УДК 624.046.5

К ВОПРОСУ ОБ ОЦЕНКЕ ПРОЧНОСТИ И ПОДБОРЕ СЕЧЕНИЯ ИГИБАЕМОГО СТЕРЖНЯ В СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ

Бакушев Сергей Васильевич

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г.Пенза,

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Аннотация.

Рассматриваются вопросы расчёта упругих стержней, находящихся в условиях плоского поперечного изгиба, на действие статических нагрузок. Обсуждаются вопросы обеспечения надлежащего запаса прочности после округления (как правило, в большую сторону) вычисленных геометрических размеров поперечного сечения стержня в соответствии с действующими конструктивными особенностями элементов строительных конструкций, в частности, с сортаментом. Показано, что теоретически условие прочности изгибаемого стержня после округления размеров поперечного сечения в большую сторону, может быть нарушено. Для обеспечения необходимого запаса прочности изгибаемого стержня, необходимо анализировать зависимость момента сопротивления поперечного сечения от его характерного размера. Результаты статьи подтверждают и обосновывают правило, принятое проектировщиками о необходимости проверки прочности изгибаемого стержня после назначения геометрических размеров поперечного сечения.

Ключевые слова: изгибаемый стержень, плоский поперечный изгиб, условие прочности, момент сопротивления, характерный размер поперечного сечения.

TO THE REPORT OF THE BREAKING AND THE BREAKING OF THE BREAKING IN THE BREAKING MATERIALS

Bakushev Sergey Vasilevich

Penza State University of Architecture and Construction,Penza,

Doctor of Sciences, Professor of the department "Mechanics".

Abstract.

Consideration of the calculation of elastic rods, which are in conditions of flat transverse bend, on the action of static loads. Discussions are being discussed to ensure the proper safety margin after rounding (usually in the big side) calculated geometric sizes of the cross-section of the rod in accordance with the existing design features of the elements construction structures, particularly with a variety. It is shown that theoretically the condition of the strength of the curved rod after rounding the size of the cross section in a large direction, can be violated. To ensure the necessary strength reserve of the curved rod, it is necessary to analyze the dependence of the moment of cross-section resistance from its characteristic size. The results of the article confirm and substantiate the rule adopted by the designers about the need to check the strength of the curved rod after the appointment of geometric sizes of the cross section.

Keywords: bendable rod, flat transverse bend, strength condition, moment of resistance, the characteristic size of the cross-section.

Введение.

Формулы сопротивления материалов, используемые для расчёта элементов строительных конструкций, в частности, стержней, работающих на изгиб, давно и прочно закрепились в нормах проектирования [1]. Под расчётом элемента конструкции понимается определение формы и размеров его поперечного сечения из условия прочности. При этом используется термин не "вычисление" размеров поперечного сечения, а "подбор" его размеров. Подбор размеров поперечного сечения подразумевает выполнение следующего алгоритма расчёта:

1. Задаёмся формой и размерами или соотношениями размеров поперечного сечения.
2. Задаёмся механическими характеристиками материала элемента конструкции.
3. Вычисляем геометрические характеристики поперечного сечения.
4. Проверяем выполнение условий прочности.
5. Если условия прочности не удовлетворяются, то алгоритм повторяется для новых формы, размеров и материала конструкции. Если же условия прочности удовлетворяются, то размеры поперечного сечения округляются (принимаются) в соответствии с действующими конструктивными особенностями конструкции, в частности, сортаментом.

Возникает вопрос, не приведёт ли округление вычисленных размеров поперечного сечения (как правило, в большую сторону) к нарушению условий прочности?

Теоретические основы.

Оценка прочности упругого изгибаемого стержня на действие статических нагрузок выполняется в классическом сопротивлении материалов по двум условиям прочности [2]. Первое условие предполагает выполнить оценку величины нормальных напряжений, действующих в поперечном сечении стержня:

$$\sigma_z^{\max} = \frac{M_x^{\max}}{W_x} \le R_\sigma \gamma_c . \qquad (1)$$

Второе условие предполагает выполнить оценку величины касательных напряжений, действующих в поперечном сечении стержня:

$$\tau_{zy}^{\max} = \frac{Q_y^{\max} S_x^{п.с.}}{I_x b_{н.о.}} \le R_\tau \gamma_c . \qquad (2)$$

Из условия прочности (1) определяется требуемый момент сопротивления поперечного сечения изгибаемого стержня $W_x^{тр} \ge \dfrac{M_x^{\max}}{R_\sigma \gamma_c}$. Фактический момент сопротивления W_x вычисляется, вообще говоря, путём деления момента инерции площади поперечного сечения I_x на наибольшее расстояние от нейтральной оси до крайнего (фибрового) волокна:

$$W_x = \frac{I_x}{y^{\max}}. \qquad (3)$$

Геометрические размеры поперечного сечения стержня, как правило, взаимосвязаны и, вообще говоря, выражаются через характерный размер. Это приводит к тому, что момент инерции площади поперечного сечения I_x в самом общем случае выражается полиномом четвёртого порядка от характерного размера поперечного сечения. Следовательно, момент сопротивления W_x, в соответствии с формулой (3), в самом общем случае выражается полиномом третьего порядка от характерного размера поперечного сечения.

Условие прочности (1) запишем в следующем виде:

$$W(b_1) \equiv f_1\left(b_1^3\right) + f_2\left(b_1^2\right) + f_3(b_1) + \frac{M_x^{\max}}{R_\sigma \gamma_c} \geq 0. \qquad (4)$$

Здесь b_1 – характерный размер поперечного сечения стержня;

$f_1\left(b_1^3\right)$, $f_2\left(b_1^2\right)$, $f_3(b_1)$ – слагаемые полинома третьего порядка, содержащие характерный размер соответственно в третьей, второй и первой степенях.

График полинома третьего прядка описывается кубической параболой и на фазовой плоскости в системе координат $W(b_1), b_1$ может занимать положение 1, 2, 3, 4, 5 (рис. 1), если коэффициент при старшей степени больше нуля.

Точки пересечения парабол с осью b_1 – это точки "a", "b", "c" – определяют значение характерного размера "b_1" поперечного сечения, при котором точно выполняется условие прочности по нормальным напряжениям (1).

На кривой "1" или кривой "3" точка "a" единственным образом определяет значение характерного размера "b_1" поперечного сечения стержня, при котором точно выполняется условие прочности по нормальным напряжениям. Значение $b_1 = a$ получено из условия прочности (1). Из конструктивных соображений значение характерного размера поперечного сечения обычно принимается немногим больше. Судя по виду кривых "1" и "3", условие прочности по нормальным напряжениям (1) при этом нарушаться не будет.

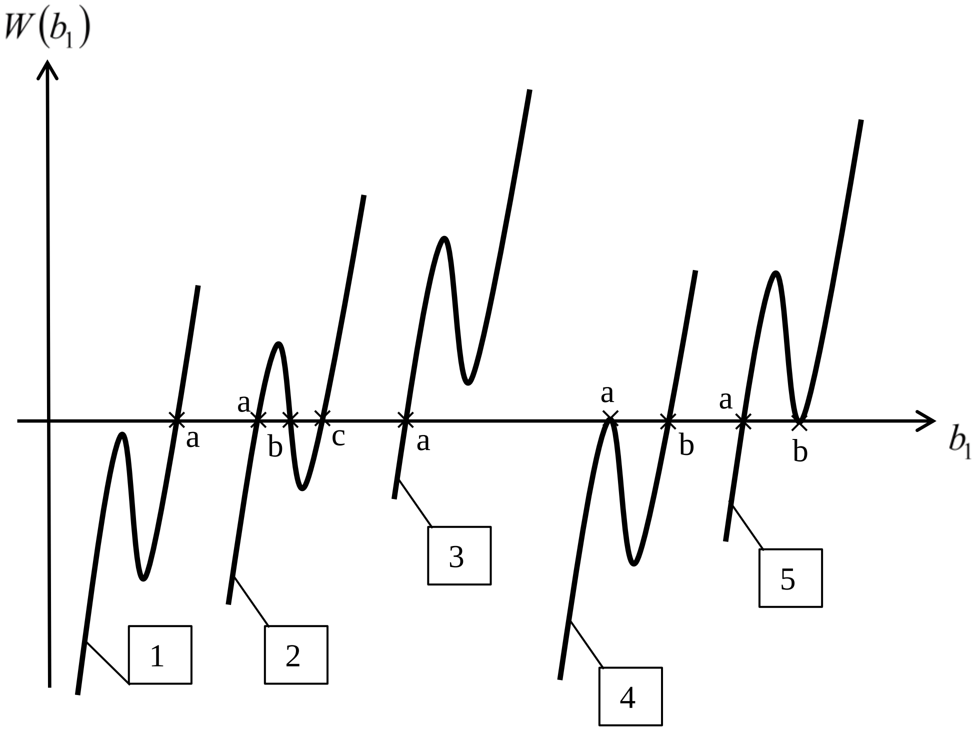

Рисунок 1 - Графики полиномов третьего порядка

На кривой "2" характерный размер "b_1" поперечного сечения, при котором точно выполняется условие прочности по нормальным напряжениям (1), многозначен и соответствует точкам "a", "b" и "c". Если из условия прочности (1) принят характерный размер $b_1 = a$, а из конструктивных соображений его немного увеличивают, то можно попасть в интервал ("b" – "c"), где условие прочности не выполняется. Ввиду этого, характерный размер, принятый из конструктивных соображений следует принимать таким, что бы он был больше значения "c".

На кривой "4" характерный размер "b_1" поперечного сечения, при котором точно выполняется условие прочности по нормальным напряжениям, тоже многозначен и соответствует точкам "a" и "b". Если из условия прочности (1) принят характерный размер $b_1 = a$, а из конструктивных соображений его немного увеличивают, то мы сразу попадаем в интервал ("b" – "c"), где условие прочности не выполняется. Ввиду этого характерный размер "b_1", принимаемый по расчёту из условия прочности (1) следует принимать равным "b". Если затем его немного увеличить из конструктивных соображений, то условие прочности (1) не нарушается.

На кривой "5" характерный размер "b_1" поперечного сечения, при котором точно выполняется условие прочности по нормальным напряжениям (1), тоже многозначен и соответствует точкам "a" и "b". В данном случае, как это следует из рисунка, конструктивно принятый характерный размер $b_1 = \mathrm{a}$ поперечного сечения не приводит к нарушению условия прочности по нормальным напряжениям.

Пример.

Рассмотрим в качестве примера поперечное сечение изгибаемого стержня в форме прямоугольной трубы (рис. 2). Размеры поперечного сечения с толщиной стенки b взаимосвязаны:

$$h_1 = kb_1; \quad b_1 = b_2 + 2b; \quad h_1 = h_2 + 2b.$$

Вычислим момент инерции поперечного сечения (рис. 2) относительно нейтральной (центральной) оси X:

$$I_x = \frac{b_1 h_1^3}{12} - \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{1}{12}\left[b_1 (kb_1)^3 - (b_1 - 2b)(kb_1 - 2b)^3\right] =$$

$$= \frac{1}{12}\left[2k^2 b(k+3)b_1^3 - 12kb^2(k+1)b_1^2 + 8b^3(3k+1)b_1 - 16b^4\right];$$

Тогда момент сопротивления будет вычисляться по формуле:

$$W_x = \frac{2I_x}{h_1} = \frac{2I_x}{kb_1} = \frac{1}{3kb_1}\left[k^2 b(k+3)b_1^3 - 6kb^2(k+1)b_1^2 + 4b^3(3k+1)b_1 - 8b^4\right].$$

Запишем условие прочности в форме (4):

$$W_x(b_1) \equiv \frac{1}{3kb_1}\left[k^2b(k+3)b_1^3 - 6kb^2(k+1)b_1^2 + 4b^3(3k+1)b_1 - 8b^4\right] - \\ - \frac{M_x^{\max}}{R_\sigma \gamma_c} \geq 0. \tag{5}$$

В левой части условия (5) записано уравнение 3-го порядка относительно величины b_1. Перепишем условие (5) в форме, удобной для исследования [3]:

$$k^2b(k+3)b_1^3 - 6kb^2(k+1)b_1^2 + \left[4b^3(3k+1) - 3k\frac{M_x^{\max}}{R_\sigma \gamma_c}\right]b_1 - 8b^4 \geq 0. \tag{6}$$

Поскольку $k^2b(k+3) > 0$, то кубическая парабола, описываемая левой частью неравенства (6), сначала возрастает, затем убывает и затем вновь возрастает, то есть соответствует графикам, приведённым на рис. 1. Смещение кривой (6) от начала координат определяется свободным членом и равно $8b^4$, то есть в области допустимых значений величина достаточно маленькая по сравнению со значениями коэффициентов выражения (6). Таким образом, кубическая парабола, описываемая левой частью неравенства (6) будет располагаться почти антисимметрично относительно начала координат, то есть будет соответствовать графику 2 на рис. 1, причём точка "b" будет располагаться вблизи нуля справа.

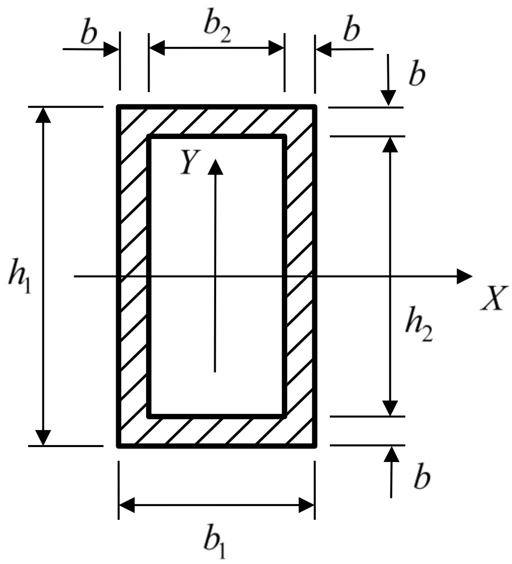

Рисунок 2 - Поперечное сечение стержня

Таким образом, для прямоугольной трубы (рис. 2) величина характерного размера b_1, вычисленная из условия прочности и принятая из конструктивных соображений (как правило, чуть больше) не может привести к нарушению условия прочности.

На рис. 3 представлен график кубической параболы, построенный в соответствии с левой частью неравенства (6) для следующих значений исходных данных: $k = 1$; $b = 1\,\text{см}$; $M_x^{\max} = 2000\,\text{кН}\cdot\text{см}$; $R_\sigma = 20\,\text{кН}/\text{см}^2$; $\gamma_\text{c} = 1$.

При этом в результате расчёта, $b_1 = 3{,}784693\,\text{см}$.

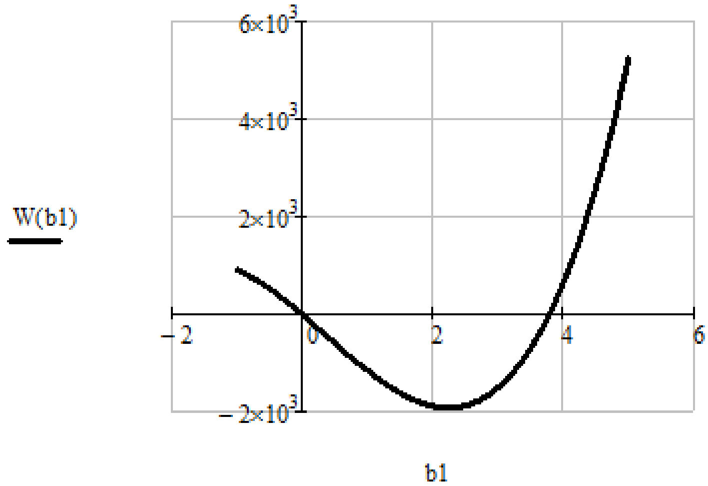

Рисунок 4 - Кубическая парабола на интервале [-1; 5]

Заключение.

Результаты данной работы могут найти применение при расчёте стержней, находящихся в условиях плоского поперечного изгиба, и имеющих сложную форму поперечного сечения. Результаты статьи подтверждают и обосновывают правило, принятое проектировщиками о необходимости проверки прочности изгибаемого стержня после назначения геометрических размеров поперечного сечения.

Библиографический список:

1. Свод правил СП 16.13330.2011. Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81*. М.: Москва. 2011., С.143.

2. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. 5-е изд. М.: Высшая школа. 2007. 560 с.: ил.

3. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. М.: Наука, 1964. 608 с.