по длине стержня (конструкция №4)

В этом случае максимальное продольное перемещение  $u_{0m}$  оказалось в 4,52 раза меньше чем в первом случае и в 1,04 раза больше чем во втором, максимальный прогиб в 1,09 раза меньше чем в первом и в 1,28 раза больше чем во втором, максимальная деформация в первом слое в 2,71 раза меньше чем в первом случае и в 1,55 раза больше чем во втором случае, во втором слое

больше в 1,09 раза чем в первом случае и в 1,2 раза меньше чем во втором случае, в третьем слое в 1,13 раза больше чем в первом случае и меньше в 1,09 раза чем во втором случае.

Изменим форму сечения 4 таким образом, чтобы расход материала каждого материала остался неизменным (рисунок 18).

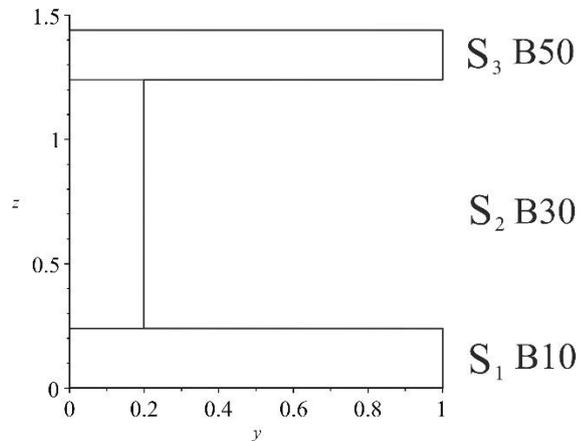


Рисунок 18 – Форма сечения конструкции №5

В этом случае решения примут вид (рисунки 19-21).

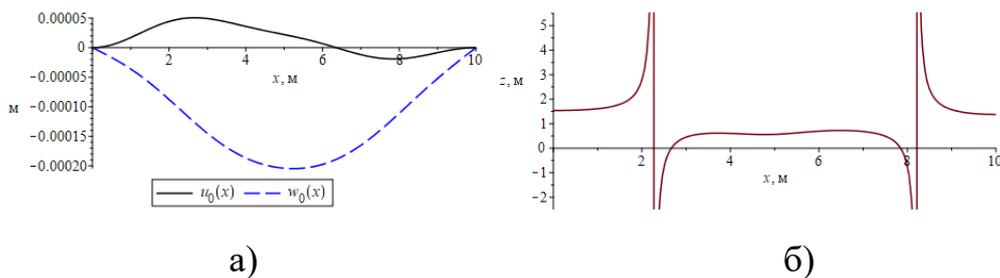


Рисунок 19 – Распределение а) компонентов вектора перемещений, б) нейтральной линии по длине стержня (конструкция №5)

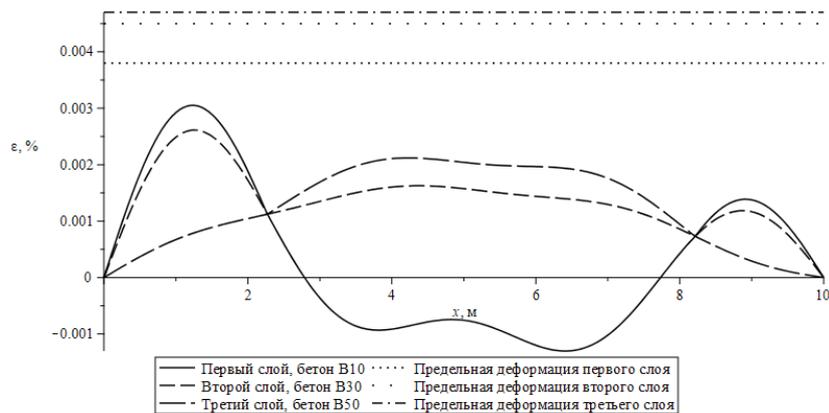


Рисунок 20 – Распределение деформации материалов на верхних контактных границах слоев по длине стержня (конструкция №5)

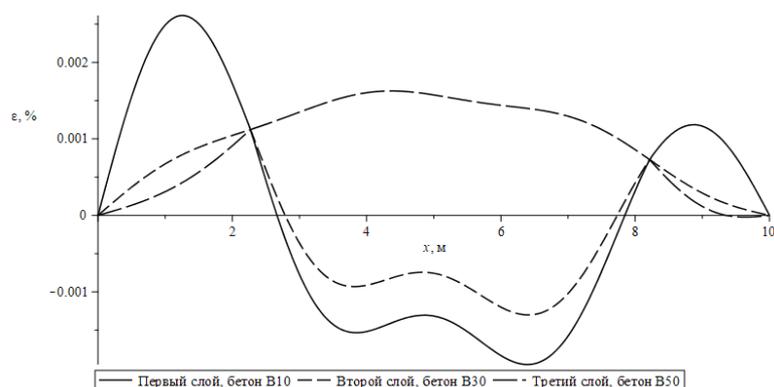


Рисунок 21 – Распределение деформации материалов на нижних контактных границах слоев по длине стержня (конструкция №5)

Как видно из решения деформация во всех слоях не достигла соответствующих предельно допустимых значений. В отличие от конструкции 4 в конструкции 5 максимальное продольное перемещение  $u_{0m}$  оказалось 1,21 раза меньше чем в первом, максимальный прогиб в 2,04 раза меньше, максимальная деформация в первом слое в 1,1 раза больше, во втором в 1,08 раза больше, в третьем в 1,57 раза меньше.

Если повернуть рассматриваемую конструкцию на 180 градусов (поменять местами первый и третий слой, рисунок 22 (конструкция № 6)), тогда получим решение, соответствующее рисункам 23-25.

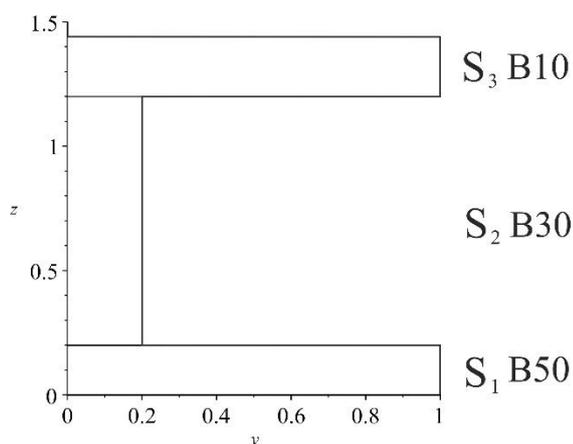


Рисунок 22 – Форма сечения конструкции № 6

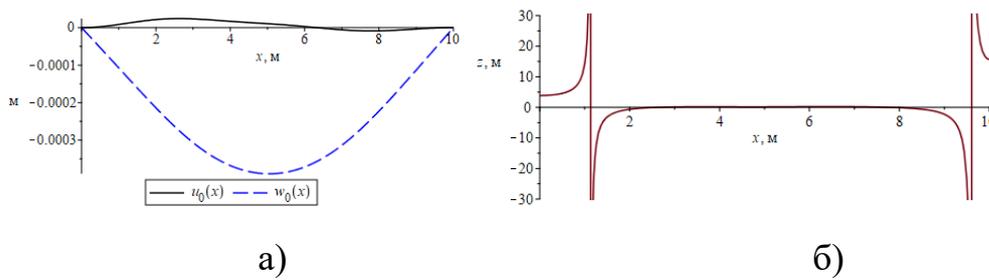


Рисунок 23 – Распределение а) компонентов вектора перемещений, б) нейтральной линии по длине стержня (конструкция № 6)

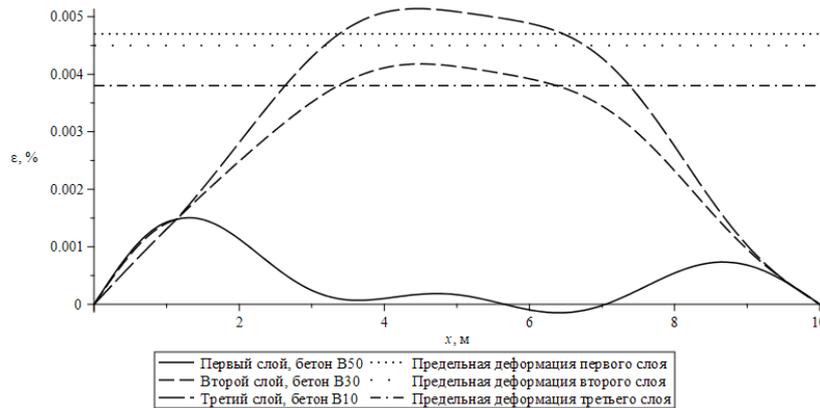


Рисунок 24 – Распределение деформации материалов на верхних контактных границах слоев по длине стержня (конструкция №6)

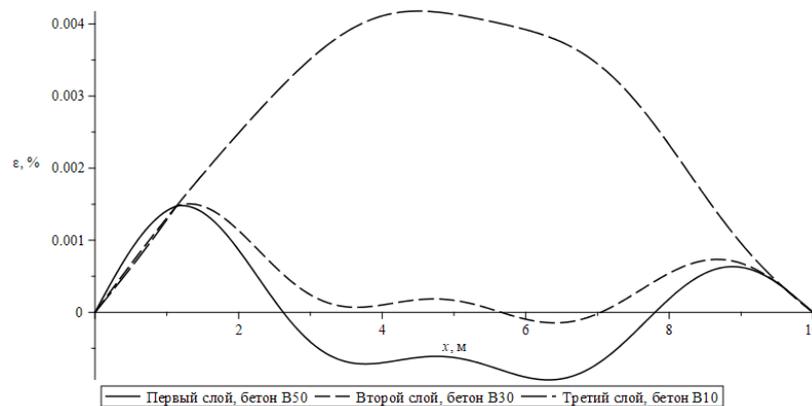


Рисунок 25 – Распределение деформации материалов на нижних контактных границах слоев по длине стержня (конструкция №6)

Как видно из этих решений деформация превысила соответствующее предельно допустимое значение в третьем слое, хотя в стержне повернутом на 180 градусов относительно исходного максимальная деформация не превышала соответствующего предельно допустимого значения во всех слоях. В отличие от предыдущего случая в этой конструкции максимальное продольное

перемещение  $u_{0m}$  оказалось 2,11 раза меньше чем предыдущей, максимальный прогиб в 1,95 раза больше, максимальная деформация в первом слое в 2,07 раза меньше, во втором в 1,62 раза больше, в третьем в 2,42 раза больше.

Для сравнения рассмотрим также стержень прямоугольного поперечного сечения (конструкция №7), с расходом материалов каждой марки бетона, как и в предыдущих случаях (рисунок 26). Тогда решения примут вид, изображенные на рисунках 27-29.

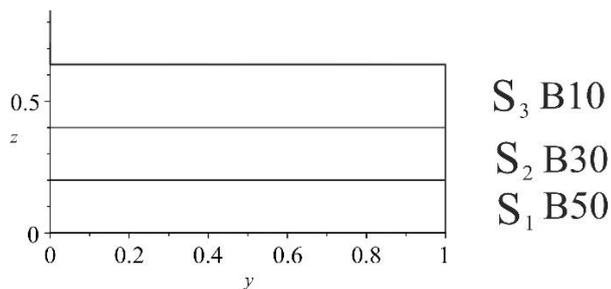


Рисунок 26 – Форма сечения конструкции № 7

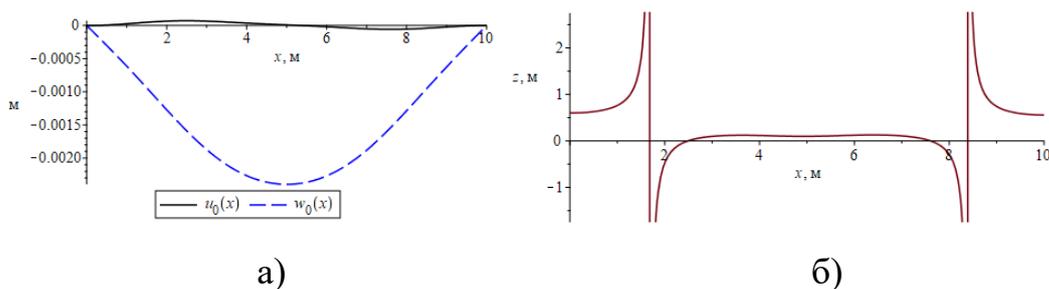


Рисунок 27 – Распределение а) компонентов вектора перемещений, б) нейтральной линии по длине стержня

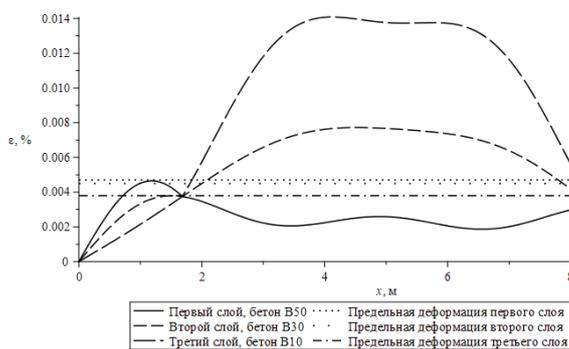


Рисунок 28 – Распределение деформации материалов на верхних контактных границах слоев по длине стержня (конструкция №7)

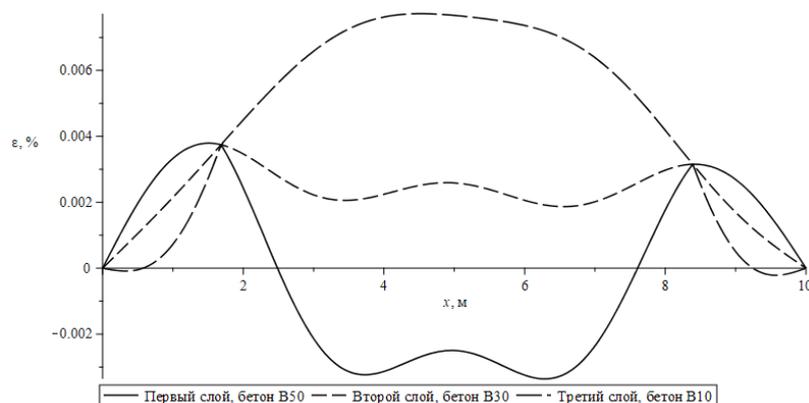
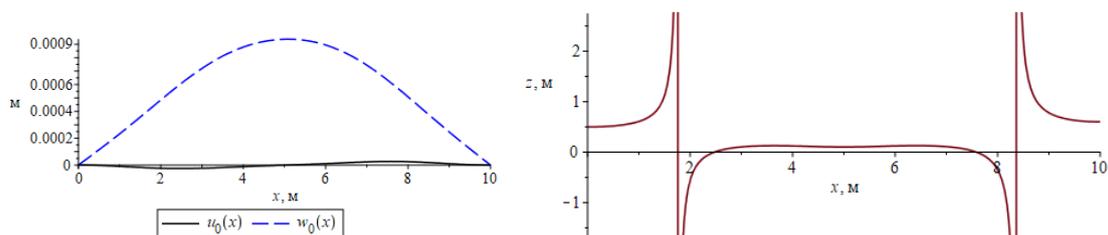


Рисунок 29 – Распределение деформации материалов на нижних контактных границах слоев по длине стержня (конструкция №7)

В этом случае несмотря на одинаковый расход материалов, максимальная деформация превысила предельные значения во втором и третьем слоях и близка к предельной в первом слое. При этом в отличие от случая 6 максимальное продольное перемещение  $u_{0m}$  оказалось 6,33 раза больше чем шестом, максимальный прогиб в 6 раз больше, максимальная деформация в первом слое в 3,13 раза больше, во втором в 1,83 раза больше, в третьем в 3,64 раза меньше.

Таким образом при одинаковой массе стержня и одинаковом расходе материалов одни формы сечений показали существенных запас несущей способности, другие, наоборот, оказались не способными воспринимать те же самые нагрузки, т. е. оказались не эффективными для рассматриваемых условий эксплуатации.

Теперь рассмотрим случай, когда сила тяжести действует вдоль оси стержня (случай  $g_x = -9,81 \text{ м/с}^2, g_z = 0$ ). В этом случае, когда конструкция имеет форму сечения конструкции №7, получаем решение, изображенное на рисунках 30-32.



а)

б)

Рисунок 30 – Распределение а) компонентов вектора перемещений,  
 б) нейтральной линии по длине стержня  
 (конструкция №7,  $g_x = -9,81 \text{ м/с}^2, g_z = 0$ )



Рисунок 31 – Распределение деформации материалов на верхних  
 контактных границах слоев по длине стержня  
 (конструкция №7,  $g_x = -9,81 \text{ м/с}^2, g_z = 0$ )

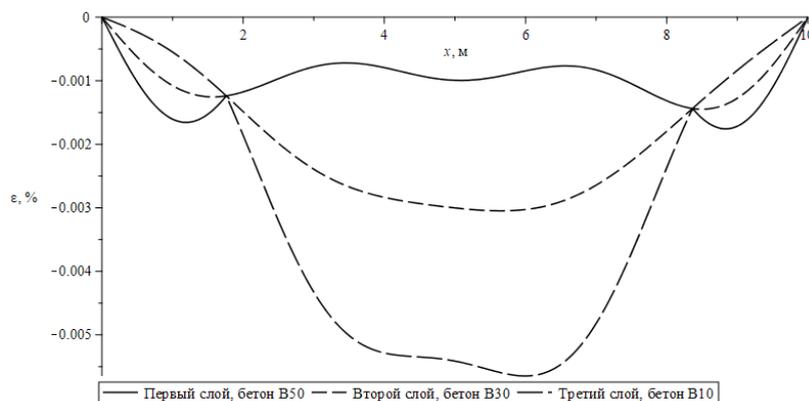


Рисунок 32 – Распределение деформации материалов на нижних  
 контактных границах слоев по длине стержня  
 (конструкция №7,  $g_x = -9,81 \text{ м/с}^2, g_z = 0$ )

Как видно из полученных решений деформация не превышает предельно допустимых значений во всех слоях стержня. Причем положительные деформации (растяжения) реализовывались только в первом и третьем слоях

стержня. При этом в отличие от случая, когда сила тяжести направлена вертикально вниз при прочих одинаковых условиях максимальное продольное перемещение оказалось в 2,19 раза меньше, максимальный прогиб в 725 757 575 раза меньше, максимальная деформация в первом слое в 3 раза меньше, в третьем в 7 раз меньше. Столь существенную разницу с предыдущим случаем можно объяснить тем, что продольная нагрузка оказалась направлена в противоположную сторону силы тяжести и она оказалась фактором «поддерживающим» рассматриваемую конструкцию.

Рассмотрим случай, когда сила тяжести отсутствует ( $g_x = 0, g_z = 0$ ). Предположим, что конструкция имеет случай формы сечения конструкции № 1 (рисунок 2), нагрузки возьмем точно такими же, как и в рассмотренных ранее случаях.

Тогда решение примет вид, изображенный на рисунках 33-35.

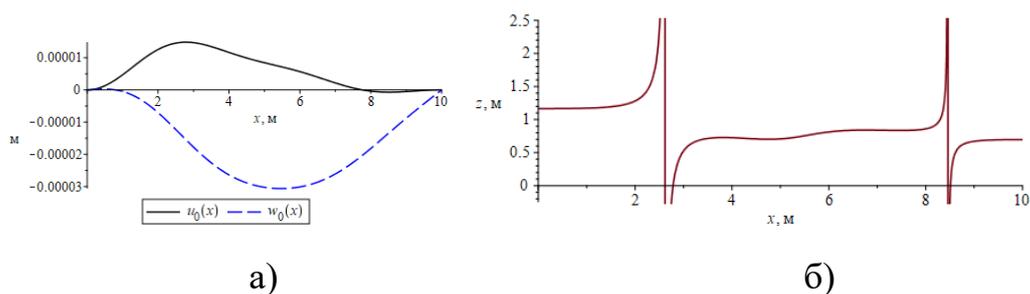


Рисунок 33 – Распределение а) компонентов вектора перемещений, б) нейтральной линии по длине стержня (конструкция №1,  $g_x = 0, g_z = 0$ )

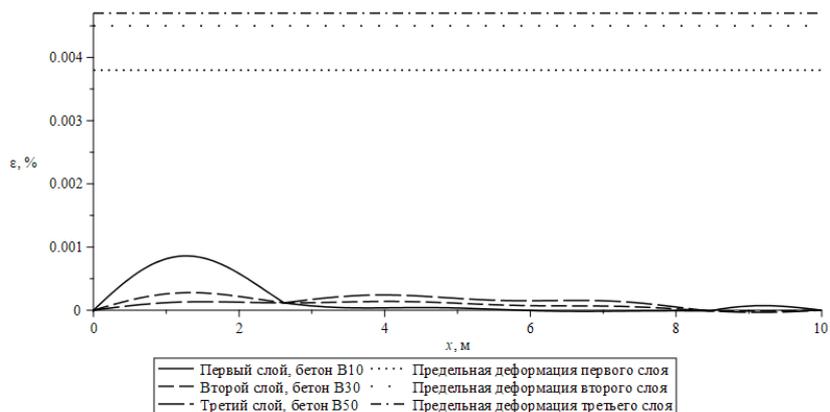


Рисунок 34 – Распределение деформации материалов на верхних контактных границах слоев по длине стержня

(конструкция №1,  $g_x = 0, g_z = 0$ )

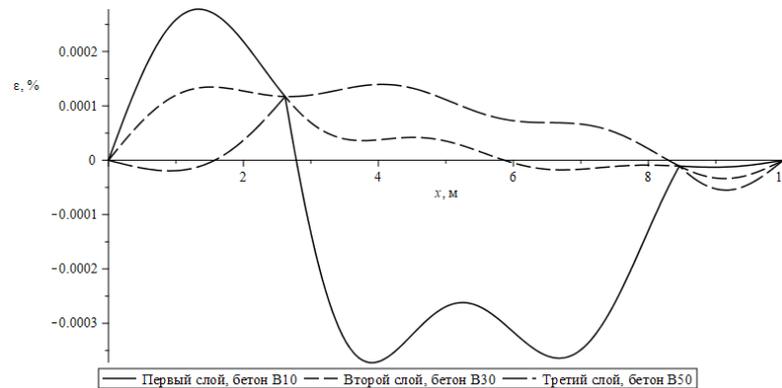


Рисунок 35 – Распределение деформации материалов на нижних контактных границах слоев по длине стержня

(конструкция №1,  $g_x = 0, g_z = 0$ )

В этом случае максимальное продольное перемещение  $u_{0m}$  оказалось в 115 раз меньше чем в случае с учетом силы тяжести, максимальный прогиб в 15 раз меньше чем в случае с учетом силы тяжести, максимальная деформация в первом слое в 8 раз меньше, во втором в 7 раз меньше, в третьем также в 14 раз меньше. Из полученных решений видно для рассматриваемой формы поперечного сечения конструкции деформация не превысила соответствующих предельно допустимых значений, хотя для случая, где сила тяжести учитывалась, деформация превысила предельно допустимое значение в первом слое. При этом в случае без учета силы тяжести конструкция имеет существенный запас несущей способности, т. е. способна выдержать гораздо большие нагрузки. Если увеличим действующие поперечные нагрузки (13) в 9 раз

$$\begin{aligned} t_{11} &= -16200 \text{ н} / \text{ м}, t_{12} = 1800 \text{ н} / \text{ м}^2, t_{21} = 0, t_{22} = 0, \\ t_{31} &= 10000 \text{ н} / \text{ м}, t_{32} = 1000 \text{ н} / \text{ м}^2, t_{41} = 0, t_{42} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

тогда решение примет вид, изображенной на рисунках 36-38.

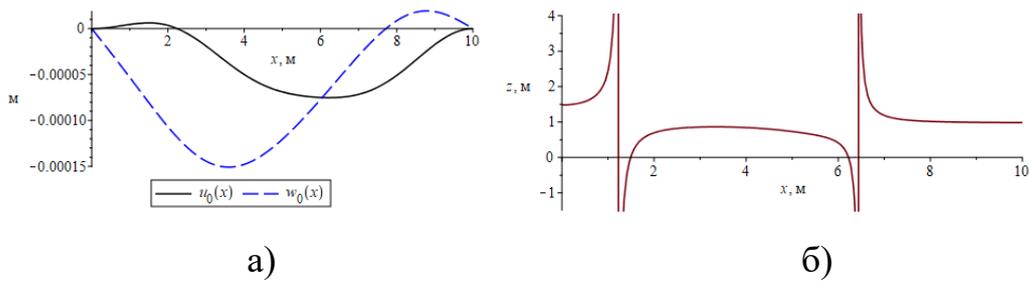


Рисунок 36 – Распределение а) компонентов вектора перемещений, б) нейтральной линии по длине стержня (конструкция №1,  $g_x = 0, g_z = 0$ )

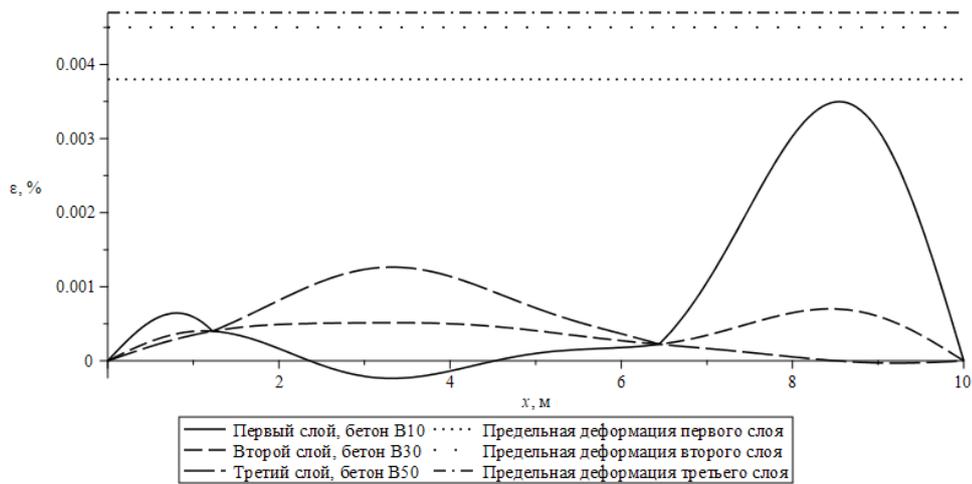


Рисунок 37 – Распределение деформации материалов на верхних контактных границах слоев по длине стержня (конструкция №1,  $g_x = 0, g_z = 0$ )

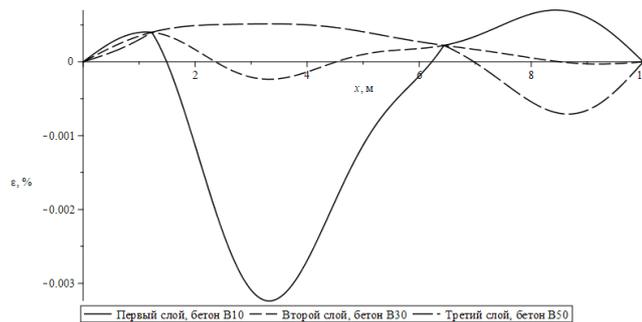


Рисунок 38 – Распределение деформации материалов на нижних контактных границах слоев по длине стержня (конструкция №1,  $g_x = 0, g_z = 0$ )

Из приведенных графиков видно, что максимальная деформация не превышает соответствующие предельные значения во всех слоях стержня. Таким образом, при игнорировании для бетонных конструкций силы тяжести стержень способен выдержать приложенные нагрузки в данном рассматриваемом случае, хотя в случае с учетом силы тяжести стержень терял несущую способность уже при нагрузках, которые меньше в 9 раз.

Рассмотрим случай формы сечения конструкции № 7 (рисунок 26). В этом случае в условиях отсутствия силы тяжести имеем решения, изображенные на рисунках 39-41.

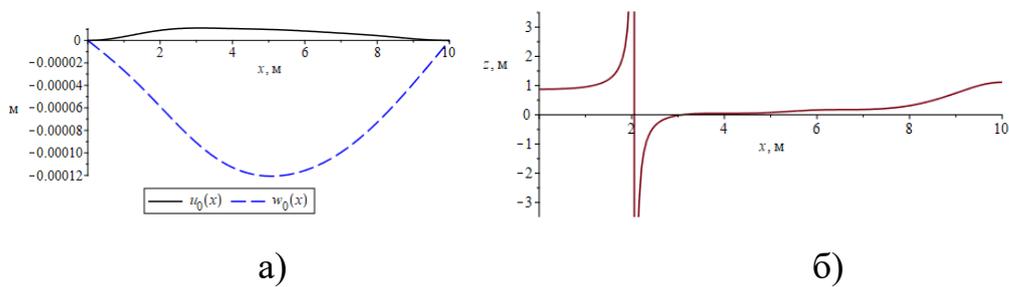


Рисунок 39 – Распределение а) компонентов вектора перемещений, б) нейтральной линии по длине стержня (конструкция №7,  $g_x = 0, g_z = 0$ )

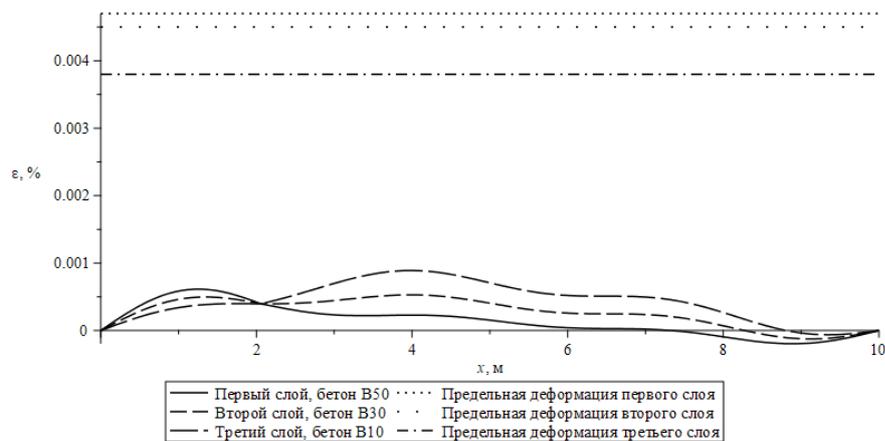


Рисунок 40 – Распределение деформации материалов на верхних контактных границах слоев по длине стержня (конструкция №7,  $g_x = 0, g_z = 0$ )

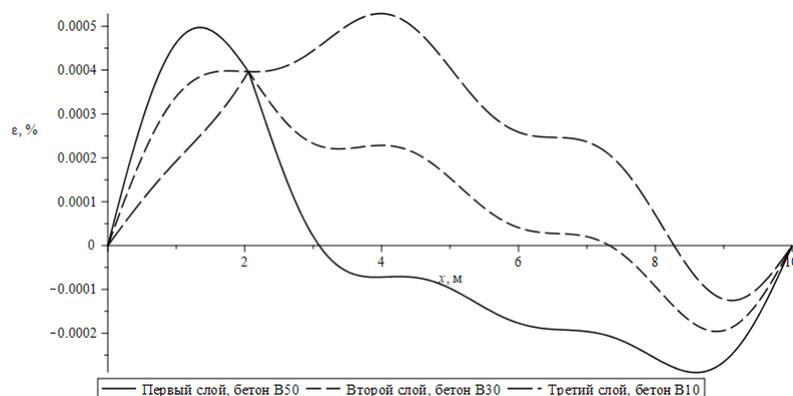


Рисунок 41 – Распределение деформации материалов на нижних контактных границах слоев по длине стержня (конструкция №7,  $g_x = 0, g_z = 0$ )

Как видно из полученных решений деформация оказалась меньше во всех слоях конструкции и максимальное продольное перемещение оказалось в 7 125 000 000 раз меньше, максимальный прогиб в 20 раз меньше, максимальная деформация в первом слое в 7,8 раза меньше, во втором слое в 15,4 раза меньше, в третьем в 1,5 раза меньше. Если увеличить нагрузку (13) аналогично в 9 раз (14) как и в предыдущем примере, тогда получим решения, изображенные на рисунках 42-44.

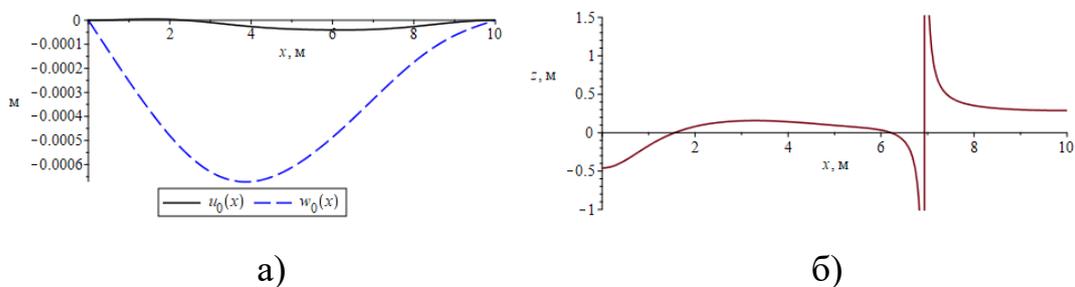


Рисунок 42 – Распределение а) компонентов вектора перемещений, б) нейтральной линии по длине стержня (конструкция №7,  $g_x = 0, g_z = 0$ )

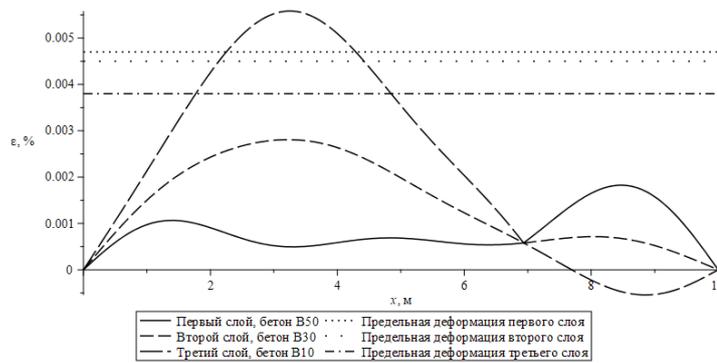


Рисунок 43 – Распределение деформации материалов на верхних контактных границах слоев по длине стержня (конструкция №7,  $g_x = 0, g_z = 0$ )

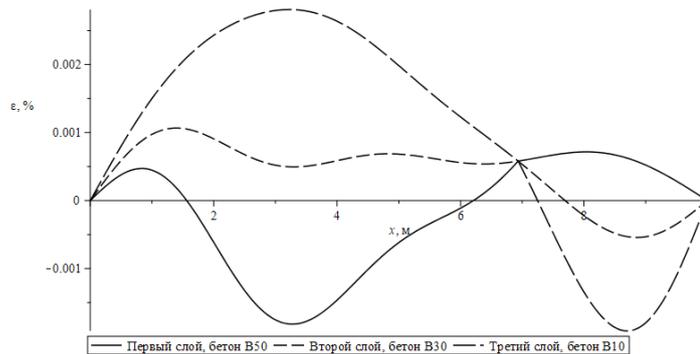


Рисунок 44 – Распределение деформации материалов на нижних контактных границах слоев по длине стержня (конструкция №7,  $g_x = 0, g_z = 0$ )

Из рисунка 43 можно увидеть, что деформация превысила соответствующее предельно допустимое значение при растяжении. В рассматриваемых условиях нагружения форма сечения конструкции №1 оказалась более эффективной по сравнению с формой сечения конструкции №7 при одинаковом расходе материалов. Если увеличить поперечную нагрузку не в 9 раз, а в 6 раз, тогда получим решения, изображенные на рисунках 45-47.

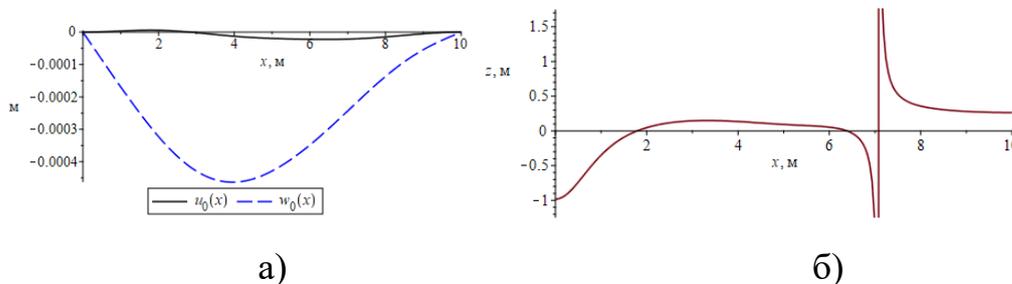


Рисунок 45 – Распределение а) компонентов вектора перемещений, б) нейтральной линии по длине стержня (конструкция №7,  $g_x = 0, g_z = 0$ )

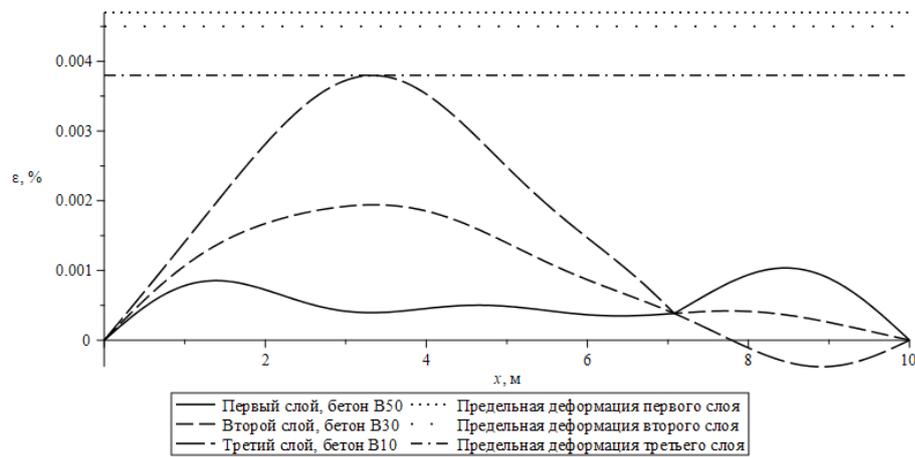


Рисунок 46 – Распределение деформации материалов на верхних контактных границах слоев по длине стержня (конструкция №7,  $g_x = 0, g_z = 0$ )

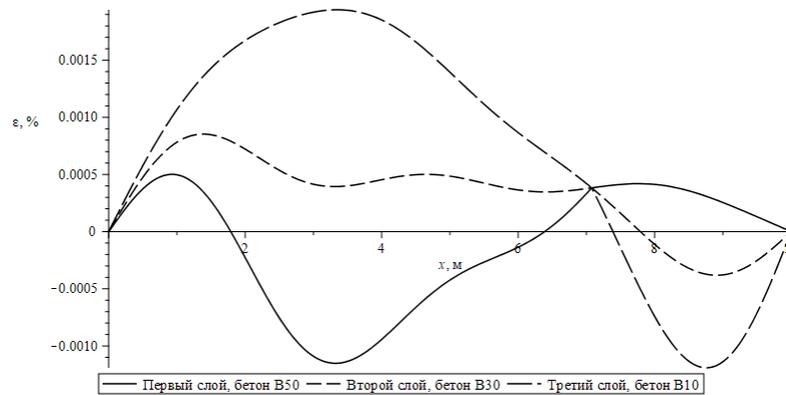


Рисунок 47 – Распределение деформации материалов на нижних контактных границах слоев по длине стержня (конструкция №7,  $g_x = 0, g_z = 0$ )

Из полученных решений можно увидеть, что деформация не превышает соответствующих предельно допустимых значений и в третьем слое стержня деформация близка к достижению предельно допустимого значения и дальнейшее повышение нагрузки уже невозможно.

В научной литературе найти диаграммы растяжения и сжатия бетонов достаточно тяжело. Для расчета коэффициентов уравнения (1)  $A_{1i}, A_{2i}$  можно взять достаточно простые соотношения [1,2]

$$\varepsilon_{*i}^+ = \frac{\sigma_{*i}^+}{E_i}, \quad \varepsilon_{*i}^- = 2 \frac{\sigma_{*i}^-}{E_i}, \quad A_{1i} = E_i, \quad A_{2i} = \frac{1}{4} \frac{E_i^2}{\sigma_{*i}^-}, \quad (14)$$

где  $\sigma_{*i}^+$ ,  $\sigma_{*i}^-$  – пределы прочности бетона при растяжении и сжатии образцов  $i$ -го слоя,  $E_i$  – модуль упругости бетона  $i$ -го слоя.

Таблица 2 – Значения максимальных продольных перемещений, прогибов и максимальных деформаций для каждого номера конструкции

№	$g_x$ , м/с <sup>2</sup>	$g_z$ , м/с <sup>2</sup>	$u_{0m}$ , мм	$w_{0m}$ , мм	$\varepsilon_{m1}$ , %%	$\varepsilon_{m2}$ , %%	$\varepsilon_{m3}$ , %%	$\frac{\varepsilon_{m1}}{\varepsilon_{*1}^+}$ , %	$\frac{\varepsilon_{m2}}{\varepsilon_{*2}^+}$ , %	$\frac{\varepsilon_{m3}}{\varepsilon_{*3}^+}$ , %
1	0	-9,81	-0,104	-0,454	0,076	0,022	0,029	200	48	61
2	0	-9,81	-0,022	-0,325	0,018	0,029	0,036	38	76	80
3	0	-9,81	-0,019	-0,179	0,015	0,014	0,018	31	29	38
4	0	-9,81	-0,023	-0,416	0,028	0,024	0,033	62	63	70
5	0	-9,81	-0,019	-0,204	0,031	0,026	0,021	80	58	45
6	0	-9,81	-0,009	-0,399	0,015	0,042	0,051	32	92	135
7	0	-9,81	-0,057	-2,395	0,047	0,077	0,014	98	171	370
7	-9,81	0	-0,026	$-3 \cdot 10^{-9}$	0,013	$-6 \cdot 10^{-11}$	0,002	30	–	7
1	0	0	-0,001	-0,031	0,009	0,003	0,002	23	6	4
7	0	0	$-8 \cdot 10^{-12}$	-0,12	0,006	0,005	0,009	13	11	23

Значения справочных значений пределов прочности для сжатия и растяжения и модуля упругости для предельных состояний первой группы (несущей способности) и второй группы (пригодности к нормальной эксплуатации) [3] для тяжелых бетонов и расчетных значений предельных деформаций для сжатия и растяжения и коэффициентов  $A_{1i}$ ,  $A_{2i}$  по соотношениям (14) поместим в таблицы 3,4.

Для сравнения рассмотрим сверхвысокопрочные сталефибробетоны [4], обозначим их В110\*, В128\*, значения параметров указанных бетонов поместим в таблицу 3.

Таблица 3 – Значения физических параметров тяжелых бетонов для предельных состояний первой группы

Марка бетона	Справочные значения			Расчетные значения			
	$\sigma_*^-$ , МПа	$\sigma_*^+$ , МПа	$E$ , ГПа	$\varepsilon_*^-, 10^{-2}$	$\varepsilon_*^+, 10^{-2}$	$A_{1i}$ , МПа	$A_{2i}$ , МПа
B3,5	2,1	0,26	9,5	0,0442	0,0027	9500	10744048
B5	2,8	0,37	13,0	0,0431	0,0028	13000	15089286
B7,5	4,5	0,48	16,0	0,0563	0,0030	16000	14222222
B10	6,0	0,56	19,0	0,0632	0,0029	19000	15041667
B12,5	7,5	0,66	21,5	0,0698	0,0031	21500	15408333
B15	8,5	0,75	24,0	0,0708	0,0031	24000	16941176
B20	11,5	0,90	27,5	0,0836	0,0033	27500	16440217
B25	14,5	1,05	30,0	0,0967	0,0035	30000	15517241
B30	17,0	1,15	32,5	0,1046	0,0035	32500	15533088
B35	19,5	1,30	34,5	0,1130	0,0038	34500	15259615
B40	22,0	1,40	36,0	0,1222	0,0039	36000	14727273
B45	25,0	1,50	37,0	0,1351	0,0041	37000	13690000
B50	27,5	1,60	38,0	0,1447	0,0042	38000	13127273
B55	30,0	1,70	39,0	0,1538	0,0044	39000	12675000
B60	33,0	1,80	39,5	0,1671	0,0046	39500	11820076
B70	37,0	1,90	41,0	0,1805	0,0046	41000	11358108
B80	41,0	2,10	42,0	0,1952	0,0050	42000	10756098
B90	44,0	2,15	42,5	0,2071	0,0051	42500	10262784
B100	47,5	2,20	43	0,2209	0,0051	43000	9731579
B110*	115,4	9,7	44,2	0,5222	0,0219	44200	4232322
B128*	132,5	10,1	49,0	0,5408	0,0206	49000	4530189

Таблица 4 – Значения физических параметров тяжелых бетонов для предельных состояний второй группы

Марка бетона	Справочные значения			Расчетные значения			
	$\sigma_*^-$ , МПа	$\sigma_*^+$ , МПа	$E$ , ГПа	$\varepsilon_*^-, 10^{-2}$	$\varepsilon_*^+, 10^{-2}$	$A_{1i}$ , МПа	$A_{2i}$ , МПа
B3,5	2,7	0,39	9,5	0,0568	0,0041	9500	8356481
B5	3,5	0,55	13,0	0,0538	0,0042	13000	12071429
B7,5	5,5	0,70	16,0	0,0688	0,0044	16000	11636364
B10	7,5	0,85	19,0	0,0789	0,0045	19000	12033333
B12,5	9,5	1,00	21,5	0,0884	0,0047	21500	12164474
B15	11	1,10	24,0	0,0917	0,0046	24000	13090909
B20	15	1,35	27,5	0,1091	0,0049	27500	12604167
B25	18,5	1,55	30,0	0,1233	0,0052	30000	12162162
B30	22	1,75	32,5	0,1354	0,0054	32500	12002841
B35	25,5	1,95	34,5	0,1478	0,0057	34500	11669118
B40	29	2,10	36,0	0,1611	0,0058	36000	11172414
B45	32	2,25	37,0	0,1730	0,0061	37000	10695313
B50	36	2,45	38,0	0,1895	0,0064	38000	10027778
B55	39,5	2,60	39,0	0,2026	0,0067	39000	9626582
B60	43	2,75	39,5	0,2177	0,0070	39500	9071221
B70	50	3,00	41,0	0,2439	0,0073	41000	8405000
B80	57	3,30	42,0	0,2714	0,0079	42000	7736842
B90	64	3,60	42,5	0,3012	0,0085	42500	7055664
B100	71	3,80	43	0,3302	0,0088	43000	6510563

Аналогично предыдущим случаям будем рассматривать сечения одинаковой поперечной площади и примем, что плотность рассматриваемых бетонов одинаковая и равна  $1\,800\text{ кг/м}^3$ .

В рассмотренной ранее конструкции №1 возьмем в сечении бетоны тех же самых марок, значения коэффициентов  $A_{1i}$ ,  $A_{2i}$  определим из соотношений (14) для предельных состояний первой группы (таблица 3). Нагрузки примем равными (13), тогда решение примет вид, изображенный на рисунках 48-50. Из рисунка 49 можно увидеть, что деформация превысила соответствующее предельно допустимое значение при растяжении в первом слое, также как и в случае, когда коэффициенты определяли из реальных диаграмм растяжения-сжатия соответствующих марок бетонов (рисунок 4). Если сопоставить результаты расчетов используя коэффициенты  $A_{1i}$ ,  $A_{2i}$  вычисленные по соотношениям (14) и методом наименьших квадратов по реальным диаграммам деформирования, то можно увидеть, что максимальное продольное перемещение оказалось в 1,33 раза меньше в случае использования соотношений (14), максимальный прогиб в 1,05 раз меньше, максимальная деформация в первом слое в 1,33 раза меньше, во втором слое в 1,04 раза меньше, в третьем в 1,13 раза больше.

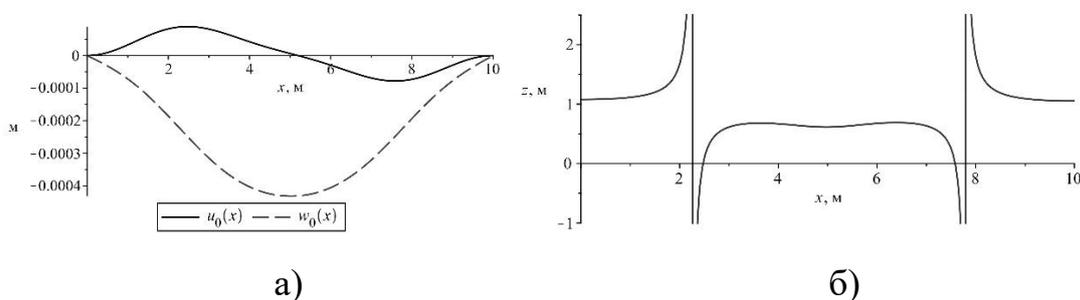


Рисунок 48 – Распределение а) компонентов вектора перемещений,  
 б) нейтральной линии по длине стержня  
 (конструкция №1,  $g_x = 0, g_z = -9,81 \text{ м} / \text{с}^2$ )

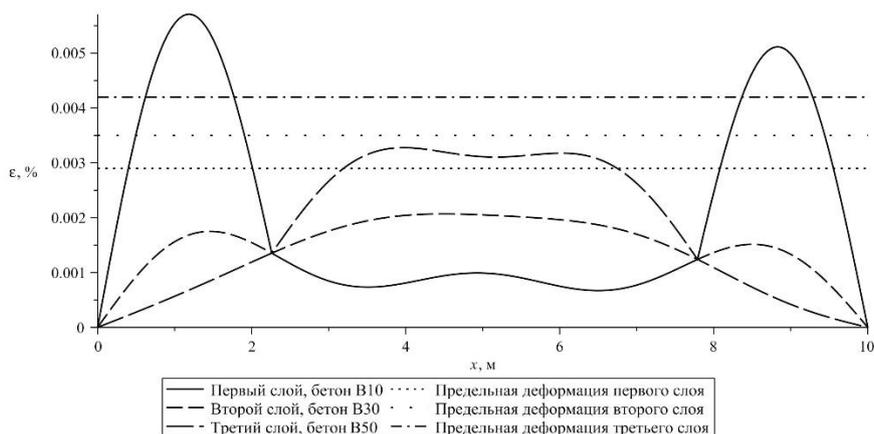


Рисунок 49 – Распределение деформации материалов на верхних контактных границах слоев по длине стержня (конструкция №1,  $g_x = 0, g_z = -9,81 \text{ м} / \text{с}^2$ )

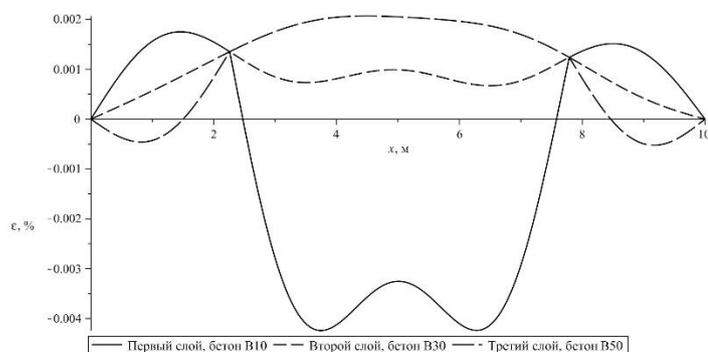


Рисунок 50 – Распределение деформации материалов на нижних контактных границах слоев по длине стержня (конструкция №1,  $g_x = 0, g_z = -9,81 \text{ м} / \text{с}^2$ )

Использование пределов прочности и модулей упругостей бетонов при определении параметров слоев открывают широкие возможности к исследованию конструкций из различных марок бетонов, фибробетонов и т.д., т.к. пределы прочности и модули упругости широко представлены в научной литературе.

Рассмотрим конструкцию №8, в которой в отличие от конструкции №1 марки бетонов заменены на более прочные (рисунок 51) и нагрузки в отличие от предыдущего примера увеличены в 4 раза и равны (15)

$$\begin{aligned} t_{11} &= -7200 \text{ н} / \text{ м}, t_{12} = 800 \text{ н} / \text{ м}^2, t_{21} = 0, t_{22} = 0, \\ t_{31} &= 40000 \text{ н} / \text{ м}, t_{32} = 4000 \text{ н} / \text{ м}^2, t_{41} = 0, t_{42} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда решение примет вид, изображенный на рисунках 52-54.

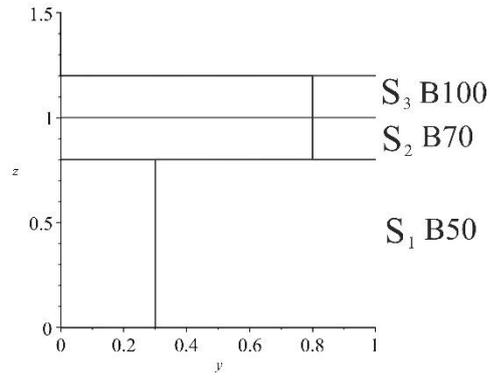


Рисунок 51 – Форма сечения конструкции № 8

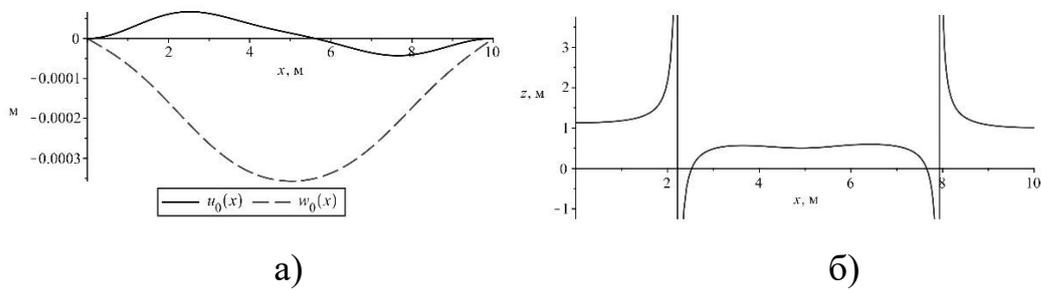


Рисунок 52 – Распределение а) компонентов вектора перемещений, б) нейтральной линии по длине стержня

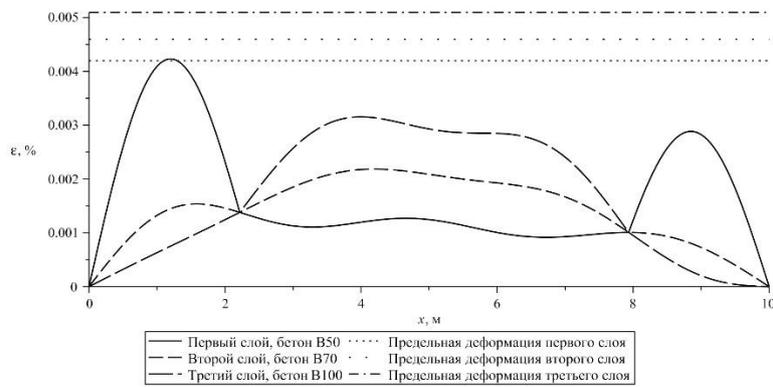


Рисунок 53 – Распределение деформации материалов на верхних контактных границах слоев по длине стержня (конструкция №8)

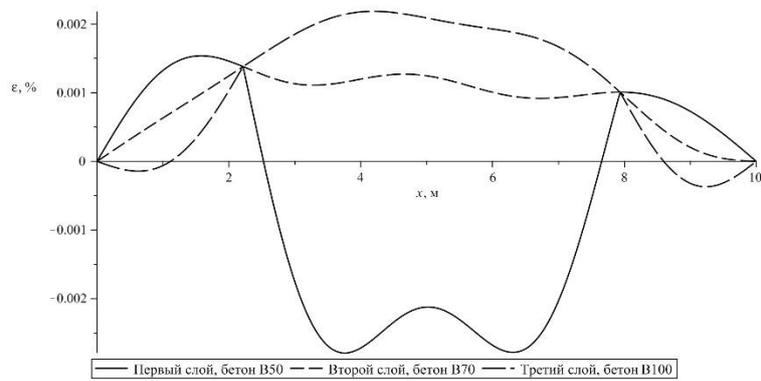


Рисунок 54 – Распределение деформации материалов на нижних контактных границах слоев по длине стержня (конструкция №8)

В этом случае деформация близка к предельному значению в первом слое. При этом в отличие от предыдущего случая максимальное продольное перемещение  $u_{0m}$  оказалось 1,81 раза меньше в случае высокопрочных бетонов, максимальный прогиб в 1,21 раза меньше, максимальная деформация в первом слое в 1,35 раза меньше, во втором в 1,04 раза больше, в третьем в 1,03 раза меньше при больших в 4 раза нагрузках. Таким образом данная конструкция работает на пределе своих эксплуатационных возможностей и дальнейшее увеличение нагрузки не целесообразно при заданной форме сечения конструкции.

При одинаковом расходе материалов изменим форму сечения конструкции №8 на двутавровое (конструкция №9, рисунок 55), при этом в отличие от предыдущего случая, нагрузки увеличим не в 4 раза по сравнению с нагрузками (15), а в 7 раз (16)

$$\begin{aligned}
 t_{11} &= -10800 \text{ Н / м}, t_{12} = 1200 \text{ Н / м}^2, t_{21} = 0, t_{22} = 0, \\
 t_{31} &= 60000 \text{ Н / м}, t_{32} = 6000 \text{ Н / м}^2, t_{41} = 0, t_{42} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

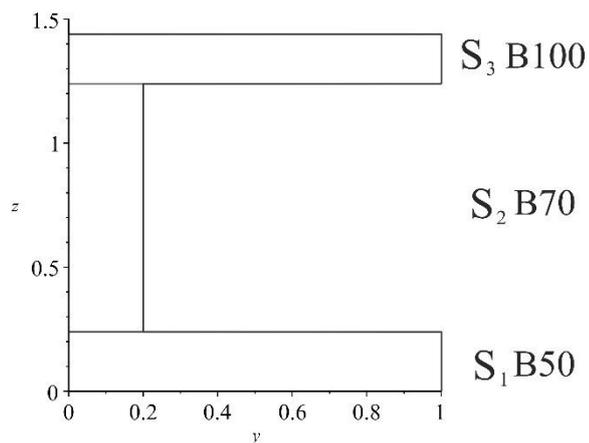


Рисунок 55 – Форма сечения конструкции № 9

Тогда решение примет вид, изображенный на рисунках 51-53.

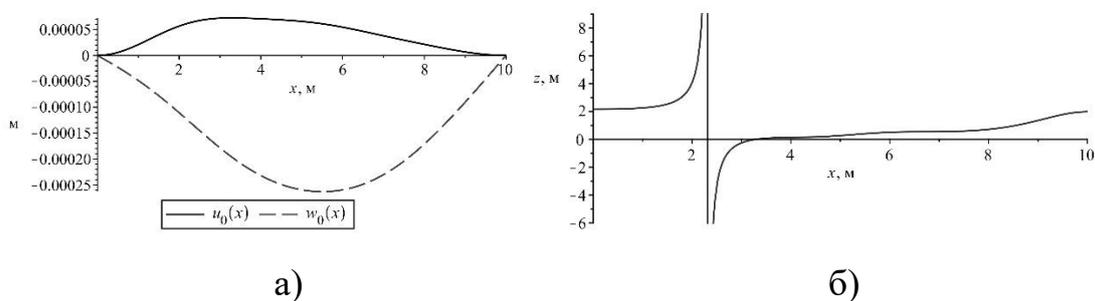


Рисунок 56 – Распределение а) компонентов вектора перемещений, б) нейтральной линии по длине стержня (конструкция №9)

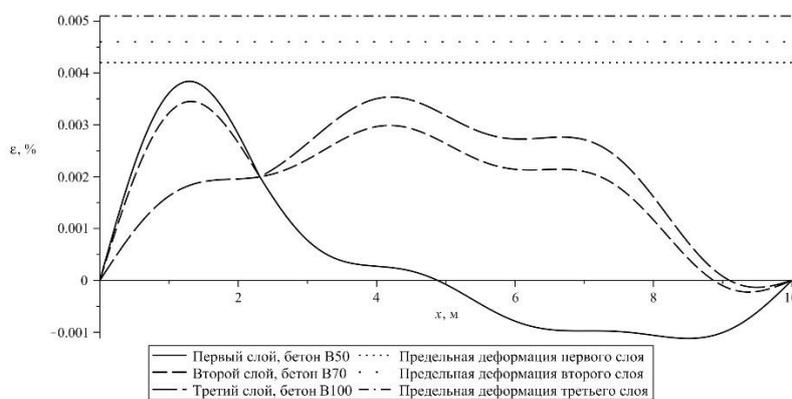


Рисунок 57 – Распределение деформации материалов на верхних контактных границах слоев по длине стержня (конструкция №9)

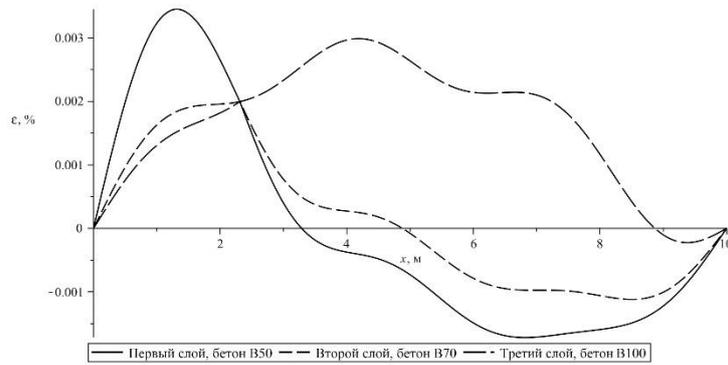


Рисунок 58 – Распределение деформации материалов на нижних контактных границах слоев по длине стержня (конструкция №9)

Как видно из полученных решений конструкция способна выдержать приложенные нагрузки.

Если заменим в конструкции №9 все материалы на бетоны марки В100, то получим конструкцию №10 (рисунок 59). Как показывают решения, изображенные на рис. 60-62, конструкция №10 способна выдержать нагрузки уже большие не в 7, а в 9 раз (17), по сравнению с нагрузками (15).

$$\begin{aligned}
 t_{11} &= -16200 \text{ н / м}, t_{12} = 1800 \text{ н / м}^2, t_{21} = 0, t_{22} = 0, \\
 t_{31} &= 90000 \text{ н / м}, t_{32} = 9000 \text{ н / м}^2, t_{41} = 0, t_{42} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

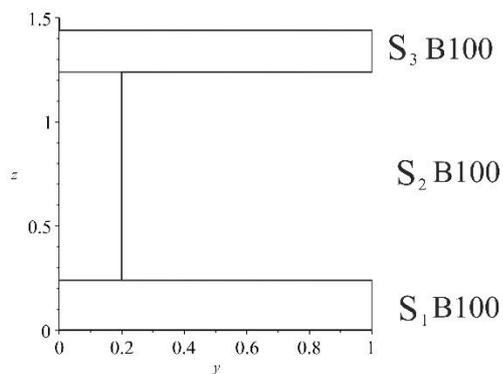


Рисунок 59 – Форма сечения конструкции № 10

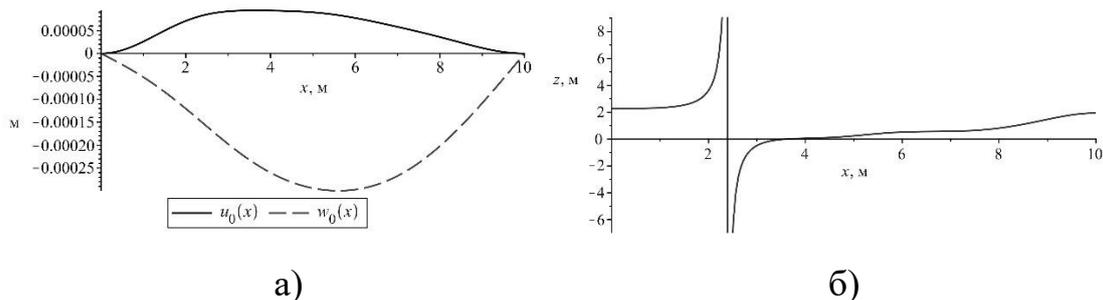


Рисунок 60 – Распределение а) компонентов вектора перемещений, б) нейтральной линии по длине стержня (конструкция №10)

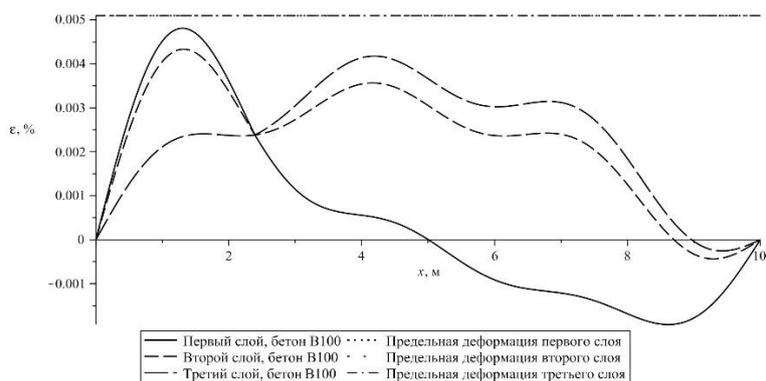


Рисунок 61 – Распределение деформации материалов на верхних контактных границах слоев по длине стержня (конструкция №10)

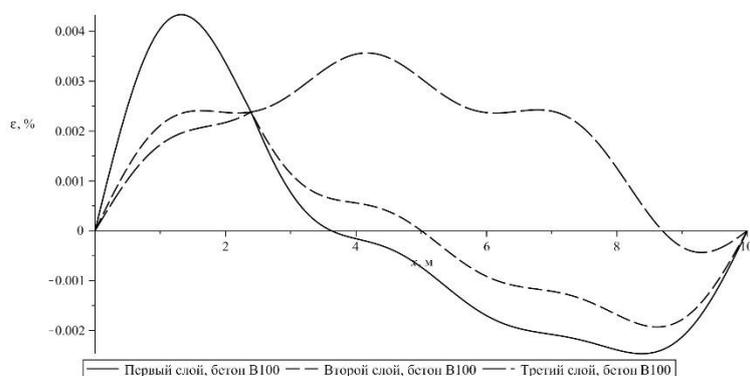


Рисунок 62 – Распределение деформации материалов на нижних контактных границах слоев по длине стержня (конструкция №10)

Дальнейшее увеличение несущей способности возможно при использовании фибробетонов. Если заменить в конструкции №10 бетон марки В100 на фибробетон (в таблице 3 - В128\*) и увеличить нагрузки не в 9 раз по сравнению в (15), а в 50 раз (18), получим решения, изображенные на рисунках 64-66.

$$\begin{aligned}
 t_{11} &= -90000 \text{ н / м}, t_{12} = 10000 \text{ н / м}^2, t_{21} = 0, t_{22} = 0, \\
 t_{31} &= 500000 \text{ н / м}, t_{32} = 50000 \text{ н / м}^2, t_{41} = 0, t_{42} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

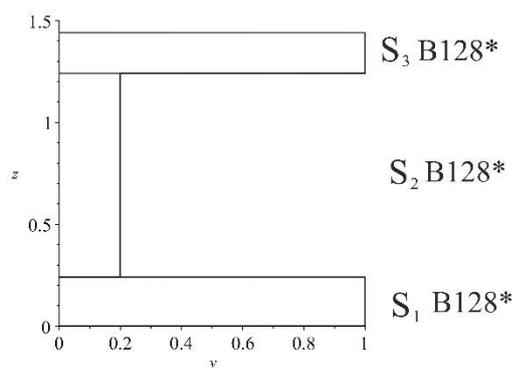


Рисунок 63 – Форма сечения конструкции № 11

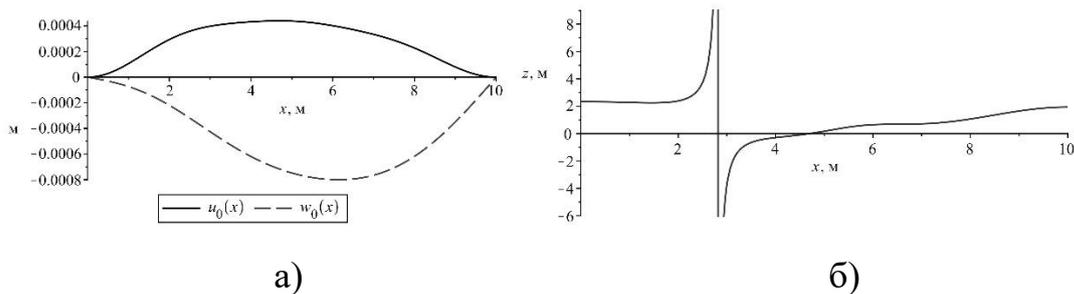


Рисунок 64 – Распределение а) компонентов вектора перемещений, б) нейтральной линии по длине стержня (конструкция №11)

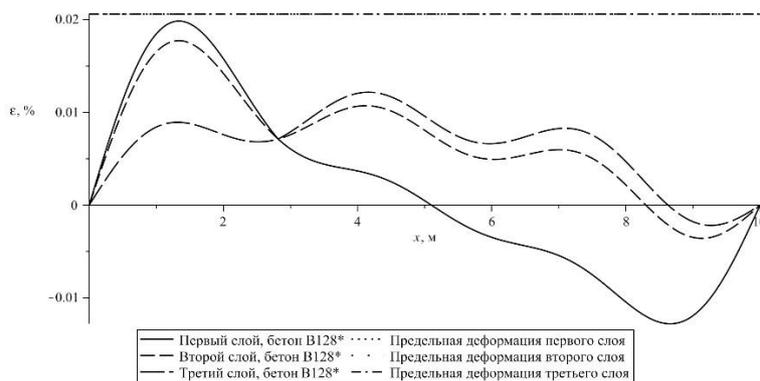


Рисунок 65 – Распределение деформации материалов на верхних контактных границах слоев по длине стержня (конструкция №11)

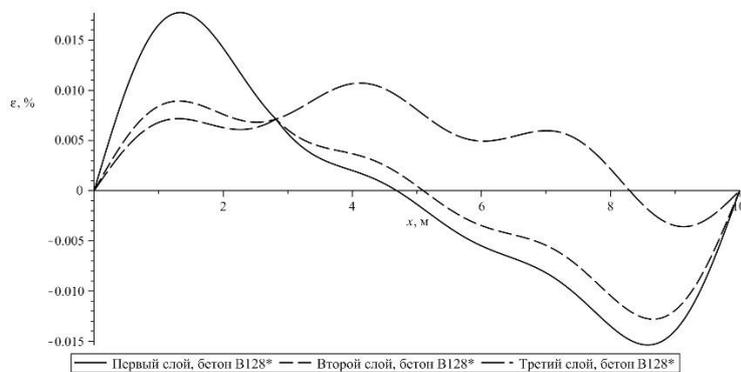


Рисунок 66 – Распределение деформации материалов на нижних контактных границах слоев по длине стержня (конструкция №11)

Из полученных решений видно, что рассматриваемая конструкция может выдержать нагрузки существенно большие, чем при используемые традиционных бетонов. При стоимости большей примерно в 2 раза [11] по сравнению с обычными марками бетонов, рассмотренные фибробетоны могут существенно повысить эксплуатационные характеристики проектируемых конструкций.

Таблица 5 – Значения максимальных продольных перемещений, прогибов и максимальных деформаций для каждого номера конструкции

№ конст рукци и	$g_x$ , м/с <sup>2</sup>	$g_z$ , м/с <sup>2</sup>	$u_{0m}$ , мм	$w_{0m}$ , мм	$\varepsilon_{m1}$ , %%	$\varepsilon_{m2}$ , %%	$\varepsilon_{m3}$ , %%	$\frac{\varepsilon_{m1}}{\varepsilon_{*1}^+}$ , %	$\frac{\varepsilon_{m2}}{\varepsilon_{*2}^+}$ , %	$\frac{\varepsilon_{m3}}{\varepsilon_{*3}^+}$ , %
1	0	-9,81	-0,078	-0,432	0,057	0,021	0,033	196	60	78
8	0	-9,81	-0,043	-0,357	0,042	0,022	0,032	100	47	62
9	0	-9,81	0	-0,263	0,038	0,035	0,035	90	76	68
10	0	-9,81	0	-0,300	0,048	0,043	0,042	94	84	82
11	0	-9,81	0	-0,800	0,199	0,177	0,122	96	85	59

Использование упрощенной методики расчета физических коэффициентов (11) по выражениям (14), используя только пределы прочности бетона при растяжении и сжатии и модуля упругости, вместо проведения достаточно трудозатратных экспериментов по построению реальных диаграмм растяжения и сжатия бетонов и последующему определению указанных коэффициентов, целесообразно, когда необходимо в короткие сроки провести расчеты конструкций из широкого спектра марок бетонов и фибробетонов.

Анализируя полученные решения, можно сделать вывод, что изменяя форму сечения стержня при фиксированных нагрузках и расходе материала можно существенно улучшить работоспособность конструкции и одним из важных факторов существенно влияющих на несущую способность является сила тяжести, пренебрежением которой при расчете данных задач может привести к серьезным ошибкам и неправильным выводам.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00038.

### **Библиографический список:**

1. Немировский Ю.В. Допредельное деформирование гибридных армированных бетонных конструкций // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2018. № 3(37). С. 26-37

2. Немировский Ю.В., Тихонов С.В. Предельное состояние бетонных и железобетонных стержней при сложном и продольно-поперечном изгибе // Вестник ПНИПУ. Механика. 2020. № 1. С. 60-73.

3. Маилян Л.Р., Иващенко Е.И. Расчет железобетонных элементов на основе действительных диаграмм деформирования материалов. Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовский гос. строит. ун-т, 2006. 222 с.

4. Горшков А.Г., Трошин В.Н., Шалашилин В.И. Сопротивление материалов: Учеб. пос. 2-е изд., испр. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 544 с.

5. Иванов В.Н. Вариационные принципы и методы решения задач теории упругости: Учеб. Пособие. М.: Изд-во РУДН, 2004. 176 с.

6. Голоскоков Д.П. Построение базиса для одномерных краевых задач в системах символьных вычислений // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. 2017. Вып. 1. С. 77-85

7. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.

8. Немировский Ю.В. Второе предельное состояние полиметаллических круглых и кольцевых пластин // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2015. № 1 (23). С. 189-195.

9. Немировский Ю.В. Второе предельное состояние однородных и композитных балок // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им. И. Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. 2009. № 1. С. 150-159

10. СП 63.13330.2012. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения. Актуализированная редакция СНиП 52-01-2003. 2013.

11. Каприелов С.С., Чилин И.А. Сверхвысокопрочный самоуплотняющийся фибробетон для монолитных конструкций // Вестник НИЦ Строительство. 2017. № 1 (12). С. 14-22.