УДК 539.313

К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ КРУГОВ НАПРЯЖЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКЕ

Бакушев Сергей Васильевич

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г.Пенза,

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Аннотация.

Для массивных тел, механическое поведение которых описывается уравнениями геометрически и физически нелинейной теории упругости В.В. Новожилова, рассматривается построение кругов напряжения (кругов Мора) в случае объёмного напряжённого состояния. Показано, что круги напряжений строятся в системе координат точек тела в состоянии после деформации. Установлена связь между напряжениями, действующими по граням элементарного параллелепипеда, выделенного в точке деформированного тела, и обобщёнными напряжениями, связанными с истинными напряжениями, действующими по граням косоугольного параллелепипеда, рёбра которого до деформации были параллельны осям декартовой системы координат. Показано, что для построения кругов напряжений в точке деформированного тела, механическое поведение которого описывается уравнениями нелинейной теории упругости В.В. Новожилова, необходимо в этой точке определить и напряжения, и деформации, и перемещения, то есть решить задачу геометрически и физически нелинейной теории упругости полностью.

Ключевые слова: объёмное наряжённое состояние, круг напряжений, главные напряжения, обобщённые напряжения, нелинейные деформации.

ON THE ISSUE OF EVALUATING THE STRENGTH AND SELECTION OF THE CROSS SECTION OF THE BENT ROD IN THE RESISTANCE OF MATERIALS

Bakushev Sergey Vasilevich
Penza State University of Architecture and Construction,Penza,
Doctor of Sciences, Professor of the department "Mechanics".

Abstract.

For massive bodies, the mechanical behavior of which is described by equations geometrically and physically nonlinear theory of elasticity of V.V. Novozhilov, the construction of voltage circles (circles of Mora) in case of a voluminous tense state is considered. It is shown that the circles of stresses are built in the system of coordinates of the points of the body in a state after deformation. A link has been established between the stresses acting on the edges of the elementary parallelepiped emanated at the point of the deformed body and the generalized tensions associated with the true stresses acting on the edges of the squint parallelepiped, whose ribs before deformation were parallel to the axials of the Cartesian coordinate system. It is shown that in order to build circles of tension at the point of a deformed body, the mechanical behavior of which is described by the equations of non-linear theory of elasticity of V.V. Novozhilov, it is necessary at this point to determine both tensions, deformation, and movement that is to solve the problem of geometrically and physically nonlinear theory of elasticity completely.

Keywords: 3d dressed state, circle of tensions, main tensions, generalized tensions, non-linear deformations.

Введение.

Анализ напряжённого состояния в точке, то есть определение нормальных и касательных напряжений на всевозможных площадках, проходящих через заданную точку, можно выполнить графически при помощи кругов напряжений, предложенных учёным-механиком О. Мором [1, 2, 3, 4]. Теоретические основы существования кругов напряжений в геометрически и физически нелинейной механике В.В. Новожилова изложены в работе [5]. Новожилов описывает круги напряжений в общем случае трёхмерного напряжённого состояния. При этом круги напряжений определяются через главные напряжения $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ в системе координат точек тела после деформации (рис. 1).

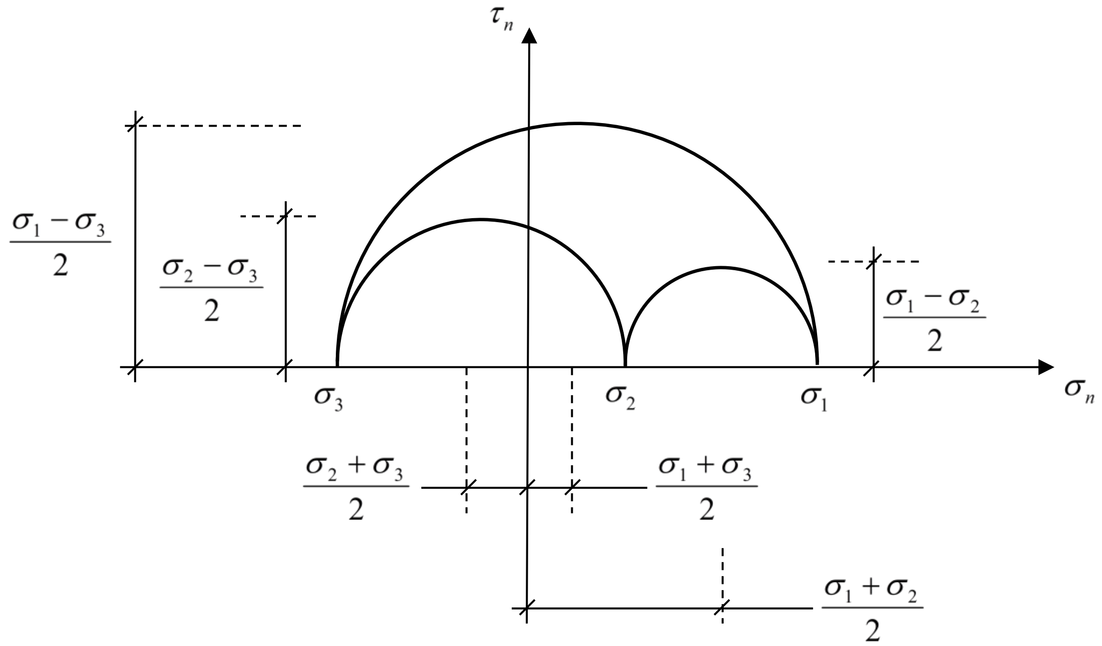

Рисунок 1 - Круги напряжений

Определение главных напряжений.

Главные напряжения σ_1, σ_2, σ_3 в системе координат точек тела после деформации определяются по формулам [5, 6]:

$$\sigma_1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{\sigma}\sin\left(\psi + \frac{2}{3}\pi\right) + \frac{1}{3}\sigma;$$

$$\sigma_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{\sigma}\sin(\psi) + \frac{1}{3}\sigma; \qquad (1)$$

$$\sigma_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{\sigma}\sin\left(\psi + \frac{4}{3}\pi\right) + \frac{1}{3}\sigma.$$

Здесь σ, $\bar{\sigma}$, ψ – вспомогательные инварианты тензора напряжений в системе координат точек тела после деформации:

$$\sigma = \sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta} + \sigma_{\zeta\zeta};$$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{\left(\sigma_{\xi\xi} - \sigma_{\eta\eta}\right)^2 + \left(\sigma_{\eta\eta} - \sigma_{\zeta\zeta}\right)^2 + \left(\sigma_{\zeta\zeta} - \sigma_{\xi\xi}\right)^2 + 6\left(\sigma_{\xi\eta}^2 + \sigma_{\eta\zeta}^2 + \sigma_{\zeta\xi}^2\right)}; \qquad (2)$$

$$\psi = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{\sigma_3\sqrt{3}}{2\bar{\sigma}^3}\right) = \mathrm{arctg}\left[\frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{3}\left(\sigma_1 - \sigma_3\right)}\right]; \quad -\frac{\pi}{6} \le \psi \le \frac{\pi}{6},$$

причём

$$\sigma_3 = -3\begin{vmatrix} \sigma_{\xi\xi} - \frac{1}{3}\sigma & \sigma_{\xi\eta} & \sigma_{\xi\zeta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \sigma_{\eta\eta} - \frac{1}{3}\sigma & \sigma_{\eta\zeta} \\ \sigma_{\zeta\xi} & \sigma_{\zeta\eta} & \sigma_{\zeta\zeta} - \frac{1}{3}\sigma \end{vmatrix}.$$

Тензор напряжений в декартовой прямоугольной системе координат $O'X'Y'Z'$, заданной в деформированном теле (после деформации) имеет вид:

$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} & \sigma_{\xi\zeta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \varepsilon_{\eta\eta} & \sigma_{\eta\zeta} \\ \sigma_{\zeta\xi} & \sigma_{\zeta\eta} & \varepsilon_{\zeta\zeta} \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Здесь $\sigma_{\xi\xi}$, $\sigma_{\xi\eta} = \sigma_{\eta\xi}$, $\sigma_{\xi\zeta} = \sigma_{\zeta\xi}$, $\sigma_{\eta\eta}$, $\sigma_{\eta\zeta} = \sigma_{\zeta\eta}$, $\sigma_{\zeta\zeta}$ – проекции напряжений, действующих по граням элементарного параллелепипеда с

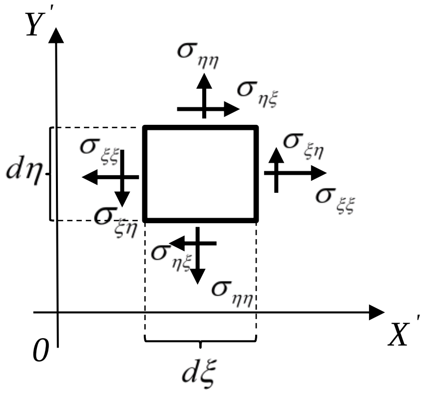

Рисунок 2 - Напряжения на гранях элементарного параллелепипеда в теле после деформации в проекции на плоскость $OX'Y'$

рёбрами, параллельными осям X', Y' и Z', выделенного в точке M^* деформированного тела, на оси декартовой системы координат $O'X'Y'Z'$ (рис. 2)[1]; ξ, η и ζ – декартовы координаты точек тела после его деформации.

Тензор напряжения, определённый в декартовой системе координат точек тела до деформации $OXYZ$ имеет вид:

$$\mathbf{T}_\sigma^* = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^* & \sigma_{xy}^* & \sigma_{xz}^* \\ \sigma_{yx}^* & \sigma_{yy}^* & \sigma_{yz}^* \\ \sigma_{zx}^* & \sigma_{zy}^* & \sigma_{zz}^* \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Здесь x, y, z – криволинейные координаты, являющиеся декартовыми координатами для тела в его исходном положении;

σ_{xx}^*, σ_{yy}^*, σ_{zz}^*, $\sigma_{xy}^* = \sigma_{yx}^*$, $\sigma_{yz}^* = \sigma_{zy}^*$, $\sigma_{zx}^* = \sigma_{xz}^*$ - так называемые обобщённые напряжения, связанные с истинными напряжениями σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}, $\sigma_{xy} \neq \sigma_{yx}$, $\sigma_{yz} \neq \sigma_{zy}$, $\sigma_{zx} \neq \sigma_{xz}$, действующими по граням косоугольного

[1] На рис. 2, для наглядности, показан тонкий элементарный параллелепипед с единичной толщиной в направлении оси Z'.

параллелепипеда в направлении единичных ортов $\bar{i}_x, \bar{i}_y$ и $\bar{i}_z$, задающих ориентацию граней косоугольного параллелепипеда (рис. 3)[2], рёбра которого до деформации были параллельны осям декартовой системы координат $OXYZ$, соотношениями:

$$\sigma^*_{xx} = \frac{A^*_x}{A_x}\cdot\frac{\sigma_{xx}}{1+E_x}; \quad \sigma^*_{xy} = \frac{A^*_x}{A_x}\cdot\frac{\sigma_{xy}}{1+E_y}; \quad \sigma^*_{xz} = \frac{A^*_x}{A_x}\cdot\frac{\sigma_{xz}}{1+E_z};$$
$$\sigma^*_{yx} = \frac{A^*_y}{A_y}\cdot\frac{\sigma_{yx}}{1+E_x}; \quad \sigma^*_{yy} = \frac{A^*_y}{A_y}\cdot\frac{\sigma_{yy}}{1+E_y}; \quad \sigma^*_{yz} = \frac{A^*_y}{A_y}\cdot\frac{\sigma_{yz}}{1+E_z}; \qquad (5)$$
$$\sigma^*_{zx} = \frac{A^*_z}{A_z}\cdot\frac{\sigma_{zx}}{1+E_x}; \quad \sigma^*_{zy} = \frac{A^*_z}{A_z}\cdot\frac{\sigma_{zy}}{1+E_y}; \quad \sigma^*_{zz} = \frac{A^*_z}{A_z}\cdot\frac{\sigma_{zz}}{1+E_z}.$$

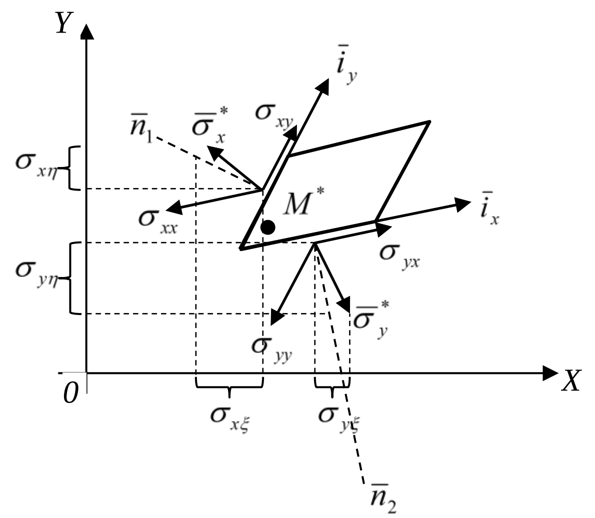

Рисунок 3 - Напряжения на гранях косоугольного параллелепипеда в теле после деформации в проекции на плоскость OXY

В формулах (5) E_x, E_y, E_z – относительное удлинение волокон сплошной среды, параллельных до деформации осям декартовой системы координат:

$$E_x = \sqrt{1+2\varepsilon^*_{xx}} - 1; \quad E_y = \sqrt{1+2\varepsilon^*_{yy}} - 1; \quad E_z = \sqrt{1+2\varepsilon^*_{zz}} - 1. \qquad (6)$$

[2] На рис. 3, для наглядности, показан тонкий элементарный параллелепипед с единичной толщиной в направлении оси Z'.

$\frac{A_x^*}{A_x}$, $\frac{A_y^*}{A_y}$, $\frac{A_z^*}{A_z}$ – отношение площадей элементарных площадок, выделенных в сплошной среде после деформации, к их площадям до деформации, которые до деформации были перпендикулярны осям декартовой системы координат $OXYZ$:

$$A_x^* = A_x\sqrt{\left(1+2\varepsilon_{yy}^*\right)\left(1+2\varepsilon_{zz}^*\right)-\varepsilon_{yz}^{*2}},$$
$$A_y^* = A_y\sqrt{\left(1+2\varepsilon_{zz}^*\right)\left(1+2\varepsilon_{xx}^*\right)-\varepsilon_{zx}^{*2}}, \qquad (7)$$
$$A_z^* = A_z\sqrt{\left(1+2\varepsilon_{xx}^*\right)\left(1+2\varepsilon_{yy}^*\right)-\varepsilon_{xy}^{*2}}.$$

Главные обобщённые напряжения $\sigma_1^* \ge \sigma_2^* \ge \sigma_3^*$ в системе координат точек тела до деформации определяются по формулам [5, 6]:

$$\sigma_1^* = \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{\sigma}^*\sin\left(\psi^* + \frac{2}{3}\pi\right) + \frac{1}{3}\sigma^*;$$
$$\sigma_2^* = \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{\sigma}^*\sin\left(\psi^*\right) + \frac{1}{3}\sigma^*; \qquad (8)$$
$$\sigma_3^* = \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{\sigma}^*\sin\left(\psi^* + \frac{4}{3}\pi\right) + \frac{1}{3}\sigma^*.$$

Здесь σ^*, $\bar{\sigma}^*$, ψ^* – вспомогательные инварианты тензора обобщённых напряжений:

$$\sigma^* = \sigma_{xx}^* + \sigma_{yy}^* + \sigma_{zz}^*;$$
$$\bar{\sigma}^* = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{\left(\sigma_{xx}^*-\sigma_{yy}^*\right)^2+\left(\sigma_{yy}^*-\sigma_{zz}^*\right)^2+\left(\sigma_{zz}^*-\sigma_{xx}^*\right)^2+6\left(\sigma_{xy}^{*2}+\sigma_{yz}^{*2}+\sigma_{zx}^{*2}\right)}; \qquad (9)$$
$$\psi^* = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{\sigma_3^*\sqrt{3}}{2\bar{\sigma}^{*3}}\right) = \operatorname{arctg}\left[\frac{2\sigma_2^*-\sigma_1^*-\sigma_3^*}{\sqrt{3}\left(\sigma_1^*-\sigma_3^*\right)}\right]; \quad -\frac{\pi}{6} \le \psi^* \le \frac{\pi}{6},$$

причём

$$\sigma_3^* = -3\begin{vmatrix} \sigma_{xx}^* - \frac{1}{3}\sigma^* & \sigma_{xy}^* & \sigma_{xz}^* \\ \sigma_{yx}^* & \sigma_{yy}^* - \frac{1}{3}\sigma^* & \sigma_{yz}^* \\ \sigma_{zx}^* & \sigma_{zy}^* & \sigma_{zz}^* - \frac{1}{3}\sigma^* \end{vmatrix}.$$

Связь напряжений с обобщёнными напряжениями.

Выразим напряжения, действующие по граням элементарного параллелепипеда, выделенного в деформированном теле, с рёбрами параллельными осям декартовой системы координат $O'X'Y'Z'$, через обобщённые напряжения.

Уравнения, выражающие вектора обобщённых напряжений $\bar{\sigma}_x^*$, $\bar{\sigma}_y^*$ и $\bar{\sigma}_z^*$, действующих на площадках, которые до деформации имели нормали, совпадающие по направлению с осями декартовой системы координат $OXYZ$, через вектора напряжений $\bar{\sigma}_\xi$, $\bar{\sigma}_\eta$ и $\bar{\sigma}_\zeta$, действующих на площадках перпендикулярных осям *X, Y* и *Z* деформированного тела имеют вид [5, 6]:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\sigma}_x^* &= \alpha_{11}\bar{\sigma}_\xi + \alpha_{12}\bar{\sigma}_\eta + \alpha_{13}\bar{\sigma}_\zeta; \\ \bar{\sigma}_y^* &= \alpha_{21}\bar{\sigma}_\xi + \alpha_{22}\bar{\sigma}_\eta + \alpha_{23}\bar{\sigma}_\zeta; \\ \bar{\sigma}_z^* &= \alpha_{31}\bar{\sigma}_\xi + \alpha_{32}\bar{\sigma}_\eta + \alpha_{33}\bar{\sigma}_\zeta. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Здесь

$$\alpha_{11} = \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}; \quad \alpha_{12} = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y} - \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial u}{\partial y};$$

$$\alpha_{13} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} - \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial z}; \quad \alpha_{21} = \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} - \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\alpha_{22} = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}; \quad \alpha_{23} = \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x} - \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial z};$$

$$\alpha_{31} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} - \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial w}{\partial x}; \quad \alpha_{32} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} - \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial w}{\partial y};$$

$$\alpha_{33} = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Решая систему (10) методом Крамера, выразим напряжения $\bar{\sigma}_\xi$, $\bar{\sigma}_\eta$ и $\bar{\sigma}_\zeta$ через обобщённые напряжения $\bar{\sigma}_x^*$, $\bar{\sigma}_y^*$ и $\bar{\sigma}_z^*$ [7]:

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\sigma}_\xi &= \frac{1}{\Delta}\Big[(\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{23}\alpha_{32})\bar{\sigma}_x^* + (\alpha_{13}\alpha_{32}-\alpha_{12}\alpha_{33})\bar{\sigma}_y^* + (\alpha_{12}\alpha_{23}-\alpha_{13}\alpha_{22})\bar{\sigma}_z^*\Big];\\
\bar{\sigma}_\eta &= \frac{1}{\Delta}\Big[(\alpha_{23}\alpha_{31}-\alpha_{21}\alpha_{33})\bar{\sigma}_x^* + (\alpha_{11}\alpha_{33}-\alpha_{13}\alpha_{31})\bar{\sigma}_y^* + (\alpha_{13}\alpha_{21}-\alpha_{11}\alpha_{23})\bar{\sigma}_z^*\Big];\\
\bar{\sigma}_\zeta &= \frac{1}{\Delta}\Big[(\alpha_{21}\alpha_{32}-\alpha_{22}\alpha_{31})\bar{\sigma}_x^* + (\alpha_{12}\alpha_{31}-\alpha_{11}\alpha_{32})\bar{\sigma}_y^* + (\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21})\bar{\sigma}_z^*\Big].
\end{aligned}\right\}$$

(11)

Здесь

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Уравнения (11) записаны в точке M^* деформированного тела. Проецируя эти векторные уравнения на оси *X*, *Y* и *Z*, получаем окончательно:

$$\sigma_{\xi\xi} = \frac{1}{\Delta}\Big[(\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{23}\alpha_{32})\sigma_{x\xi}^* + (\alpha_{13}\alpha_{32}-\alpha_{12}\alpha_{33})\sigma_{y\xi}^* + (\alpha_{12}\alpha_{23}-\alpha_{13}\alpha_{22})\sigma_{z\xi}^*\Big];$$

$$\sigma_{\xi\eta} = \frac{1}{\Delta}\Big[(\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{23}\alpha_{32})\sigma_{x\eta}^* + (\alpha_{13}\alpha_{32}-\alpha_{12}\alpha_{33})\sigma_{y\eta}^* + (\alpha_{12}\alpha_{23}-\alpha_{13}\alpha_{22})\sigma_{z\eta}^*\Big];$$

$$\sigma_{\xi\zeta} = \frac{1}{\Delta}\Big[(\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{23}\alpha_{32})\sigma_{x\zeta}^* + (\alpha_{13}\alpha_{32}-\alpha_{12}\alpha_{33})\sigma_{y\zeta}^* + (\alpha_{12}\alpha_{23}-\alpha_{13}\alpha_{22})\sigma_{z\zeta}^*\Big];$$

$$\sigma_{\eta\xi} = \frac{1}{\Delta}\Big[(\alpha_{23}\alpha_{31}-\alpha_{21}\alpha_{33})\sigma_{x\xi}^* + (\alpha_{11}\alpha_{33}-\alpha_{13}\alpha_{31})\sigma_{y\xi}^* + (\alpha_{13}\alpha_{21}-\alpha_{11}\alpha_{23})\sigma_{z\xi}^*\Big];$$

$$\sigma_{\eta\eta} = \frac{1}{\Delta}\Big[(\alpha_{23}\alpha_{31}-\alpha_{21}\alpha_{33})\sigma_{x\eta}^* + (\alpha_{11}\alpha_{33}-\alpha_{13}\alpha_{31})\sigma_{y\eta}^* + (\alpha_{13}\alpha_{21}-\alpha_{11}\alpha_{23})\sigma_{z\eta}^*\Big];$$

$$\sigma_{\eta\zeta} = \frac{1}{\Delta}\Big[(\alpha_{23}\alpha_{31}-\alpha_{21}\alpha_{33})\sigma_{x\zeta}^* + (\alpha_{11}\alpha_{33}-\alpha_{13}\alpha_{31})\sigma_{y\zeta}^* + (\alpha_{13}\alpha_{21}-\alpha_{11}\alpha_{23})\sigma_{z\zeta}^*\Big];$$

$$\sigma_{\zeta\xi} = \frac{1}{\Delta}\Big[(\alpha_{21}\alpha_{32}-\alpha_{22}\alpha_{31})\sigma_{x\xi}^* + (\alpha_{12}\alpha_{31}-\alpha_{11}\alpha_{32})\sigma_{y\xi}^* + (\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21})\sigma_{z\xi}^*\Big];$$

$$\sigma_{\zeta\eta} = \frac{1}{\Delta}\Big[(\alpha_{21}\alpha_{32}-\alpha_{22}\alpha_{31})\sigma_{x\eta}^* + (\alpha_{12}\alpha_{31}-\alpha_{11}\alpha_{32})\sigma_{y\eta}^* + (\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21})\sigma_{z\eta}^*\Big];$$

$$\sigma_{\zeta\zeta} = \frac{1}{\Delta}\Big[(\alpha_{21}\alpha_{32}-\alpha_{22}\alpha_{31})\sigma_{x\zeta}^* + (\alpha_{12}\alpha_{31}-\alpha_{11}\alpha_{32})\sigma_{y\zeta}^* + (\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21})\sigma_{z\zeta}^*\Big].$$

(12)

Здесь напряжения $\sigma^*_{x\xi},\ \sigma^*_{y\xi},\ \sigma^*_{z\xi},\ \sigma^*_{x\eta},\ \sigma^*_{y\eta},\ \sigma^*_{z\eta},\ \sigma^*_{x\zeta},\ \sigma^*_{y\zeta},\ \sigma^*_{z\zeta}$, определяющие проекции обобщённых напряжений $\bar{\sigma}^*_x$, $\bar{\sigma}^*_y$ и $\bar{\sigma}^*_z$, действующих на площадках, которые до деформации имели нормали, совпадающие по направлению с осями декартовой системы координат *OXYZ*, на эти оси, выражаются через обобщённые напряжения $\sigma^*_{xx},\ \sigma^*_{yx},\ \sigma^*_{zx},\ \sigma^*_{xy},\ \sigma^*_{yy},\ \sigma^*_{zy},\ \sigma^*_{xz},\ \sigma^*_{yz},\ \sigma^*_{zz}$ по формулам [5, 6]:

$$\begin{aligned}
\sigma^*_{x\xi} &= \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\sigma^*_{xx} + \frac{\partial u}{\partial y}\sigma^*_{xy} + \frac{\partial u}{\partial z}\sigma^*_{xz};\\
\sigma^*_{y\xi} &= \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\sigma^*_{yx} + \frac{\partial u}{\partial y}\sigma^*_{yy} + \frac{\partial u}{\partial z}\sigma^*_{yz};\\
\sigma^*_{z\xi} &= \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\sigma^*_{zx} + \frac{\partial u}{\partial y}\sigma^*_{zy} + \frac{\partial u}{\partial z}\sigma^*_{zz};\\
\sigma^*_{x\eta} &= \frac{\partial v}{\partial x}\sigma^*_{xx} + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\sigma^*_{xy} + \frac{\partial v}{\partial z}\sigma^*_{xz};\\
\sigma^*_{y\eta} &= \frac{\partial v}{\partial x}\sigma^*_{yx} + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\sigma^*_{yy} + \frac{\partial v}{\partial z}\sigma^*_{yz};\\
\sigma^*_{z\eta} &= \frac{\partial v}{\partial x}\sigma^*_{zx} + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\sigma^*_{zy} + \frac{\partial v}{\partial z}\sigma^*_{zz};\\
\sigma^*_{x\zeta} &= \frac{\partial w}{\partial x}\sigma^*_{xx} + \frac{\partial w}{\partial y}\sigma^*_{xy} + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\sigma^*_{xz};\\
\sigma^*_{y\zeta} &= \frac{\partial w}{\partial x}\sigma^*_{yx} + \frac{\partial w}{\partial y}\sigma^*_{yy} + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\sigma^*_{yz};\\
\sigma^*_{z\zeta} &= \frac{\partial w}{\partial x}\sigma^*_{zx} + \frac{\partial w}{\partial y}\sigma^*_{zy} + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\sigma^*_{zz}.
\end{aligned} \tag{13}$$

Поскольку в уравнения (12) кроме обобщённых напряжений входят ещё и перемещения, то для построения кругов напряжений в точке деформированного тела необходимо в этой точке полностью определить напряжённо-деформированное состояние, то есть решить задачу геометрически и физически нелинейной теории упругости полностью.

Физические уравнения и уравнения равновесия.

Физические уравнения в нелинейной теории упругости В.В. Новожилова устанавливают связь между обобщёнными напряжениями и нелинейными деформациями. Для случая подобия девиаторов обобщённых напряжения и нелинейных деформаций, то есть когда фаза подобия девиаторов равна нулю, физические уравнения имеют вид [5, 6]:

$$\sigma_{ij}^* - \frac{1}{3}\sigma^*\delta_{ij} = 2G^*\left(\gamma_{ij} - \frac{1}{3}e^*\delta_{ij}\right); \quad i, j = x, y, z. \tag{14}$$

Здесь δ_{ij} – символ Кронекера; $K^* = \dfrac{\sigma^*}{3e^*}$; $G^* = \dfrac{\bar{\sigma}^*}{2\bar{e}^*}$.

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} \varepsilon_{ij}^*, & \text{если } i = j; \\ \dfrac{1}{2}\varepsilon_{ij}^*, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Смешанные инварианты K^* и G^* можно рассматривать либо как функции инвариантов тензора нелинейных деформаций: $K^* = K^*\left(e^*, \bar{e}^*\right)$; $G^* = G^*\left(e^*, \bar{e}^*\right)$, либо как функции инвариантов тензора обобщённых напряжений: $K^* = K^*\left(\sigma^*, \bar{\sigma}^*\right)$; $G^* = G^*\left(\sigma^*, \bar{\sigma}^*\right)$.

В соотношениях (14) величины $\gamma_{i,j}$ - это компоненты тензора нелинейных деформаций:

$$\mathbf{T}_\varepsilon^* = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^* & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy}^* & \frac{1}{2}\varepsilon_{xz}^* \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{yx}^* & \varepsilon_{yy}^* & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz}^* \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{zx}^* & \frac{1}{2}\varepsilon_{zy}^* & \varepsilon_{zz}^* \end{pmatrix} \tag{15}$$

определяются с учётом квадратичных слагаемых:

$$\varepsilon_{xx}^* = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right];$$

$$\varepsilon_{yy}^* = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right];$$

$$\varepsilon_{zz}^* = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right];$$

$$\varepsilon_{xy}^* = \varepsilon_{yx}^* = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}; \qquad (16)$$

$$\varepsilon_{yz}^* = \varepsilon_{zy}^* = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y};$$

$$\varepsilon_{zx}^* = \varepsilon_{xz}^* = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Главные деформации вычисляются по формулам [5, 6]:

$$\varepsilon_1^* = \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{e}^* \sin\left(\phi^* + \frac{2}{3}\pi\right) + \frac{1}{3}e^*;$$

$$\varepsilon_2^* = \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{e}^* \sin\left(\phi^*\right) + \frac{1}{3}e^*; \qquad (17)$$

$$\varepsilon_3^* = \frac{2}{\sqrt{3}}\bar{e}^* \sin\left(\phi^* + \frac{4}{3}\pi\right) + \frac{1}{3}e^*.$$

Здесь e^*, $\bar{\mathrm{e}}^*$, ϕ^* – вспомогательные инварианты тензора напряжений (15):

$$e^* = \varepsilon_{xx}^* + \varepsilon_{yy}^* + \varepsilon_{zz}^*;$$

$$\bar{e}^* = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{\left(\varepsilon_{xx}^* - \varepsilon_{yy}^*\right)^2 + \left(\varepsilon_{yy}^* - \varepsilon_{zz}^*\right)^2 + \left(\varepsilon_{zz}^* - \varepsilon_{xx}^*\right)^2 + \frac{3}{2}\left(\varepsilon_{xy}^{*2} + \varepsilon_{yz}^{*2} + \varepsilon_{zx}^{*2}\right)}; \qquad (18)$$

$$\phi^* = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{e_3^*\sqrt{3}}{2\bar{e}^{*3}}\right) = \mathrm{arctg}\left[\frac{2\varepsilon_2^* - \varepsilon_1^* - \varepsilon_3^*}{\sqrt{3}\left(\varepsilon_1^* - \varepsilon_3^*\right)}\right]; \quad -\frac{\pi}{6} \le \phi^* \le \frac{\pi}{6},$$

причём

$$e_3^* = -3\begin{vmatrix} \varepsilon_{xx}^* - \frac{1}{3}e^* & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy}^* & \frac{1}{2}\varepsilon_{xz}^* \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{yx}^* & \varepsilon_{yy}^* - \frac{1}{3}e^* & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz}^* \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{zx}^* & \frac{1}{2}\varepsilon_{zy}^* & \varepsilon_{zz}^* - \frac{1}{3}e^* \end{vmatrix}.$$

Уравнения равновесия в нелинейной теории упругости В.В.Новожилова устанавливают функциональные зависимости между нелинейными деформациями и обобщёнными напряжениями [1, 2]. При этом дифференциальные уравнения равновесия, выражающие условия равенства нулю главного вектора всех сил, действующих на объёмный элемент деформированного тела, путём проектирования этих сил на оси декартовой системы координат, направления которых не изменяются при деформации, имеют вид [1,2]:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\sigma^*_{xx}+\frac{\partial u}{\partial y}\sigma^*_{xy}+\frac{\partial u}{\partial z}\sigma^*_{xz}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\sigma^*_{yx}+\frac{\partial u}{\partial y}\sigma^*_{yy}+\right.\\
\left.+\frac{\partial u}{\partial z}\sigma^*_{yz}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\sigma^*_{zx}+\frac{\partial u}{\partial y}\sigma^*_{zy}+\frac{\partial u}{\partial z}\sigma^*_{zz}\right]+DF_\xi=0;\\
\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\sigma^*_{xx}+\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\sigma^*_{xy}+\frac{\partial v}{\partial z}\sigma^*_{xz}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\sigma^*_{yx}+\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\sigma^*_{yy}+\right.\\
\left.+\frac{\partial v}{\partial z}\sigma^*_{yz}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\sigma^*_{zx}+\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\sigma^*_{zy}+\frac{\partial v}{\partial z}\sigma^*_{zz}\right]+DF_\eta=0;\\
\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\sigma^*_{xx}+\frac{\partial w}{\partial y}\sigma^*_{xy}+\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\sigma^*_{xz}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\sigma^*_{yx}+\frac{\partial w}{\partial y}\sigma^*_{yy}+\right.\\
\left.+\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\sigma^*_{yz}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial w}{\partial x}\sigma^*_{zx}+\frac{\partial w}{\partial y}\sigma^*_{zy}+\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\sigma^*_{zz}\right]+DF_\zeta=0.
\end{gathered}
\tag{19}
$$

Здесь F_ξ, F_η, F_ζ – проекции объёмной силы на оси декартовой системы координат *X, Y, Z* в точке M^* деформированного тела; D – отношение объёма элемента тела после деформации к его объёму до деформации.

$$
D=\begin{vmatrix}
1+\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z}\\
\dfrac{\partial v}{\partial x} & 1+\dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z}\\
\dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & 1+\dfrac{\partial w}{\partial z}
\end{vmatrix}. \tag{20}
$$

В дифференциальных уравнениях (19) положения точек деформированного тела определяются не декартовыми координатами ξ, η и ζ, а криволинейными координатами x, y и z (которые являются декартовыми координатами для тела в его исходном положении).

К системе дифференциальных уравнений (19) необходимо добавить ещё условия на поверхности тела, на чём мы останавливаться не будем, так как условия на поверхности тела определяются формой тела и действующими внешними нагрузками.

Заключение.

Представленные в статье результаты могут быть использованы при анализе напряжённого состояния в точке деформированного тела, механическое поведение которого описывается уравнениями геометрически и физически нелинейной теории упругости В.В. Новожилова, с использованием кругов напряжений, строящихся в системе координат точек тела до деформации.

Библиографический список:

1. O.Mohr. Zivilingenieur, 1882., p. 113.
2. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости: Пер. с англ. / Под ред. Г.С. Шапиро. 2-е изд. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979, 560 с.
3. Филин А.П. Прикладная механика твёрдого деформируемого тела. М.: "Наука". т. 1, 1975., 832 с.
4. Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Справочное пособие. Киев: Наук. думка, 1981. 496 с.
5. Новожилов В.В. Теория упругости. Судпромгиз., 1958г. 370 с.
6. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. Изд. 2-е, стереотипное. М.: ЕдиториалУРСС, 2003. 208 с.

7. Бакушев С.В. О напряжениях в нелинейной теории упругости В.В. Новожилова. Современная наука: теория, методология, практика. Материалы I-ой всероссийской (национальной) НТК, Тамбов, 26-27 ноября 2019 г. С.166-171.