

УДК 624.042

ОЦЕНКА ПРОЧНОСТИ СТРУКТУРНО-НЕОДНОРОДНЫХ БАЛОК ПРИ ТЕРМОСИЛОВОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Мищенко Андрей Викторович,

*Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет
(Сибстрин), г. Новосибирск,*

*доктор технических наук, доцент, профессор кафедры «Строительная
механика».*

Аннотация

Рассмотрены задачи прочности структурно-неоднородных балочных систем, при термосиловом воздействии. В их числе, прямая задача оценки параметров заданных воздействий; вычисление предельных значений параметров силового и теплового воздействий при заданном и варьируемом их сочетании; кинематический и энергетический критерии регулирования геометрических параметров системы. Приведены результаты численного расчета напряжений в двухпролетной балке, выполненной из стали и углепластика, при совместном и раздельном действии температурного поля и нагрузок. Показано существенное влияние температурного поля на напряженное состояние неоднородной системы.

Ключевые слова: термосиловое воздействие, структурно-неоднородный стержень, критерий прочности многофазных балок.

STRENGTH EVALUATION OF STRUCTURALLY INHOMOGENEOUS BEAMS AT THERMAL POWER EXPOSURE

Mishchenko Andrey Viktorovich,

*Novosibirsk State University of Architecture and Civil Engineering (Sibstrin),
Novosibirsk,*

Doctor of Sciences, Associate Professor, Professor of “Structural Mechanics” department.

Abstract

The strength problems of beam systems having an inhomogeneous structure under heat power influence are considered. Among them, the direct task of assessing the parameters of given actions; calculation of the limiting values of the parameters of power and thermal effects for a given and varied combination of them; kinematic and energy criteria for adjusting the geometric parameters. The results of a numerical calculation of stresses in a two-span beam made of steel and carbon fiber, with the combined and separate action of the temperature field and loads, are presented. A significant effect of the temperature field on the stress state of an inhomogeneous system is shown.

Keywords: heat power influence, inhomogeneous rod, strength criterion for multiphase beams.

Область применения неоднородных конструкций в различных отраслях техники в настоящее время неуклонно расширяется, что объясняется их существенными преимуществами по сравнению с традиционными однородными конструкциями. Практика их применения обычно приводит к усложнению геометрической формы, физической структуры, а также к разработке новых и критическом анализе существующих расчетных критериев [1, 2]. Очевидно, что формальный перенос подходов, применяемых в расчетах однородных систем простой геометрической формы не всегда является допустимым в случае рассмотрения систем с неоднородной структурой.

В данной статье рассматриваются особенности напряженного состояния, критерии прочности и рационального проектирования структурно-неоднородных балок при термосиловом воздействии.

1. Объектом исследования является многопролетная неоднородная балка геометрически переменного поперечного сечения (рисунок 1), испытывающая силовое и тепловое воздействие.

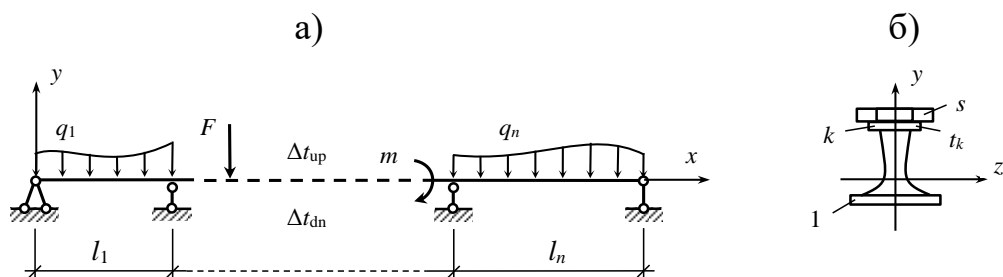


Рисунок 1 – Расчетная схема многопролетной балки при термосиловом воздействии: а – общая схема; б – схема поперечного сечения

В системе координат xuz структура балки обладает симметрией относительно силовой плоскости xu , продольная ось совмещена с осью x . Структура балки содержит s фаз, выполненных из квазиоднородных линейно деформируемых конструкционных материалов при обеспечении идеального межфазного контакта. k -я фаза ($k = 1, \dots, s$), имея заданную геометрическую форму в поперечном сечении, характеризуется определенными параметрами, например, диаметром d_k , границами прямоугольных слоев $y_k, y_{k+1}, z_k, z_{k+1}$, интегральными геометрическими характеристиками: площадью $A_k(x)$, статическим моментом $S_k(x)$, моментом инерции $I_k(x)$, физическими характеристиками: модулем упругости E_k , коэффициентом теплового расширения α_k .

На балку действуют: а) стационарное внешнее тепловое поле, заданное в виде изменений температур $\Delta t_{up}(x)$, $\Delta t_{dn}(x)$ соответственно на верхней и нижней поверхностях (задача Дирихле [2, 3]) и система заданных нагрузок.

Полагая, что рассматриваемые балки являются относительно тонкими, а значения физических характеристик материалов в фазах имеют одинаковый порядок, примем для анализа классические гипотезы Бернулли. Будем полагать, что продольные ϵ_x и поперечные ϵ_y деформации, сдвиги γ_{yx} , продольные u и

поперечные v перемещения точек отсчетной оси, углы поворота поперечных сечений θ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}\varepsilon_x(x, y) &= \varepsilon_0(x) - \kappa(x) \cdot y, \quad \varepsilon_y(x, y) = 0, \quad \gamma_{yx}(x, y) = 0, \\ \varepsilon_0(x) &= u', \quad \kappa(x) = \theta, \quad (\cdot)' = \partial(\cdot) / \partial x.\end{aligned}\quad (1)$$

Выражения для интегральных силовых факторов и дифференциальные уравнения равновесия стержня имеют вид

$$\begin{aligned}[N, Q, M](x) &= \sum_{k=1}^s \iint_{A_k} [\sigma_x^{(k)}, \tau_{yx}^{(k)}, -\sigma_x^{(k)} y] dA, \\ N' + q_x &= 0, \quad Q' - q_y = 0, \quad M' = Q + m_z.\end{aligned}\quad (2)$$

Для принятой расчетной модели стержня основной компонентой тензора напряжений является σ_x , а τ_{yx} , σ_y – второстепенными. Представим напряжение $\sigma_x^{(k)}$ в k -й фазе на основе закона Гука

$$\sigma_x^{(k)}(x, y) = E_k [\varepsilon_0(x) - \kappa(x) y - \alpha_k t_k(x, y)].\quad (3)$$

Здесь в квадратных скобках – механическая компонента деформации, а $t_k(x, y)$ – изменение поля температур, выявленное в результате решения задачи стационарной теплопроводности.

Подстановка (3) в (2) дает зависимости, связывающие усилия с обобщенными деформациями ε_0 , κ

$$\begin{cases} D_A \varepsilon_0 - D_S \kappa = N - N_{t0}, \\ D_I \kappa - D_S \varepsilon_0 = M - M_{t0}, \end{cases}\quad (4)$$

где

$$[D_A, D_S, D_I](x) = \sum_{k=1}^s E_k \iint_{A_k} [1, y, y^2] dA -$$

жесткостные характеристики сечения балки нулевого, первого и второго порядков;

$$[N_{t0}, M_{t0}](x) = \sum_{k=1}^s E_k \alpha_k \iint_{A_k} t_k [-1, y] dA -$$

температурные усилия, действующие в сечении неоднородного стержня при полном стеснении деформаций ($\varepsilon_0 = \kappa = 0$).

Система (4) отражает частный случай физически линейного термоупругого деформирования, рассмотренной в [1] нелинейной краевой задачи.

С учетом (4) напряжение (3) может быть представлено в виде

$$\sigma_x^{(k)}(x, y) = E_k \left[\frac{N - N_{t0}}{D_A \gamma_D} \left(1 - \frac{y_S y}{i_D^2} \right) - \frac{M - M_{t0}}{D_I \gamma_D} (y - y_S) - \alpha_k t_k(x, y) \right],$$

$$y_S(x) = \frac{D_S}{D_A}, \quad i_D(x) = \sqrt{\frac{D_I}{D_A}}, \quad \gamma_D = 1 + \frac{y_S^2}{i_D^2}.$$

2. Рассмотрим методику оценки прочности неоднородной балки.

Критерий прочности представим через деформации в виде

$$\left| \varepsilon_x(x, y) \right| = \left| \kappa(x) [y_0(x) - y] - \alpha_k t_k(x, y) \right| \leq \varepsilon_{x,adm}^{(k)\pm} = \varepsilon_{x,u}^{(k)\pm} / k_u^\varepsilon, \quad (k = 1, \dots, s), \quad (5)$$

где y_0 – координата линии нулевых деформаций, $\varepsilon_{x,adm}^{(k)\pm}$ – допустимый уровень деформации при растяжении и сжатии при оценке предельных состояний материала k -й фазы; $k_u^\varepsilon \geq 1$ – коэффициент запаса по отношению к уровню предельной деформации $\varepsilon_{x,u}^{(k)\pm}$.

В правой части условия (5) могут использоваться предельные деформации, превышение которых недопустимо по тем или иным соображениям. Кроме того, они могут устанавливаться на основе зависимостей, описывающих физические предельные состояния, сформулированных для эквивалентных напряжений $\sigma_{eqv}^{(k)} = \Psi(\sigma_x^{(k)}, \tau_{yx}^{(k)}) \leq \sigma_s^{(k)}$. В результате правая часть условия (5) приобретает зависимость от компонент тензора напряжений, что позволяет отражать сложное напряженное состояние.

С учетом зависимостей (4) и $N = 0$ координата y_0 может быть найдена по формуле

$$y_0(x) = \frac{(M - M_{t0})y_S - N_{t0}i_D^2}{M - M_{t0} - N_{t0}y_S}. \quad (6)$$

На положение точки нулевой деформации $\varepsilon_x(y)$, кроме параметров структуры стержня, влияние оказывают также и усилия при термосиловом воздействии. Лишь в частном случае при поперечном изгибе без воздействия температуры имеем $y_0 = y_s$. Отметим также, что при термосиловом воздействии нейтральные оси напряжений $\sigma_x(y)$ (3) и деформаций $\varepsilon_x(y)$ не совпадают.

Согласно условию (5) оценку прочности многофазной балки заданной структуры при заданном термосиловом воздействии можно выполнить для функции кривизны оси по следующему условию

$$\max_k \kappa_{k,adm}^-(x) \leq \kappa(x) \leq \min_k \kappa_{k,adm}^+(x). \quad (7)$$

Здесь предельные кривизны, по условиям прочности материала k -й фазы в точке y_{k^*} , определяются выражениями

$$\kappa_{k,adm}^\pm(x) = \frac{\pm \varepsilon_{x,adm}^{(k)\pm} + \alpha_k t_k(x, y_{k^*})}{y_0(x) - y_{k^*}}. \quad (8)$$

Для иллюстрации определения положения линий предельных деформаций $\varepsilon_x(y)$ на рисунке 2 показан полигон предельных деформаций $\pm \varepsilon_{x,adm}^{(k)\pm}$ (б), схематично построенный для схемы некоторого сечения (а). В пределах каждого слоя на нем отмечены опасные точки в областях положительных и отрицательных деформаций. Согласно приведенной схеме предельные кривизны (8) находятся по формулам:

$$\begin{aligned} \kappa_{k,adm}^\pm(x) &= \frac{\mp \varepsilon_{x,adm}^{(k)\mp} + \alpha_k t_k(x, y_{k,max})}{y_0(x) - y_{k,max}} - y_{k^*} > y_0, \\ \kappa_{k,adm}^\pm(x) &= \frac{\pm \varepsilon_{x,adm}^{(k)\pm} + \alpha_k t_k(x, y_{k,min})}{y_0(x) - y_{k,min}} - y_{k^*} < y_0. \end{aligned}$$

Согласно условиям (7) при решении прямой (проверочной) задачи следует, построив серии линий предельных положительных $\kappa_{k,adm}^+(x)$ и отрицательных $\kappa_{k,adm}^-(x)$ кривизн ($k = 1, \dots, s$), проконтролировать отсутствие пересечений с ними графика кривизны $\kappa(x)$, соответствующей заданным воздействиям. Как предельный случай допускается касание (равенство в (7)) в

одной или нескольких точках указанных линий. Достижение этого состояния требует варьирования параметров внешних воздействий либо геометрических или структурных параметров системы.

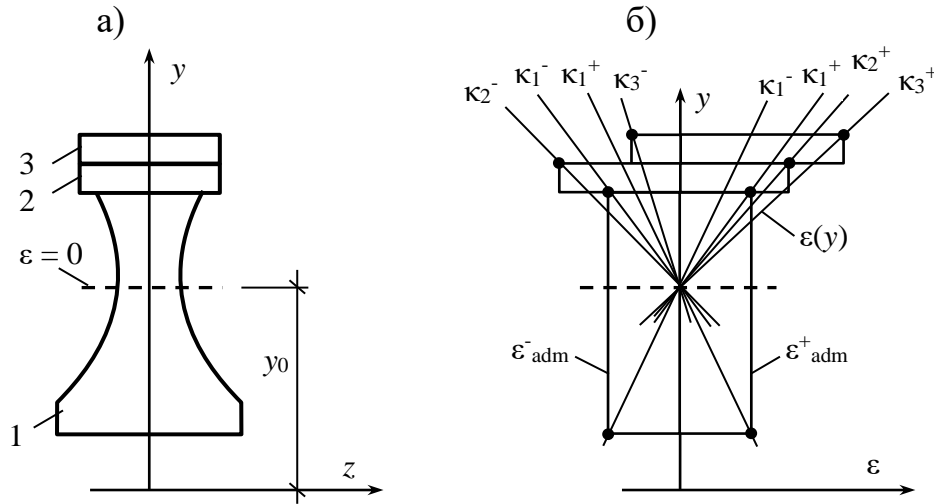


Рисунок 2 – Поперечное сечение неоднородной балки (а); полигон предельных деформаций $\pm \varepsilon_{x,adm}^{(k)\pm}$ и вписанные в него предельные распределения деформаций $\varepsilon_x(y)$ (б)

Отметим, в соответствии с выражением (8), наличие теплового воздействия оказывает влияние на предельные значения кривизн и способно изменять результат решения проверочной задачи в ту или другую сторону.

3. Введем в силовое и температурное воздействия безразмерные управляющие параметры p_F , p_t , с помощью которых запишем функции усилий $S \in [M, N, Q]$, температуры и деформации

$$S(x) = p_F \bar{S}_F + p_t \bar{S}_t, \quad t_k(x, y) = p_t \bar{t}_k, \quad \varepsilon_x(x, y) = p_F \bar{\varepsilon}_{xF} + p_t \bar{\varepsilon}_{xt}. \quad (9)$$

Величины с верхним начерком в (9) и далее обозначают удельные функции, выявленные расчетом системы при задании $p_F = 1$ или $p_t = 1$.

Физические соотношения (4) при учете (9) и $N_F = N_t = 0$ примут вид

$$\begin{cases} D_A \varepsilon_0 - D_S \kappa = -p_t \bar{N}_{t0}, \\ D_I \kappa - D_S \varepsilon_0 = p_F \bar{M}_F + p_t (\bar{M}_t - \bar{M}_{t0}), \end{cases}$$

а критерий прочности (5) –

$$|\varepsilon_x(x, y)| = |(p_F \bar{\kappa}_F + p_t \bar{\kappa}_t)[y_0(x) - y] - p_t \alpha_k \bar{t}_k(x, y)| \leq \varepsilon_{x,adm}^{(k)\pm}, \quad (k = 1, \dots, s), \quad (10)$$

$$y_0(x, p_F, p_t) = \frac{p_F y_S \bar{M}_F + p_t (\bar{M}_{t0} y_S + \bar{N}_{t0} i_D^2)}{p_F \bar{M}_F + p_t (\bar{M}_{t0} + \bar{N}_{t0} y_S)} .$$

$$\bar{\kappa}_F(x) = \frac{\bar{M}_F}{D_I \gamma_D}, \quad \bar{\kappa}_t(x) = \frac{\bar{M}_t - \bar{M}_{t0} - \bar{N}_{t0} y_S}{D_I \gamma_D} . \quad (11)$$

С целью управления комплексным воздействием введем для управляющих параметров зависимости

$$p_F = p \cdot \xi, \quad p_t = p(1 - \xi) \quad (12)$$

с использованием общей амплитуды воздействия $p = p_F + p_t$ и коэффициента сочетания воздействий $\xi \in [0, 1]$.

При заданном значении коэффициента сочетания ξ предельное значение параметра амплитуды p_* неоднородного стержня, содержащего s фаз, на основе (10), (12) получим в виде

$$p_*(\xi) = \min_{k=1}^s p_{k*} ,$$

где

$$p_{k*}(\xi) = \min_{x,y} \frac{\pm \varepsilon_{x,adm}^{(k)\pm}}{[\xi \bar{\kappa}_F(x) + (1 - \xi) \bar{\kappa}_t(x)] [y_0(x) - y] + (1 - \xi) \alpha_k \bar{t}_k(x, y)} -$$

$$x \in [0, l], \quad y \in [y_k, y_{k+1}],$$

предельное значение параметра амплитуды, найденное по условию прочности материала k -й фазы, реализуемое в опасной ее точке при $x = x_*$, $y = y_*$.

Путем варьирования параметра ξ может быть построена граница области допустимых состояний в пространстве p_F, p_t .

4. Одним из способов повышения кратности критерия (5) является введение в расчетную схему варьируемых параметров, в числе которых могут использоваться геометрические и физические характеристики различных элементов системы: опорных и соединительных устройств, дополнительные элементы, нагрузки и т.п.

В работе [4] в качестве критерия их назначения в неразрезной n -пролетной балке при силовом воздействии используется кинематическое требование – равенство нулю углов поворота на промежуточных опорах балки

$$\theta_j = 0, \quad (j=1, \dots, n-1). \quad (13)$$

Выясним физический смысл условия (13). Рассмотрим при термосиловом воздействии j -й пролет балки, концевые сечения которого имеют углы поворота $\theta_{j,0}$, $\theta_{j+1,0}$. В соответствии с зависимостями (1), (4), (11) угол поворота промежуточного сечения j -го пролета в локальной системе координат запишется в виде

$$\theta_j(x) = \theta_{j,0} + \int_0^{x_j} \frac{M_t - M_{t0} - N_{t0}y_S}{D_t \gamma_D} dx.$$

Отсюда при нулевых углах (13) следует условие для кривизны

$$\int_0^{l_j} \kappa(x) dx = 0. \quad (14)$$

Критерий «нулевого угла» эквивалентен требованию о равенстве нулю площади эпюры кривизны в пролетах балки. При шарнирном закреплении балки на крайних опорах можно сказать, что в них данное требование выполняется в ослабленном виде.

В качестве критерия рационального проектирования условие (14) может быть использовано лишь при силовом воздействии для балок переменного сечения, давая в этом случае непосредственную связь с напряженным состоянием. В частном случае балок постоянного сечения при отсутствии теплового воздействия критерий (14) дает условие

$$\int_0^{x_j} M(x) dx = 0,$$

согласно которому суммарная площадь эпюры изгибающих моментов, имеющей участки положительных и отрицательных значений, должна равняться нулю. Данное требование можно считать интегральным обобщением

известного условия выравнивания пролетных и опорных моментов в задачах регулирования [5].

Кинематический критерий «нулевого угла» (13) опосредованно через физические соотношения отражает прочностную рациональность расчетных схем многопролетных балок при силовом воздействии. Принимая в качестве n варьируемых параметров относительные длины пролетов $\lambda_j = l_j / L$, ($j = 1, \dots, n$), записываем для их нахождения $n-1$ условие (13) и для замыкания задачи

$$\text{добавляем } \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1.$$

Еще одним способом рационализации параметров балочной системы может быть требование достижения минимума ПЭД – потенциальной энергии деформации [4, 6], которое для неоднородной балки при термосиловом воздействии запишется в виде

$$W(\lambda) = \int_0^L \frac{M(M_t - M_{t0} - N_{t0}y_s)}{D_I \gamma_D} dx \rightarrow \min.$$

5. Рассмотрим пример численной оценки напряжений, возникающих при термосиловом воздействии в двухпролетной балке, показанной на рисунке 3. Балка имеет форму неоднородного тавра, в котором стенка – первый слой – выполнена из стали С245, а полка – из углепластика. Приняты следующие значения параметров расчетной схемы: $E_1 = 210$ ГПа, $R_1 = 240$ МПа, $\alpha_1 = 11,6 \cdot 10^{-6}$ гр⁻¹, $E_2 = 140$ ГПа, $R_2 = 760$ МПа, $\alpha_2 = 0,5 \cdot 10^{-6}$ гр⁻¹, $L = 4$ м, $p = 20$ мм, $a = 0,6$.

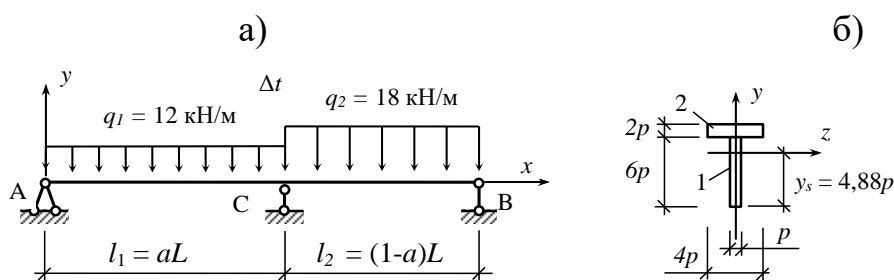


Рисунок 3 – Расчетная схема двухпролетной балки при термосиловом воздействии: а – общая схема; б – схема поперечного сечения

Для упрощения вычислений целесообразно произвести переход к центральным осям, согласно условию $D_s = 0$. Их положение указано на рисунке 3, б. Расчеты напряженного состояния балки выполнены при совместном и раздельном действии нагрузок и четырех вариантах теплового воздействия при задании однородного температурного поля $\Delta t(x, y, z) = 0, 40, 80, 120$ С.

В таблице 1 и на рисунке 4, а приведены результаты расчета напряжений в сечении на промежуточной опоре «С» при действии нагрузок и четырех вариантах теплового воздействия. Напряжения определены на границах слоев в точках $y = -97,65; 22,35$ мм - в первом слое и $y = 22,35; 62,35$ мм - во втором.

Таблица 1 – Результаты расчета напряжений в сечении «С» при совместном силовом и температурном воздействии

$F, \Delta t$ M_C, y_0	$q_1 = 12$ кН/м, $q_2 = 18$ кН/м			
	$\Delta t = 0$	$\Delta t = 40$	$\Delta t = 80$	$\Delta t = 120$
$M_C, \text{кНм}$	-7,50	-20,12	-32,76	-45,40
$y_0, \text{мм} \rightarrow$	0	-47,6	-70,0	-83,0
$y, \text{мм} \downarrow$	Напряжения $\sigma_x^{(k)}(x_C, y)$ (МПа)			
-97,65 ($k = 1$)	-70,3	-153,8	-237,3	-320,7
22,35 ($k = 1$)	16,1	-18,7	-53,5	-88,3
22,35 ($k = 2$)	10,7	49,7	88,6	127,6
62,35 ($k = 2$)	29,9	79,7	129,5	179,2

В силу различия физических характеристик материалов на межслойной границе наблюдается разрыв напряжений, усиливающийся при росте теплового воздействия. В статически неопределимой (СН) балке рост температуры приводит к увеличению модуля момента на опоре и смещению нейтральной оси полных деформаций (б). При температуре $\Delta t > 82$ С в крайней нижней точке сечения напряжение достигает расчетного сопротивления стали С245. Аналогичный вывод о существенном снижении сопротивления изгибаемой системы при возрастании интенсивности теплового воздействия отмечался в [7, 8].

В таблице 2 и на рисунке 3, б приведены результаты расчета напряжений в балке при $\Delta t = 120$ С и отсутствии нагрузок. На ряду со СН балкой, имеющей внешние связи, указанные на рисунке 3, а, рассмотрена статически определимая

(СО) балка с произвольным расположением внешних связей. В СН балке при тепловом воздействии возникают внутренние усилия и эпюра напряжений качественно совпадает с показанной на рисунке 3, а при $\Delta t = 120$. Данный уровень теплового воздействия высок, а исчерпание прочности происходит при $\Delta t = 115$ С в точках нижней границы стенки тавра. Качественно иная ситуация наблюдается в СО балке, в которой напряжения, возникающие в силу неоднородности структуры из-за различия тепловых физических характеристик, являются самоуравновешенными. В отличие от предыдущих случаев внешнего воздействия, наиболее нагруженными здесь являются точки верхней границы стенки тавра, прочность в которых будет исчерпана при $\Delta t = 154$ С.

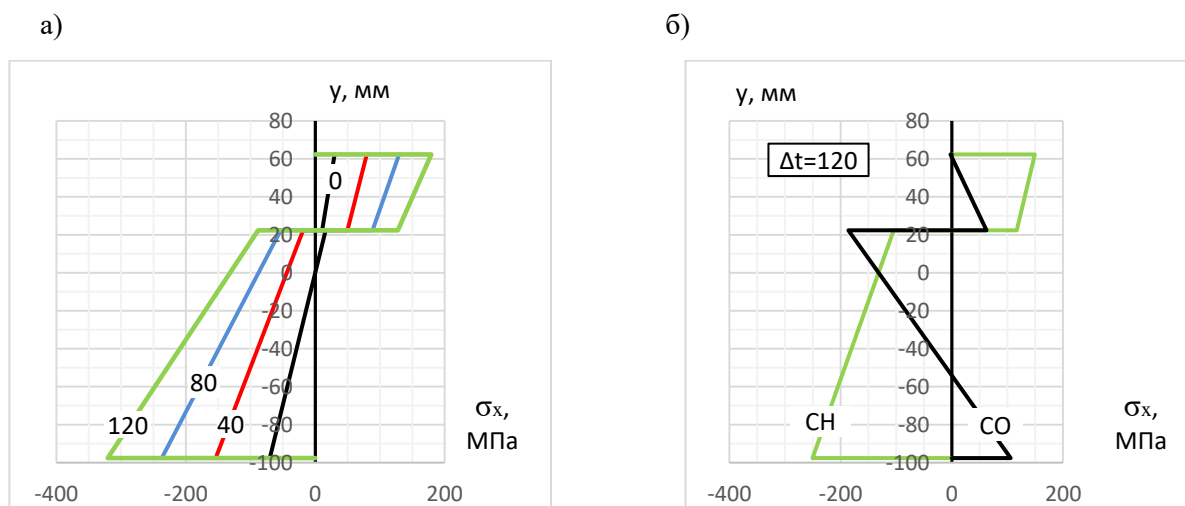


Рисунок 4 – Эпюры напряжений $\sigma_x(y)$ в сечении на промежуточной опоре двухпролетной балки: (а) – при совместном силовом и тепловом ($\Delta t = 0; 40; 80; 120$ С) воздействиях, (б) – при тепловом воздействии $\Delta t = 120$ С в заданной статически неопределимой (СН) и произвольной статически определимой (СО) балках

Таблица 2 – Результаты расчета напряжений в сечении «С» при тепловом воздействии

$F, \Delta t$ M_C, y_0	$q_1 = 0, q_2 = 0, \Delta t = 120$ С	
	СНС	СОС
$M_C, \text{кНм}$	-37,91	0
$y_0, \text{мм} \rightarrow$	-132,1	66,1
$y, \text{мм} \downarrow$	Напряжения $\sigma_x^{(k)}(x_C, y)$ (МПа)	
-97,65 ($k = 1$)	-250,3	105,8

22,35 ($k = 1$)	-104,4	-186,0
22,35 ($k = 2$)	116,84	62,5
62,35 ($k = 2$)	149,3	-2,4

Выводы

Тепловое воздействие является одним из основных факторов, оказывающих существенное влияние на напряженно-деформированное состояние структурно-неоднородных систем. Некорректный его учет может привести к преждевременному исчерпанию несущей способности системы с реализацией межфазных (межслойных) механизмов разрушения.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-01-00038 А

Библиографический список

1. Мищенко А.В. Нелинейное термоупругое деформирование многофазных стержней // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2014. № 4. С. 42–51.
2. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Теплопроводность однородных и композитных тонкостенных конструкций. Новосибирск: «Арт-Авеню». 2008. 512 с.
3. Мищенко А.В. Моделирование двумерных температурных полей в структурно-неоднородных стержнях с разрывными геометрическими параметрами // Известия вузов. Строительство. 2018. № 1. с. 5–15.
4. Васильков Г. В. Эволюционные задачи строительной механики. Синергетическая парадигма: Учебное пособие. Ростов на Дону: Изд-во Инфо Сервис. 2003. –180 с.
5. Себешев В. Г. Изучение особенностей работы статически неопределимых конструкций и регулирование усилий в них. Методические указания. Новосибирск: Изд-во НГАСУ. 2008. 88 с.

6. Пустовой Н. В., Расторгуев Г.И. Оптимальное проектирование стержней и подкрепленных пластин на основе минимизации энергии деформации. Новосибирск: Изд-во НГТУ. 2002. 317 с.

7. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Термоупругопластический изгиб слоисто-волоконистых пластин // Механика композиционных материалов и конструкций. 2005. Т. 11. № 4. С. 467-498.

8. Мищенко А.В. Напряженное состояние структурно-неоднородных стержней из разномодульных материалов при термосиловом воздействии // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 4. С. 43-52.