

УДК 624.04

КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Шейн Александр Иванович,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Механика».

Чуманов Александр Васильевич,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

аспирант, ассистент кафедры «Механика».

Аннотация

В статье описывается алгоритм расчета колебаний стержневых систем методом конечных элементов с учетом физической и геометрической нелинейностями. Учет физической нелинейности реализуется на основе кубической зависимости напряжений от относительной деформации элементов. Учет геометрической нелинейности производится за счет введения в расчет геометрической матрицы. Приведены результаты расчета в виде графиков перемещений узлов элемента локатора.

Ключевые слова: динамический расчет, колебания, физическая нелинейность, геометрическая нелинейность, метод переменных параметров упругости, геометрическая матрица

VIBRATIONS OF ROD SYSTEMS TAKING INTO ACCOUNT PHYSICAL AND GEOMETRIC NONLINEARITY

Shein Alexander Ivanovich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor, Head of the Department "Mechanics".

Chumanov Alexander Vasilyevich,

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,
Post-graduate student, Assistant of the Department "Mechanics".*

Annotation

The article describes an algorithm for calculating vibrations of rod systems by the finite element method, taking into account the physical and geometric nonlinearities. Accounting for physical non-linearity is implemented based on the cubic dependence of stresses on the relative deformation of elements. Geometric nonlinearity is taken into account by introducing a geometric matrix into the calculation. The calculation results are shown in the form of graphs of node movements of the locator element.

Keywords: dynamic calculation, vibrations, physical nonlinearity, geometric nonlinearity, method of variable elasticity parameters, geometric matrix.

Введение. Строительные конструкции и элементы сооружений под воздействием силовых факторов могут существенно менять свои формы и размеры, из-за чего принцип малых перемещений, на основе которого построены методы линейной строительной механики, не применим. При возникновении больших деформаций значения напряжений в элементах конструкций могут превышать предел упругости, а выражения для деформаций и напряжений будут содержать нелинейные слагаемые. Следовательно, для описания реальной работы таких конструкций необходимо учитывать эти факторы. В частности, при сейсмических воздействиях стержневые купола локаторов, антенн и других подобных сооружений могут получать большие изгибные перемещения. Это требует модернизации прямых методов решения дифференциальных уравнений колебательного движения механической системы для учета нелинейных составляющих деформаций и напряжений.

В данной статье приводятся формулы и описывается алгоритм расчета колебаний стержневых систем методом центральных разностей с учетом геометрической нелинейности и физической нелинейности материала на каждом шаге по времени. Учет физической нелинейности реализуем на основе

степенных многочленов зависимости напряжений от относительной деформации элементов. Учет геометрической нелинейности произведем за счет построения и введения в расчет геометрической матрицы.

1. Учет физической нелинейности материала

Для вывода формул определения деформаций примем следующее правило знаков:

- углы поворотов считаются положительными, если они отсчитаны против часовой стрелки (для наблюдателя, смотрящего от конца оси в начало координат), см. рис. 1б.

- моменты считаются положительными, если они вращают вокруг данной оси против часовой стрелки (для наблюдателя, смотрящего от конца оси в начало координат), см. рис. 1а.

Обозначим через u , v , w осевые смещения точек вдоль осей X , Y , Z , соответственно; φ_x , φ_y , φ_z - углы поворотов сечений стержня для случая малых деформаций вокруг осей X, Y, Z . Причем далее будем считать

$$\begin{aligned}\varphi_x &= \varphi, \\ -\varphi_y &= \frac{dw}{dx} = w', \\ \varphi_z &= \frac{dw}{dx} = w'\end{aligned}\tag{1}$$

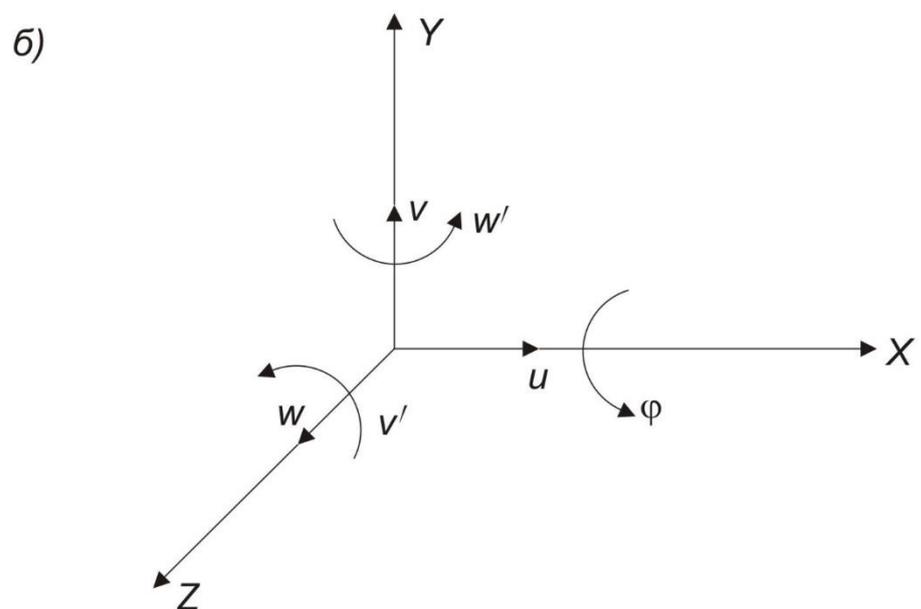
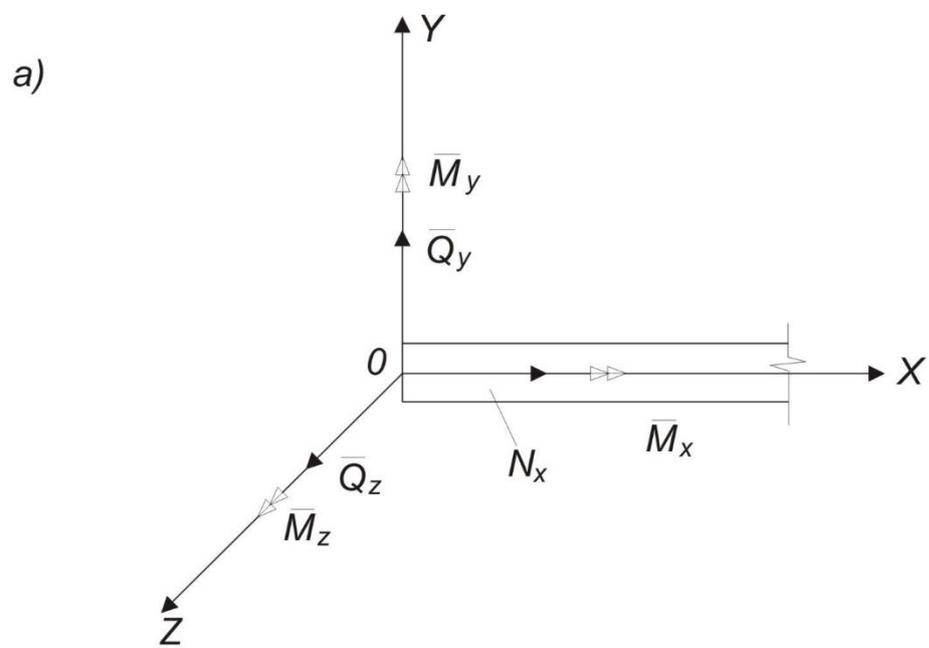


Рисунок 1 - Положительные направления:

а) силовых параметров;

б) кинематических параметров

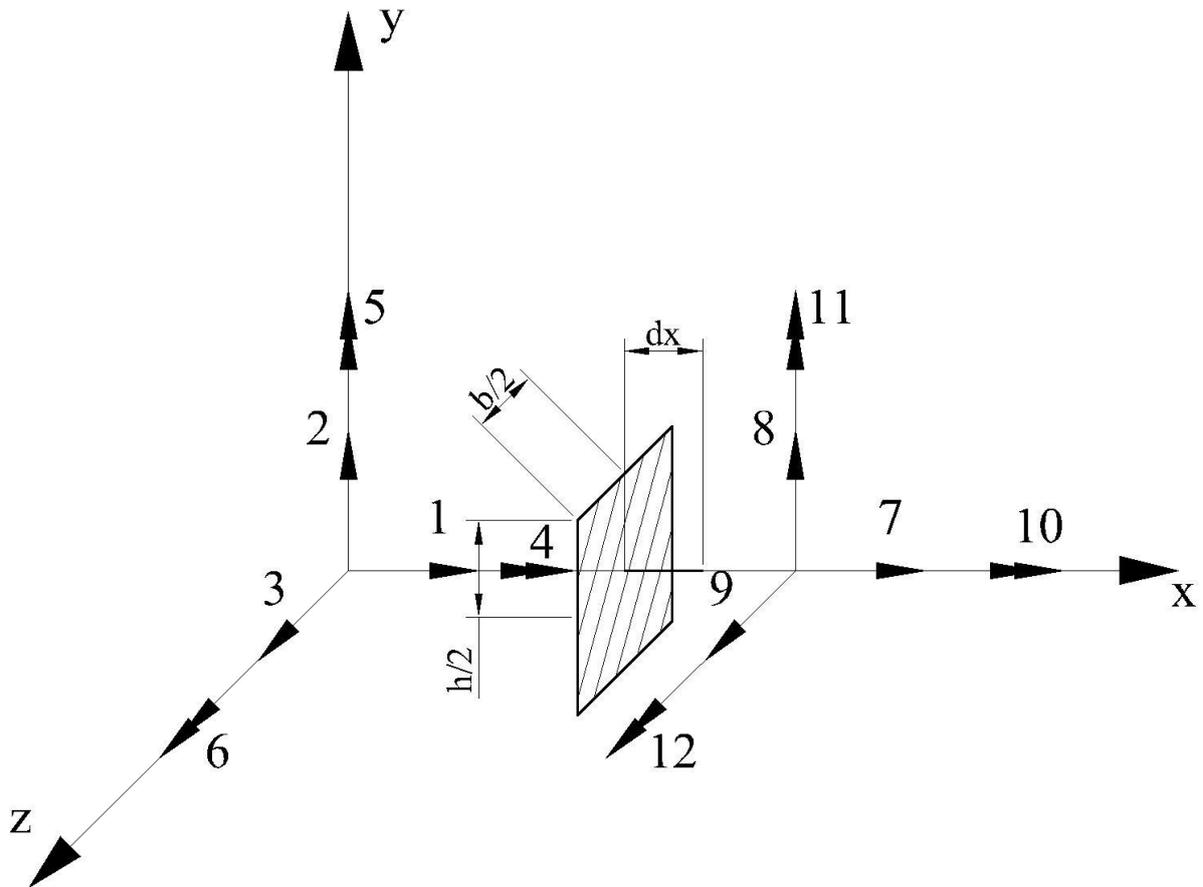


Рисунок 2 – Направление перемещений и деформаций в узлах стержня

При записи уравнений равновесия с учетом физической нелинейности удобно пользоваться зависимостями вида

$$\sigma = f(\varepsilon) \quad (2)$$

В достаточно общем виде такую зависимость (2) можно записать следующим образом [1,2,3,4]:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n A_i \cdot \varepsilon^{k_i} = A_1 \cdot \varepsilon^{k_1} + A_2 \cdot \varepsilon^{k_2} + \dots + A_n \cdot \varepsilon^{k_n}, \quad (3)$$

где A_i - некоторые физические константы, имеющие размерность напряжений;
 k_i - безразмерные показатели, которые могут быть любым положительным числом (целым, дробным).

Для низколегированных сталей удобно использовать диаграммы, аналитически выраженные степенными функциями, многочленами вида

$$\sigma = \sum_{k=1,3,5,\dots}^n E_k \cdot \varepsilon^k = E_1 \cdot \varepsilon \pm E_3 \cdot \varepsilon^3 \pm \dots \pm E_n \cdot \varepsilon^n \quad (4)$$

Для большинства практических расчетов можно ограничиться двумя членами этого ряда:

$$\sigma = \sum_{k=1,3}^n E_k \cdot \varepsilon^k = E \cdot \varepsilon - E_3 \cdot \varepsilon^3, \quad (5)$$

т.е. кубической зависимостью [3], обеспечивающей симметричность диаграммы относительно растяжения-сжатия.

Здесь E - начальный модуль упругости материала; а параметр

$$E_3 = \frac{4}{27} \cdot \frac{E^3}{\sigma_{\text{шт}}^2}, \quad (6)$$

$\sigma_{\text{шт}}$ – предел прочности материала.

Формула (5) одинаково удобна при аппроксимации зависимостей σ - ε как для бетона, так и для стали.

Деформация в точке сечения выражается через функции перемещений зависимостью

$$\varepsilon = u' - y \cdot v'' + z \cdot w'' \quad (7)$$

В (7) первое слагаемое выражает осевую деформацию, второе и третье слагаемые являются компонентами изгибной деформации. Подставляя (7) и (6) в (5) получим уравнение, устанавливающее зависимость между напряжениями и перемещениями u , v , w , φ_x , φ_y , φ_z .

Будем различать понятия статической и динамической жесткости элементов каркаса [5,6,7]. Под «статической» понимается жесткость, определенная при медленных процессах деформирования конструкций, а под «динамической» - жесткость, определенная при достаточно быстрых циклических процессах деформирования конструкций (обычно по частотам собственных колебаний).

При назначении статической жесткости исходят из диаграмм напряжения-деформации материалов, из которых состоит конструкция. При этом расчетным значениям соответствуют верхние пределы статических напряжений или деформаций материалов. Динамическую жесткость принимают, как правило, выше статической, но назначение абсолютной величины здесь связано с учетом влияния многих факторов.

Для большинства строительных материалов вид диаграммы σ - ε при разгрузке принимается по линейному закону. При нагружении вид диаграммы зависит от скорости возрастания нагрузки, однако сам характер деформирования при любой быстроте нагружения примерно сохраняется. Это дает возможность использовать и в динамических расчетах диаграммы, аналогичные статическим, но с корректировкой основных параметров, например предела прочности для бетона или предела временного сопротивления для низколегированной стали. Кроме того, при колебательных движениях конструкций происходят внутренние и внешние процессы, вызывающие переменное сопротивление движению.

2. Учет геометрической нелинейности

Для сжато-изогнутого (растянуто-изогнутого) точное выражение деформация- перемещения определяется зависимостью

$$\varepsilon = u' - y \cdot v'' + z \cdot w'' + \frac{1}{2} \cdot (v')^2 + \frac{1}{2} \cdot (w')^2. \quad (8)$$

В (8) три первых слагаемых известные компоненты осевой и изгибной деформации, а четвертый и пятый члены, которые являются нелинейными, учитывают изменение геометрии стержня от прогиба. Следовательно, потенциальная энергия деформации призматического стержня равна:

$$V_{\Pi} = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \int \int_A (\varepsilon_x)^2 \cdot dA \cdot dx \quad (9)$$

При представлении компонентов вектора перемещений стержня в виде

$$U = \left\{ u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \varphi_{x1} \quad \varphi_{y1} \quad \varphi_{z1} \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \varphi_{x2} \quad \varphi_{y2} \quad \varphi_{z2} \right\}^T, \quad (10)$$

дифференцируя выражение по этим компонентам, получаем известную матрицу жесткости пространственного стержня двенадцатого порядка k_n и k^Γ - так называемую геометрическую матрицу размерами [12x12], учитывающую изменение геометрии системы:

$$k^\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5 \cdot l} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5 \cdot l} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{6}{5 \cdot l} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5 \cdot l} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{2 \cdot l}{15} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{2 \cdot l}{15} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{2 \cdot l}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{2 \cdot l}{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5 \cdot l} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5 \cdot l} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{6}{5 \cdot l} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5 \cdot l} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & -\frac{l}{30} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{2 \cdot l}{30} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{l}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{2 \cdot l}{30} \end{bmatrix} \quad (11)$$

При этом уравнение равновесия конструкции примет известный вид:

$$(K_n - K^\Gamma)U = P. \quad (12)$$

При помощи этого уравнения можно решать задачу продольно-поперечного изгиба для пространственных стержневых систем или производить их расчет по деформированной схеме. Для решения динамических задач необходимо в дифференциальном уравнении движения механической системы

$$M\ddot{U} + B\dot{U} + KU = P(t), \quad (13)$$

матрицу жесткости представлять в виде:

$$K = K_n - K^\Gamma, \quad (14)$$

где M – диагональная матрица масс;

U – вектор перемещений системы;

B – матрица демпфирования (матрица сопротивления движению);

$P(t)$ – вектор узловых нагрузок, равный произведению величины ускорения по заданной акселерограмме (рис.2) землетрясения на массу соответствующего узла.

3. Алгоритм расчета. Для практического расчета нелинейных напряжений и деформаций воспользуемся методом последовательных приближений (метод переменных параметров упругости), разработанного И.А. Биргером [Справочник по строительной механике корабля, ч.2, под ред. Паляя] для решения задач статики, но модифицируем его для задач динамики. Для этого на каждом шаге по времени будем считать, что значения матрицы жёсткости K на каждом шаге по времени итерационно определяются через значения вектора $U_{t-\Delta t}$, полученного на предыдущем этапе упругого решения.

Алгоритм модифицированного метода переменных параметров упругости следующий:

$$1. U_{t+\Delta t} = \left(\frac{M}{(\Delta t)^2} + \frac{B}{2 \cdot \Delta t} \right)^{-1} \cdot \left(P_t - M \cdot \frac{U_{t-\Delta t} - 2 \cdot U_t}{(\Delta t)^2} + B \cdot \frac{U_{t-\Delta t}}{2 \cdot \Delta t} - K(U_{t-\Delta t}) \cdot U_t \right) \quad (15)$$

На первом шаге итерации по параметрам упругости используем упругое решение с начальным модулем упругости E .

2. По значениям перемещений определяем составляющие деформации ε_x :

$$u_i' = \frac{u_{i7} - u_{i1}}{l_i} \quad (16)$$

$$w_i'' = 2 \cdot \left(\frac{-3 \cdot u_{i3} - 2 \cdot u_{i5} \cdot l_i + 3 \cdot u_{i9} - 3 \cdot u_{i11} \cdot l_i}{(l_i)^2} + 3 \cdot \frac{2 \cdot u_{i3} + u_{i5} \cdot l_i - 2 \cdot u_{i9} + u_{i11} \cdot l_i}{(l_i)^2} \right) \quad (17)$$

$$v_i'' = 2 \cdot \left(\frac{-3 \cdot u_{i2} - 2 \cdot u_{i6} \cdot l_i + 3 \cdot u_{i8} - 3 \cdot u_{i12} \cdot l_i}{(l_i)^2} + 3 \cdot \frac{2 \cdot u_{i2} + u_{i6} \cdot l_i - 2 \cdot u_{i8} + u_{i12} \cdot l_i}{(l_i)^2} \right) \quad (18)$$

$$\varepsilon_{x,i} = u_i' - y \cdot v_i'' + z \cdot w_i'' \quad (19)$$

Деформации целесообразно определять в наиболее удаленных точках сечения. Например, для прямоугольного сечения (см. рис. 2) $z = \pm \frac{b}{2}$, $y = \pm \frac{h}{2}$

3. Определяем напряжения

$$\sigma_{x,i} = E \cdot \varepsilon_{x,i} - E_3 \cdot (\varepsilon_{x,i})^3 \quad (20)$$

4. Определяем секущие модули упругости для элементов конструкции

$$E_i = \frac{\sigma_{x,i}}{\varepsilon_{x,i}} \quad (21)$$

5. Выполняем проверку

$$|E_i - E_{i-1}| \leq \delta, \quad (22)$$

где δ - заданная норма погрешности.

При выполнении этого соотношения заканчиваем расчет и переходим к новому шагу по времени. В противном случае переходим к пункту 1.

3. Результаты динамических расчетов.

Динамический расчет производился на примере локатора, радиусом 4 м, высотой стрелы подъема 0,8 м (рис.3). К узлам локатора приложили нагрузку, которая изменяется по закону:

$$\begin{aligned} P_x &= 10M_i \cdot \sin(20 \cdot t); \\ P_y &= 10M_i \cdot \sin(20 \cdot t) - M_i \cdot g; \\ P_z &= 10M_i \cdot \sin(20 \cdot t); \end{aligned}$$

По результатам расчета элемент 22 подвергается одним из наибольших относительных деформаций (отмечен на рис.3а красным). На рис. 4 показана диаграмма напряжения-деформации для элемента 22 под действием данной нагрузки. На рисунках 5-7 изображены графики линейных перемещений вдоль глобальных координатных осей.

Красный график перемещений – без учета нелинейности.

Синий график перемещений – с учетом нелинейности.

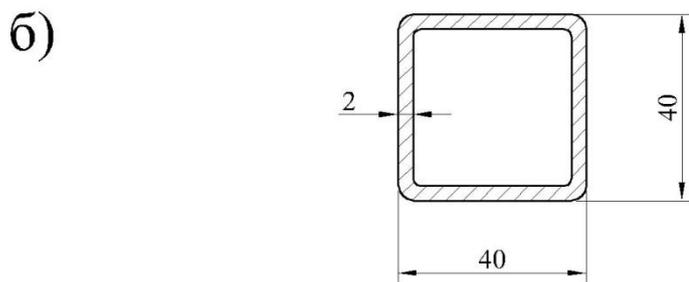
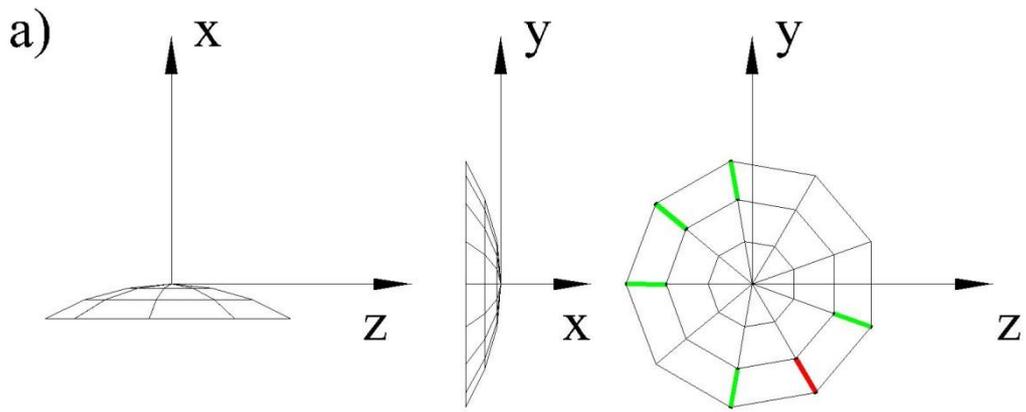


Рисунок 3 – а) Расчетная схема локатора;

б) Поперечное сечение всех элементов

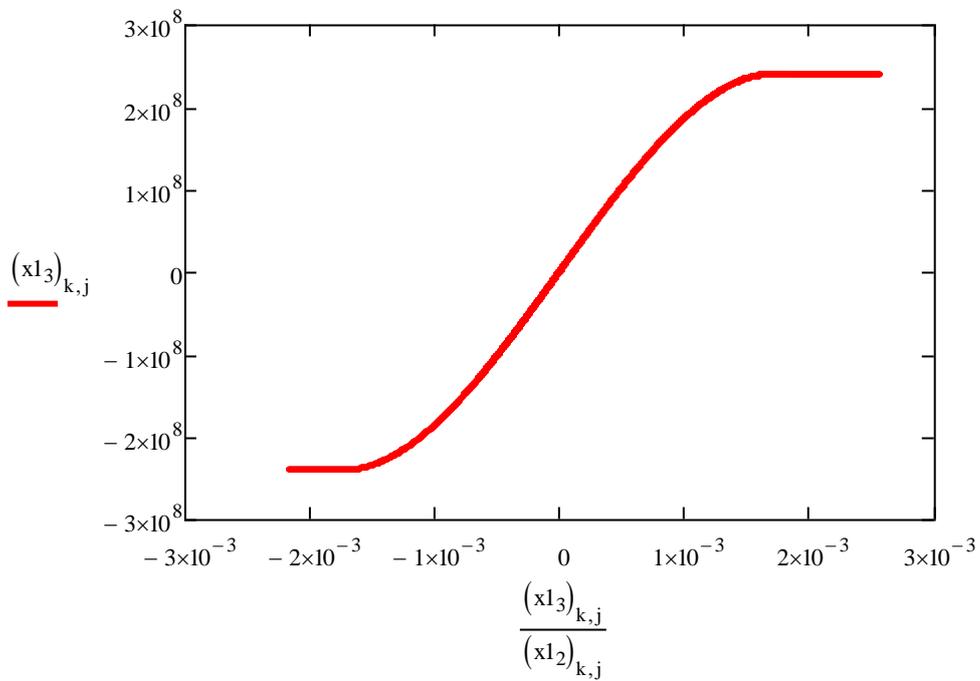


Рисунок 4 – Диаграмма напряжения-деформации для элемента 22

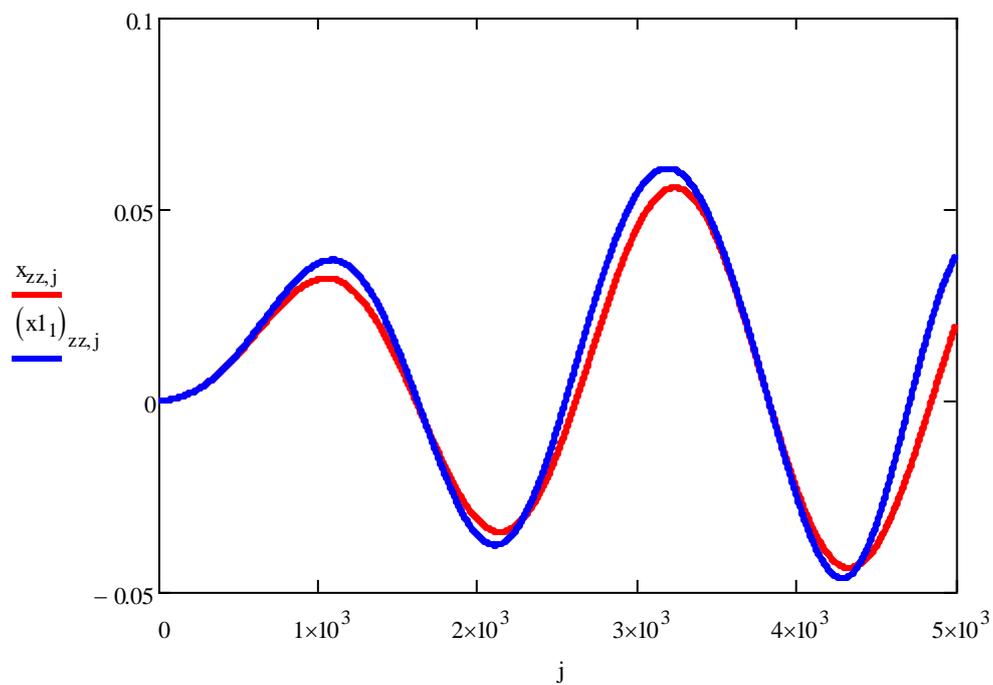


Рисунок 5 – Перемещение вдоль оси x

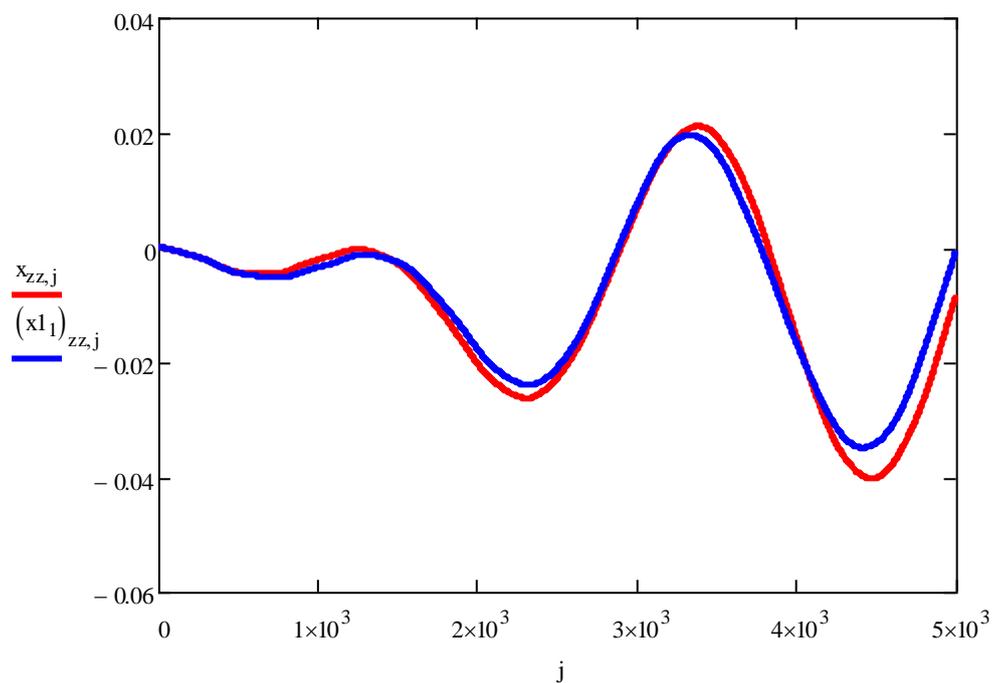


Рисунок 6 – Перемещение вдоль оси y

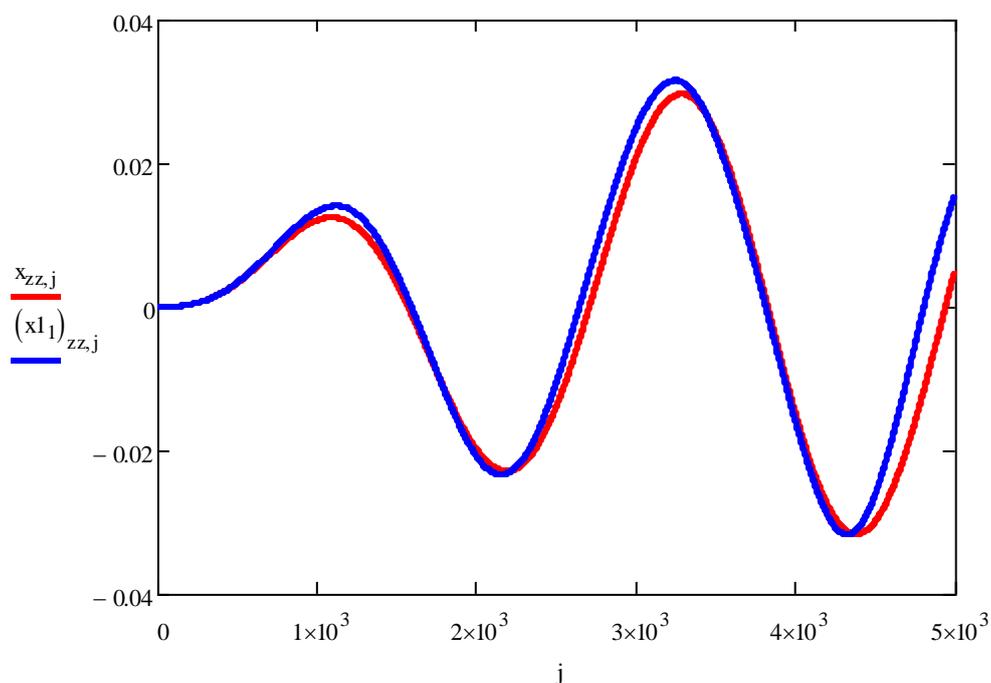


Рисунок 7 – Перемещение вдоль оси z

Выводы.

В работе построен и численно реализован расчет колебаний купольной системы в физически и геометрически нелинейном виде. В данном расчете выявлено 6 элементов, напряжения в которых достигают предельных значений (отмечены красным и зелёным на рис.3а). На основе результатов расчета наблюдается увеличение амплитуды перемещений вдоль осей x и z до 9 и 7,5 %, соответственно, и уменьшение амплитуды колебаний вдоль оси y до 12%.

Учет физической и геометрической нелинейности показал значительные отклонения результатов нелинейных расчетов от значений линейных расчетов.

Библиографический список:

1. Астафьев Д.О. Расчет реконструируемых железобетонных конструкций. СПб.: ГАСУ, 1995. 48 с.

2. Болотин В.В. Уругопластический анализ несущих элементов зданий и сооружений при интенсивных сейсмических воздействиях / В.В. Болотин, В.Н. Радин, В.П. Чирков // Изв. вуз. Строительство. 2002. №6. С. 4-9.

3. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики. М.: Стройиздат, 1978. 208 с.

4. Расчет конструкций, работающих в упруго – пластической стадии / Под. ред. А.В. Геммерлинга // Тр. ЦНИИСК. 1961. Вып. 7. 336 с.

5. Попов В.Н. Вопросы динамического расчёта железобетонных конструкций / В.Н. Попов , О.Г. Кумпляк, В.С. Плевков. Томск: Изд-во ун-та, 1990. 286 с.

6. Рябов Н.С. Учет искривления плоских сечений в теории движения балок // Строительная механика и расчёт сооружений. 1984. №3. С.50-55.

7. Смирнов А.Ф. Статическая и динамическая устойчивость сооружений. М.: Трансжелдориздат, 1947.