

УДК 624.04

СТАТИЧЕСКИЙ И КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КОНСОЛЬНОЙ ФЕРМЫ С ДВОЙНОЙ РЕШЕТКОЙ

Михаил Николаевич Кирсанов,

Национальный исследовательский университет "МЭИ", г. Москва

*доктор физико-математических наук, профессор кафедры робототехники,
мехатроники, динамики и прочности машин.*

Аннотация

Получена аналитическая зависимость прогиба консольной фермы с параллельными поясами от числа панелей. Показывается что при определенном числе панелей определитель системы уравнений равновесия узлов вырождается. Приводится соответствующая схема возможных скоростей узлов. Искомая формула для прогиба получается индуктивным обобщением ряда решений для ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей. Коэффициенты формулы получаются как решения однородных линейных рекуррентных уравнений. В решении используется система символьной математики Maple. Для вычисления прогиба используется формула Максвелла-Мора. Построены графики полученных решений.

Ключевые слова: ферма, индукция, Maple, консоль, прогиб.

STATIC AND KINEMATIC ANALYSIS OF A DOUBLE-LATTICE CANTILEVER TRUSS

Mikhail Nikolayevich Kirsanov,

National Research University "MPEI", Moscow

*Doctor of Sciences, Professor of the department "Robotics, mechatronics, dynamics
and strength of machines".*

Abstract

The analytical dependence of the deflection of a cantilever truss with parallel belts on the number of panels is obtained. It is shown that for a certain number of

panels, the determinant of the system of equilibrium equations of nodes degenerates. The corresponding diagram of possible speeds is given. The desired deflection formula is obtained by an inductive generalization of a number of solutions for trusses with a consistently increasing number of panels. The coefficients of the formula are obtained as solutions of homogeneous linear recurrent equations. The solution uses the Maple system of symbolic mathematics. The Maxwell-Mohr's formula is used to calculate the deflection. Graphs of the obtained solutions are constructed.

Keywords: truss, induction, Maple, console, deflection.

Введение. Строительные конструкции на прочность, жесткость, устойчивость с успехом рассчитываются в стандартных пакетах, большинство из которых основано на методе конечных элементов [1-6]. Аналитические решения редки [7] и, как правило, применимы к регулярным конструкциям [8,9]. Метод индукции — наиболее распространенный метод получения решений для ферм [10,11]. В этом методе существенно используются операторы символьной математики (Maple, Mathematica, Derive). Так получен ряд формул для пространственных [12, 13] и плоских [14-19] ферм.

Схема фермы. Плоская ферма консольного типа имеет высоту $2h$ и длину $L = an$ (рис. 1). Число стержней в ферме $n_R = 4(n + 1)$. В это число входят и четыре стержня, моделирующие опоры, одна из которых неподвижного типа.

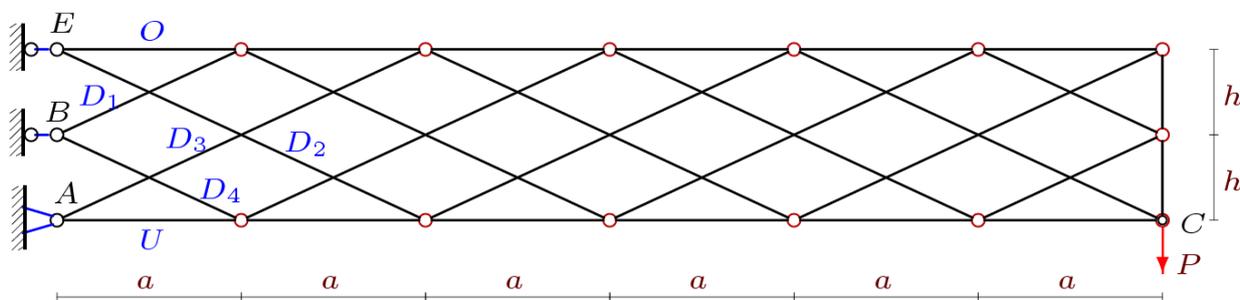


Рисунок 1– Консольная ферма, $n = 6$

Общая длина всех стержней конструкции равна $2(an + 2cn + h)$ где $c = \sqrt{a^2 + h^2}$. Конструкция фермы имеет регулярную схему с параметром n ,

определяющим пропорции консоли. Четыре опоры создают внешнюю статическую неопределенность конструкции. Определить реакции опор отдельно от усилий в стержнях не удастся. Решением проблемы является составление системы уравнений равновесия всех узлов, число которых в два раза меньше числа стержней, что позволяет решить задачу об усилиях в стержнях. Однако, в данном случае недостаточно просто определить численные значения усилий в стержнях. Для вывода формулы зависимости прогиба от числа панелей усилия определяются в символьной форме. Решение выполним в системе компьютерной математики Maple, в которой предусмотрена возможность получать общие члены числовых последовательностей.

Первые же расчеты усилий показывают, что при нечетном числе панелей определитель системы обращается в ноль. Подтверждением этого является схема возможных скоростей, найденная при $n = 3$ (рис. 2). Аналогичную схему скоростей можно получить и при другом нечетном числе панелей. Соотношение скоростей $v/a = u/c$ найдено из рассмотрения положений мгновенных центров скоростей отдельных стержней.

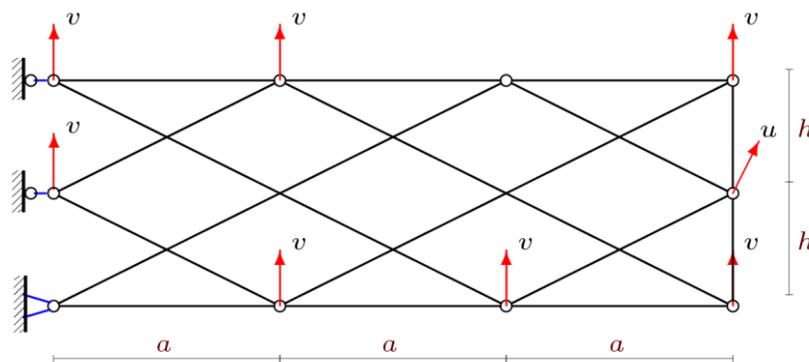


Рисунок 2 – Схема возможных скоростей узлов изменяемой фермы, $n = 3$

Примем в дальнейших вычислениях $n = 2k$ и решим задачу для случая действия сосредоточенной силы на конце консоли. Для расчета прогиба используем формулу Максвелла - Мора в виде

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n_R-4} \frac{S_j s_j l_j}{EF}, \quad (1)$$

где обозначено: S_j – усилия в стержнях фермы от действия внешней нагрузки (распределенной или сосредоточенной), s_j – усилия от единичной силы, приложенной к шарниру на конце фермы, l_j – длина стержня j . Жесткость EF всех стержней принята одной и той же.

Анализируя решения для ферм с последовательно увеличивающимся числом панелей, получаем что общий вид формулы зависимости прогиба от параметров конструкции имеет вид (следствие свойства регулярности схемы):

$$\Delta = P(C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (h^2 EF). \quad (2)$$

Общие члены последовательностей, образованных из решения ряда ферм при $k=1,2,\dots,8$, получены в системе Maple:

$$C_1 = 2k(2k^2 + 1) / 3, \quad C_2 = 2k, \quad C_3 = 1 - (-1)^k. \quad (3)$$

Одновременно получены и формулы для усилий в стержнях вблизи закрепления:

$$O = Pka / h, \quad D_1 = D_2 = D_4 = 0, \quad D_3 = -Pc / h, \quad U = -P(k - 1)a / h.$$

Реакции опор консоли в этом случае имеют вид:

$$X_A = Pak / h, \quad Y_A = P, \quad X_B = 0, \quad X_E = -Pka / h.$$

Равномерно распределенная нагрузка. Рассмотрим случай равномерно распределенной нагрузки по узлам верхнего пояса консоли (рис. 3). Индукция дает следующие коэффициенты в той же формуле (2):

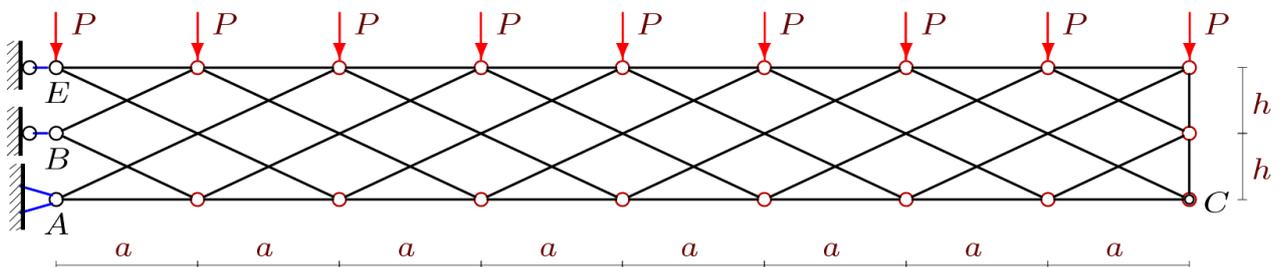


Рисунок 3 – Нагрузка, равномерно распределенная по узлам, $n = 8$

$$\begin{aligned} C_1 &= (6k^4 + 4k^3 + 12k^2 + 8k - 3(-1)^k + 3) / 6, \\ C_2 &= (14k^2 + 8k - (-1)^k + 1) / 4, \\ C_3 &= (2k + 1 - 2k(-1)^k - (-1)^k) / 2. \end{aligned} \quad (4)$$

Решения в этом случае получаются немного сложнее, чем для сосредоточенной нагрузки. Степени полиномов выше, как выше и порядок рекуррентных уравнений для их нахождения. Получены усилия в стержнях:

$$O = Pa(4k^2 + 2k - (-1)^k + 5) / (4h),$$

$$D_1 = Pc((-1)^k - 1) / (4h),$$

$$D_2 = -Pc / h,$$

$$D_3 = -Pc(1 + 2k) / h,$$

$$D_4 = D_1, U = -Pa(4k^2 - 6k + (-1)^k - 5) / (4h).$$

Реакции опор:

$$X_A = Pa(4k^2 + 2k + (-1)^k - 1) / (4h),$$

$$X_B = -Pa((-1)^k - 1) / (2h),$$

$$X_E = -Pa(4k^2 + 2k - (-1)^k + 1) / (4h),$$

$$Y_A = P(1 + 2k).$$

Анализ полученных результатов. Особенности найденного решения можно проследить на графиках, построенных по формуле (2). Рассмотрим, например, консоль постоянной длины $L = an$ под действием нагрузки, не зависящей от числа панелей: $P_0 = (n + 1)P$. Графики решения (2) построим для безразмерного прогиба $\Delta' = \Delta EF / (P_0 L)$ с коэффициентами (4) в случае равномерной нагрузки по верхнему поясу при $L = 10$ м и высотах $h = 1, 2$ и 3 м (рис. 4). Кривые имеют точки взаимного пересечения, означающие, что несмотря на разную высоту прогибы консолей с одним и тем же числом панелей одинаковы. Другая особенность графика — непропорциональная (нелинейная) зависимость прогиба от высоты. Порядок кривых при $h = 1$ м и $h = 2$ м соответствует физике задачи — консоль с меньшей толщиной h должна изгибаться больше. Однако при $h = 3$ м и $k > 6$ кривая прогиба неожиданно оказывается выше прогиба кривой при $h = 2$ м.

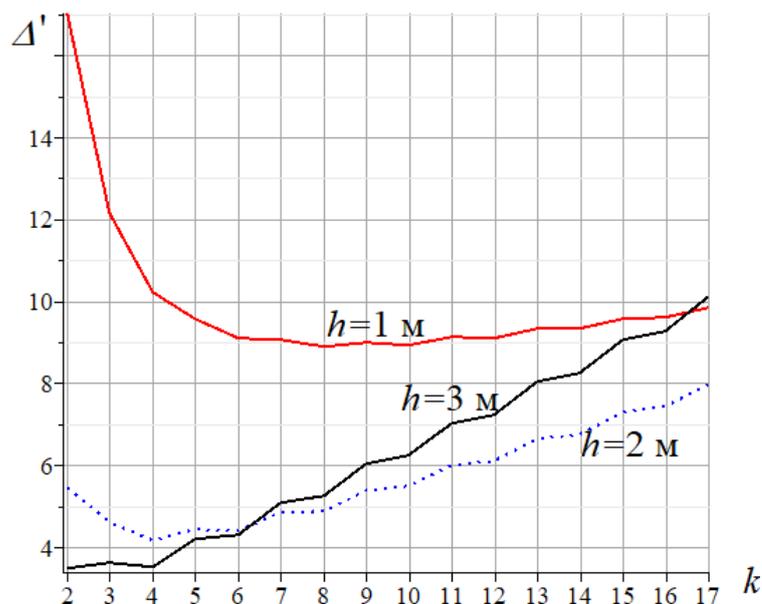


Рисунок 4 – Зависимость относительного прогиба от числа панелей k в случае равномерно распределенной нагрузки

Асимптотику решения, полученного в аналитической форме можно проанализировать средствами Maple, используя оператор вычисления предела по числу k : $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta' / k = 7h / (4L)$.

Заключение

Получено достаточно простое аналитическое решение задачи о прогибе консоли с произвольным числом панелей. Замечена опасная особенность конструкции — при нечетном числе панелей консоль превращается в мгновенно изменяемый механизм. Полученные формулы для прогиба и усилий в стержнях могут быть использованы в решении задач оптимизации конструкций по прочности, жесткости и устойчивости.

Библиографический список:

1. Игнатъев А.В., Габова В.В. Алгоритм статического расчета плоских стержневых систем по методу конечных элементов в смешанной форме // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Естественные науки. 2007. № 6. С. 72-77.

2. Ignatyev A.V., Ignatyev V.A., Onischenko E.V. Analysis of systems with unilateral constraints through the finite element method in the form of a classical mixed method // В сборнике: Procedia Engineering. 2016. С. 1754-1759.
3. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. Comparison of two analytical approaches to the analysis of grillages // В сборнике: 2015 International Conference "Stability and Control Processes" in Memory of V.I. Zubov (SCP) 2015. С. 382-385.
4. Goloskokov D.P., Matrosov A.V. A superposition method in the analysis of an isotropic rectangle // Applied Mathematical Sciences. 2016. Т. 10. № 54. С. 2647-2660.
5. Игнатъев А. В., Игнатъев В. А., Онищенко Е. В. Решение геометрически нелинейных задач статики шарнирно-стержневых систем на основе метода конечных элементов в форме классического смешанного метода // Вестник МГСУ. 2016. №. 2. С. 20-33.
6. Резунов А.В., Лютоева Ю.Н. Анализ напряженно-деформированного состояния прямоугольной плиты при различных способах опирания краев и произвольном нагружении // Строительная механика и конструкции. 2019. № 2(21) С. 20-31.
7. Рыбаков Л. С. Линейная теория плоского призматического каркаса // Известия РАН. Механика твердого тела. 2001. №. 106-118.
8. Галишникова В.В., Игнатъев В.А. Регулярные стержневые системы. Теория и методы расчета. Волгоград: ВолгГАСУ, 2006.
9. Игнатъев В.А. Расчет регулярных стержневых систем. Саратов: Саратовское высшее военно-химическое военное училище, 1973.
10. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type // Architecture and Engineering. 2016. Т. 1. № 3. С. 14-17.
11. Кирсанов М.Н. Индуктивный анализ влияния погрешности монтажа на жесткость и прочность плоской фермы // Инженерно-строительный журнал. 2012. № 5 (31). С. 38-42.

12. Кирсанов М.Н. Аналитическое исследование жесткости пространственной статически определимой фермы // Вестник МГСУ. 2017. Т. 12. № 2 (101). С. 165-171.
13. Ларичев С.А. Индуктивный анализ влияния строительного подъема на жесткость пространственной балочной фермы // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics. М: Инфра-М. 2015. Т. 1. С. 4-8.
14. Tinkov D. V. Comparative analysis of analytical solutions to the problem of deflection of truss structures // Magazine of civil Engineering. 2015. No. 5(57). Pp. 66-73. doi: 10.5862/MCE.57.6
15. Тиньков Д.В. Оптимальная геометрия плоской балочной раскосной фермы с учетом линейной ползучести материала // Инженерно-строительный журнал. 2016. №1(61). С. 25–32) doi: 10.5862/MCE.61.3
16. Тиньков Д.В. Формулы для расчёта прогиба вставленной балочной раскосной фермы с произвольным числом панелей // Строительная механика и конструкции. 2016. Т. 2. № 13 (13). С. 10-14.
17. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Строительная механика и конструкции. 2018. Т.1. №16. С.12-33.
18. Воробьев О. В. О методах получения аналитического решения для проблемы собственных частот шарнирных конструкций // Строительная механика и конструкции. 2020. Т. 1. №. 24. С. 25-38.
19. Белянкин Н.А., Бойко А.Ю. Формулы для прогиба балочной фермы с произвольным числом панелей при равномерном нагружении // Строительная механика и конструкции. 2019. №1(20). С. 21-29.