УДК 624.04

ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ ПОВОРОТА ВЕКТОРА ПЕРЕМЕЩЕНИЙСТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Монахов Владимир Андреевич,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,

г. Пенза,

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Аннотация

Предложен алгоритм автоматизированного формирования матрицы поворота вектора узловых перемещений на основе графа стержневой системы. Матрица поворота используется в расчётах стержневых систем на прочность, устойчивость и по несущей способности в процессе автоматического составления уравнений равновесия. Композиция всего лишь двух матриц стержневой системы: матрицы инцидентности графа, характеризующей топологическую структуру расчётной схемы, и матрицы координат узлов позволяет в автоматическом режиме установить матрицу поворота с использованием ПЭВМ.

Ключевые слова: стержневая система; граф рамы; матрица инцидентности; матрица поворота; вектор перемещений.

FORMATION OF THE MATRIX MOTION OF THE ROD SYSTEM

Monakhov Vladimir Andreevich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor of the department “Mechanics”.

Abstract

An algorithm for automated formation of the rotation matrix of the node displacement vector based on the rod system graph is proposed. The rotation matrix is used in calculations of rod systems for strength, stability and load-bearing capacity in the process of automatic compilation of equilibrium equations. The composition of just two matrices of the core system: the graph incidence matrix, which characterizes the topological structure of the design scheme, and the node coordinate matrix allows you to automatically set the rotation matrix using a PC.

Keywords: framed system; frame graph; incidence matrix; matrix of Motion; vector of displacement.

Представляя любую стержневую систему в виде связанного в местах дискретизации (узлах) набора ограниченного числа конечных элементов (КЭ) (рис. 1,а), связь глобальных перемещений $\bar{\zeta}_i$ $(i=1,2,..,n)$ с локальными для каждого отдельного элемента (рис. 1,б) характеризуется матричным преобразованием $\bar{Z}_i = [\varphi_i]\,\bar{\zeta}_i$, где $\bar{Z}_i$ $(i=1,2,...,2n)$ - узловые перемещения модели механической системы в локальной системе координат, $[\varphi_i]$ - матрица поворота вектора перемещений. Топологическую структуру рассматриваемой механической модели можно охарактеризовать с помощью графа рамы, с вершинами которого ассоциируются конечные элементы, а с дугами – узлы или расчётные сечения, в которых отыскиваются деформации и внутренние усилия в раме (рис. 1,в) [1]. Ориентация графа определяется выбором направлений дуг графа [2-4].

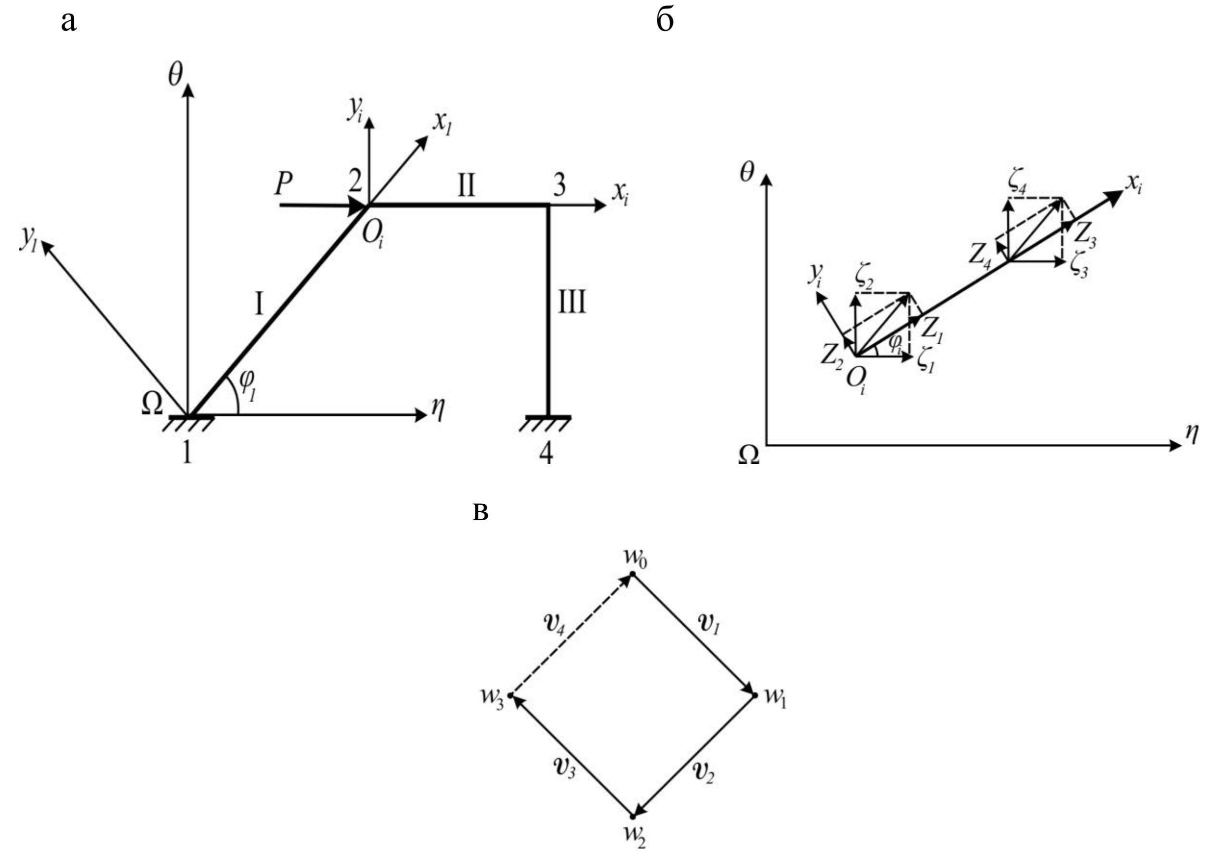


Рисунок 1

а) расчётная схема рамы, совмещённая с её механической моделью,

б) индексация узловых перемещений, в) граф модели

Данному графу со структурой «дерева» соответствует матрица инцидентности

$$[S]=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{(4\times 3)}.$$

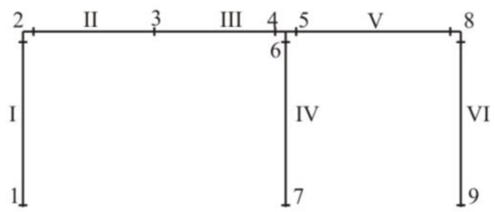
Элементы матрицы инцидентности, обозначаемые $s_{i,j}\ (i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n)$, определяются следующим образом:

$$s_{i,j}=\begin{cases} +1, & \textit{если } j-\textit{ая дуга } \upsilon_j \textit{ выходит из вершины } w_i, \\ -1, & \textit{если } j-\textit{ая дуга } \upsilon_j \textit{ входит в вершину } w_i, \\ 0, & \textit{в других случаях.} \end{cases}$$

В том случае, когда схема рамы имеет более сложную структуру (рис. 2,а), матрица инцидентности графа (рис. 2,б) обладает, естественно, большей размерностью

$$[S]_{(7\times 9)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

а



б

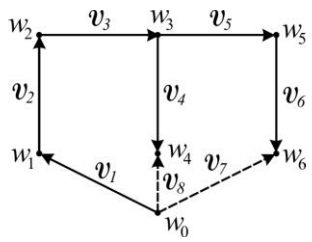
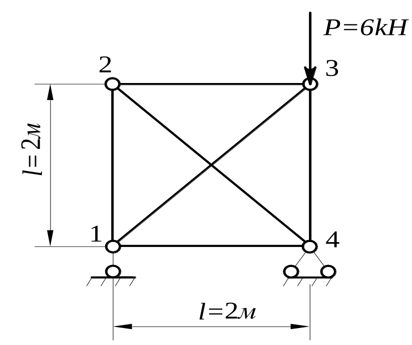


Рисунок 2

а) дискретная схема рамы, б) граф схемы

Иногда матрицу инцидентности можно составить для стержневой системы, даже не пытаясь перейти к графу. Например, для статически неопределимой фермы, приведенной на рис. 3,а, граф которой «построен» на рис. 3,б,

а



б

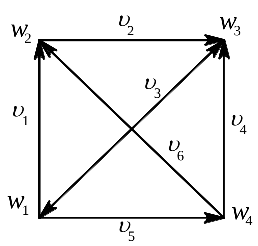


Рисунок 3

а) расчётная схема фермы, б) граф фермы

матрица инцидентности имеет вид

$$[S]=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Здесь, очевидно, стержням фермы соответствуют вершины графа, а узлам – дуги.

Геометрические параметры стержней, такие, как длины элементов и их углы наклона (в форме направляющих косинусов) с осями координат легко выразить, обратившись к матрицам инцидентности $[S]$ и координат узлов $[K]$.

Структура матрицы координат узлов плоской стержневой системы $[K]$ проста, а именно,

$$[K]=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_m \end{bmatrix}.$$

В первой строке матрицы располагаются абсциссы координат узлов $x_i \ (i=1,2,...,m)$, во второй – ординаты $y_i \ (i=1,2,...,m)$ соответствующих узлов; m – число узлов дискретной схемы или вершин графа. При этом нумерация узлов при формировании матрицы $[K]$ совпадает с той, что используется и при построении графа стержневой системы, и при формировании матрицы инцидентности.

Вычислив произведение указанных матриц

$$[U]=[K][S]^T, \qquad (1)$$

находят тем самым проекции длин стержней на оси глобальной системы координат; непосредственно длины элементов стержневой системы вычисляют по формуле

$$[L]=\sqrt[*]{\sum([U])^{*2}}. \qquad (2)$$

Символ $(\ldots)^{*2}$ в этом выражении означает возведение в квадрат каждого элемента матрицы $[U]$ с последующим суммированием квадратов элементов по столбцам и извлечением корней из полученных сумм.

В рассматриваемом примере (рис. 1) матрица координат узлов 1, 2 ,3, 4 в системе координат $\Omega\eta\theta$ имеет вид

$$[K]=\begin{bmatrix}0 & 2 & 6 & 6\\ 0 & 4 & 4 & 0\end{bmatrix}_{(2\times4)}.$$

Элементы строк произведения

$$[U]=[K][S]=\begin{bmatrix}0 & 2 & 6 & 6\\ 0 & 4 & 4 & 0\end{bmatrix}_{(2\times4)}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{(4\times3)}=\begin{bmatrix}2 & 4 & 0\\ 4 & 0 & -4\end{bmatrix}_{(2\times3)}$$

представляют собой проекции стержней на оси координат. Далее программным способом согласно (2) без труда находят длины элементов – матрицу длин

$$[L]=\begin{bmatrix}4,472 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

и косинусы углов их наклона. В дальнейшем формируют матрицы поворота вектора перемещений i - го узла

$$[\phi_i]=\begin{bmatrix}\cos\varphi_i & \sin\varphi_i\\ -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i\end{bmatrix} \quad (i=1,2,3),$$

с помощью которых осуществляется переход от глобальных перемещений $\bar{\zeta}_i$ $(i=1,2,3)$ к локальным для каждого отдельного элемента (рис. 1,б) в соответствии с матричным преобразованием $\bar{Z}_i=[\varphi_i]\,\bar{\zeta}_i,\ (i=1,2,3)$ [5].

Вывод. Показано, что формирование матриц длин и поворота конечных элементов стержневых систем можно осуществлять в автоматической форме на основе графа расчётной схемы стержневой системы.

Библиографический список:

1. Покровский А.А. Смешанная форма метода конечных элементов в линейных задачах: Учебное пособие. Пенза: Изд ПГУАС. 100 с.
2. Харари, Ф. Теория графов, перевод с англ. 1975. 300 с.
3. Fenves S. J., Branin F. H. Network-topological formulation of structures analysis // Journal of structural division. 1963, vol. 89. ST4, pp. 189-214.
4. Перельмутер, А. В. О применении теории графов к некоторым задачам строительной механики // Строительная механика и расчёт сооружений. 1965. №3. С. 6-13.
5. Монахов В. А., Потапова Т. Ю. Формирование матрицы скорости сложного движения точки // Известия вузов. Строительство. № 4. 2012. С. 87–93.