

УДК 624.042.8:534.1

**СООТНОШЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ФОРМ
КОЛЕБАНИЙ В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ
ДИССИПАТИВНЫХ СИСТЕМАХ**

Потапов Александр Николаевич,

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск,

доктор технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Строительная механика», профессор кафедры.

Аннотация

Показано, что в отличие от упругих колебаний собственные формы упругопластической системы подразделяются на два вида: колебательные и апериодические (монотонные). Приведены соотношения обобщённой ортогональности собственных форм упругопластической диссипативной системы. Результаты иллюстрируются на примере упругопластических колебаний трёхэтажного каркаса.

Ключевые слова: упругопластическая система, диссипативная система, собственная форма, колебание, ортогональность, вектор, матрица, уравнение.

**ORTHOGONALITY RELATIONS OF NATURAL MODES IN
ELASTOPLASTIC DISSIPATIVE SYSTEMS**

Potapov Alexander Nikolaevich,

South-Ural State University, Chelyabinsk,

Doctor of Sciences, Associate Professor, Head of the department “Structural Mechanics”.

Abstract

It is shown that in contrast to the elastic oscillations the eigenmodes of the elastoplastic system are divided into two types: oscillatory and aperiodic (monotone).

The ratios of the generalized orthogonality of the eigenmodes of the elastoplastic dissipative system are shown. The results are illustrated by the example of oscillations of the elastoplastic three-story frame.

Keywords: elastoplastic system, dissipative system, eigenmode, oscillation, orthogonality, vector, matrix, equation.

1. Вводная часть. Формы собственных колебаний определяются деформированным состоянием системы, вызванным действием инерционных и диссипативных сил. Собственные формы линейно-деформируемой системы остаются неизменными в процессе колебаний, то есть их конфигурация не зависит от времени. Это означает, что отношение двух любых ординат k -й собственной формы есть постоянная величина: $p_{jk} / p_{ik} = \text{const}$ (рисунок 1, а).

Иначе обстоит дело с упругопластической системой.

При колебаниях конструкции за пределом упругости в наиболее опасных сечениях (элементах) возникают пластические деформации. Появление текучести влечёт за собой изменение несущей способности системы и снижение её упругого потенциала. Вследствие изменения жесткостных свойств системы действие инерционных и диссипативных сил, приложенных к массам сооружения, сопровождается перераспределением полей напряжений. Это приводит к изменению конфигурации собственных форм. Поэтому отношение ординат p_{jk} и p_{ik} произвольной k -й собственной формы упругопластической системы, взятое в различные моменты времени, уже не будет постоянной величиной: $p_{jk} / p_{ik} \neq \text{const}$ (рисунок 1, б).

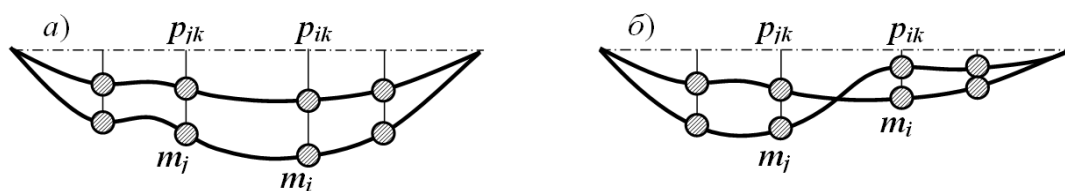


Рисунок 1 – k -я собственная форма в процессе колебаний:

а – упругой системы; б – упругопластической системы

Обозначим через P_k ($k = 1, \dots, n$) формы собственных колебаний дискретной системы. Эти формы обладают замечательными свойствами, известными как условия ортогональности. Для упругой консервативной системы эти условия записываются в виде скалярных соотношений [1, 2]:

$$P_l^T M P_k = 0, \quad P_l^T K P_k = 0 \quad (k, l = 1, \dots, n; k \neq l), \quad (1)$$

где $M = \text{diag}(m_1, \dots, m_n)$, $K = K^T$ – матрицы масс и жесткости системы.

Соотношения (1) показывают, что формы колебаний ортогональны как по отношению к матрице масс, так по отношению к матрице жёсткости.

При колебаниях дискретных диссипативных систем (ДДС) матрицу демпфирования C обычно выбирают так, чтобы уравнения движения можно было привести к нормальным координатам. В этом случае матрица C соответствует модели пропорционального (однородного) демпфирования [3], а условия ортогональности принимают такой же вид, как и для консервативной системы, с той лишь разницей, что к равенствам (1) добавляется ещё одно условие

$$P_l^T C P_k = 0 \quad (k \neq l), \quad (2)$$

в котором формы колебаний ортогональны по отношению к матрице C . Наличие условий (1) и (2) является следствием разделения всех трёх сил в уравнении движения: инерции, упругости и демпфирования.

Следует, однако, отметить, что реальное демпфирование в диссипативных конструкциях оказывается более сложным и не подчиняется модели пропорционального демпфирования, поэтому уравнения движения в общем случае приводятся к нормальным координатам. В связи с этим и соотношения ортогональности имеют более сложный вид [4, 5].

В [6] выведены матричные соотношения обобщённой ортогональности собственных форм упругих колебаний ДДС с произвольной симметрической матрицей демпфирования C . В основу разработанной теории положен математический аппарат, связанный с анализом характеристического матричного квадратного уравнения, представляющего собой уравнение движения форм собственных колебаний. Данное уравнение (3) и его аналог (4), полученный пу-

тём разложения в базисе из собственных векторов, имеют вид

$$MS^2 + CS + K = 0, \quad (3)$$

$$MP\Lambda^2 + CP\Lambda + KP = 0, \quad (4)$$

где $S = P\Lambda P^{-1}$ – матрица внутренних динамических характеристик системы;

$P = [P_1, \dots, P_n]$ – матрица собственных векторов (форм колебаний);

$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ – диагональная матрица спектральных характеристик.

Каждому вектору P_k , определяющему k -ю собственную форму демпфированных колебаний, соответствует характеристическое число λ_k . При малой диссипации и упругих колебаниях оно является комплексным: $\lambda_k = -\varepsilon_k + i\omega_k$, где ε_k – коэффициент демпфирования, ω_k – частота собственных колебаний.

Решение уравнения (3) записывается в виде корневой пары

$$S_{1,2} = M^{-1}(-C + V \pm U)/2, \quad (5)$$

где матрицы V и U обладают свойствами $V = -V^T$, $U = U^T$. При условии нормирования матрицы собственных форм P матрица U определяется по формуле $U = (PP^T)^{-1}$.

2. Обобщенная ортогональность собственных форм упругой ДДС.

Уравнение (3) сводится к системе эквивалентных уравнений:

$$S^T M + MS + C = U, \quad S^T MS - K = US,$$

которые после преобразования в базисе собственных векторов матрицы S трансформируются к виду:

$$\Lambda P^T M P + P^T M P \Lambda + P^T C P = E, \quad \Lambda P^T M P \Lambda - P^T K P = \Lambda. \quad (6)$$

Первое матричное уравнение в (6) является соотношением обобщенной ортогональности матрицы P . В отличие от традиционных условий ортогональности (1), (2) это уравнение содержит связанные общим соотношением матрицы M , C и диагональную форму Λ . Второе уравнение в (6) суть диагональная форма записи уравнения движения собственных форм (3). Левая часть этого уравнения представляет собой алгебраическую сумму двух слагаемых, каждое из которых в общем случае не является диагональной матрицей.

Переходя в первом уравнении (6) к системе n^2 скалярных уравнений, по-

лучим соответственно $n(n-1)$ условий ортогональности собственных форм P_k, P_l (при $k \neq l$) и n условий их нормирования (при $k = l$):

$$P_l^T [M(\lambda_l + \lambda_k) + C] P_k = 0, \quad (7)$$

$$P_k^T [2M\lambda_k + C] P_k = 1 \quad (k, l = 1, \dots, n). \quad (8)$$

Из условия диагонализации второго уравнения в (6) также следует n^2 скалярных соотношений, причём $n(n-1)$ условий, аналогичных соотношениям ортогональности, вытекает при $k \neq l$ и n условий при $k = l$:

$$P_l^T [M\lambda_l \lambda_k - K] P_k = 0, \quad (9)$$

$$P_k^T [M\lambda_k^2 - K] P_k = \lambda_k \quad (k, l = 1, \dots, n). \quad (10)$$

В частном случае консервативной системы ($C = 0, \varepsilon_l = \varepsilon_k = 0$) формулы (7), (9), ввиду $(\lambda_l + \lambda_k) = i(\omega_k + \omega_l) \neq 0$, приводят к соотношениям (1).

Ниже показаны условия, при которых соотношения ортогональности (7), (9) становятся применимыми к упругопластической системе.

3. Теоремы состояний в упругопластических системах. В [6] предложены математические модели, реализующие диаграмму деформирования идеально-упругопластического материала Прандтля (рисунок 2) и позволяющие в рамках теории пластического течения использовать вычислительную схему промежуточных состояний. В соответствии с этой схемой весь процесс реакции разбит на ряд интервалов (t_i, t_{i+1}) , внутри которых динамические параметры (в частности элементы матрицы жёсткости $K(t_i)$) расчётной модели неизменны, а на границах (в моменты возникновения или закрытия пластических шарниров) происходит их скачкообразное изменение. Такой подход позволил на квазиупругих интервалах (между временными критическими точками) использовать теорию упругих систем.

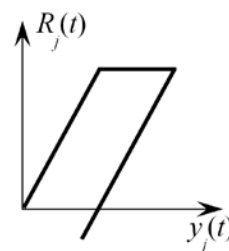


Рисунок 2 – Диаграмма деформирования Прандтля
«Восстанавливающая сила – относительное перемещение»

Появление текучести сопровождается снижением жесткостных парамет-

ров расчётной модели, что удобно отслеживать на определителе матрицы жёсткости. В качестве критерия невырожденного и вырожденного состояний упругопластической системы на квазиупругом интервале $t \in [t_i, t_{i+1}]$ приняты, соответственно, условия $\det K(t_i) > 0$ и $\det K(t_i) = 0$, позволяющие сформулировать теоремы состояний. Теоремы дают качественную оценку состояния системы в зависимости от свойств её внешних и внутренних динамических параметров. К внешним динамическим параметрам относятся жесткостные характеристики расчётной модели (в строгом смысле к ним также относятся параметры инерции и демпфирования). К внутренним динамическим параметрам – её спектральные характеристики: собственные частоты ω_k , коэффициенты демпфирования ε_k и собственные формы P_k , являющиеся собственными значениями матриц корневой пары (5): S_m ($m = 1, 2$).

Теорема 1 (об условии невырожденного состояния квазиупругой системы): *матрица жесткости $K(t_i)$ квазиупругой системы невырождена тогда и только тогда, когда невырожденны обе матрицы S_1, S_2 в корневой паре (5):*

$$\det K(t_i) > 0 \Leftrightarrow \det S_m \neq 0 \quad (m = 1, 2). \quad (11)$$

Факт невырожденности обеих матриц S_m выражают графики частотных спектров упругопластической системы на всём интервале её реагирования (рисунок 3а), а также при $t \notin [t_i, t_j]$ (рисунок 3б, в). Согласно (11) количество пластических шарниров в системе ещё не достигло такого числа, при котором образуется пластический механизм. Поэтому поведение системы характеризуется чисто количественными изменениями динамических параметров.

Теорема 2 (об условии вырожденного состояния квазиупругой системы): *при полной диссипации матрица жесткости $K(t_i)$ квазиупругой системы вырождена тогда и только тогда, когда одна из матриц S_1, S_2 в корневой паре (5) вырождена, а другая – нет:*

$$\det K(t_i) = 0 \Leftrightarrow \det S_m = 0, \det S_r \neq 0 \quad (m, r = 1, 2; \quad m \neq r). \quad (12)$$

В вырожденном состоянии образуется пластический механизм. Система становится кинематически изменяемой, а часть её частотного спектра – нуле-

вой: интервалы $t \in [t_i, t_j]$ (рисунок 1 б), $t \in [t_i, t_q]$, $t \in [t_{q+1}, t_j]$ (рисунок 3в).

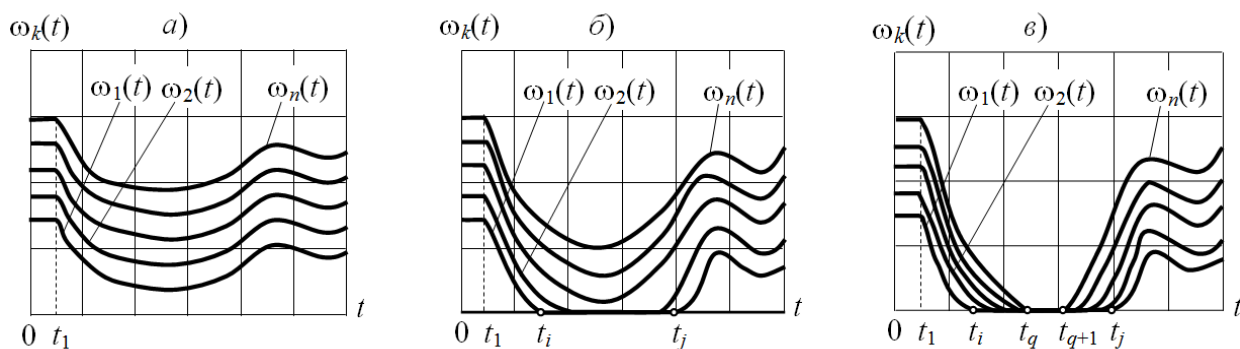


Рисунок 3 – Частотные спектры упругопластической системы при:

- а – невырожденном состоянии на всем интервале реагирования системы;
- б – вырожденном состоянии (пластический механизм на интервале $t \in [t_i, t_j]$);
- в – ПВС на интервале $t \in [t_q, t_{q+1}] \subset [t_i, t_j]$

С ростом текучести возможно образование избыточного пластического механизма и полное исчерпание упругого потенциала ДДС (временной отрезок $t \in [t_q, t_{q+1}] \subset [t_i, t_j]$ на рисунке 3в). Матрица жёсткости и весь частотный спектр становятся равными нулю. Достигается *предельно вырожденное состояние* (ПВС).

Теорема 3 (об условии ПВС квазиупругой системы): *пусть матрица демпфирования положительно определена. Матрица жесткости квазиупругой системы принимает нулевое значение тогда и только тогда, когда один из матричных корней в (5) нулевой, а другой – невырожден:*

$$K(t_q) = 0 \Leftrightarrow S_m = 0, \quad S_r = -M^{-1}C \quad (m, r = 1, 2; \quad m \neq r). \quad (13)$$

Важным результатом теорем 2 и 3 является следующее. Согласно теореме 2 в вырожденном состоянии квазиупругой системы спектр матричного корня S_m содержит хотя бы одно нулевое характеристическое число, например $\lambda_j^{(m)} = 0$ (т.е. $\varepsilon_j^{(m)} = \omega_j^{(m)} = 0$). Тогда соответствующее ему число $\lambda_j^{(r)}$ из спектра матрицы S_r может быть только вещественным (т.е. $\lambda_j^{(r)} = -\varepsilon_j^{(r)}$). Следовательно, с образованием пластического механизма часть собственных форм или хотя бы одна из них, j -я собственная форма, соответствующая нулевой частоте $\omega_j(t) = 0$

(см. частотные кривые при $t \in [t_i, t_j]$ на рисунке 3, б), не является колебательной: $\varphi_j(t) = A_j + B_j e^{-\varepsilon_j t}$.

Отсюда можно заключить, что с появлением пластического механизма движение упругопластической ДДС усложняется. Часть собственных форм совершает колебательные движения, другая часть подчинена монотонному (апериодическому) закону. Во всех случаях характер движения – затухающий.

Из теоремы 3 следует, что в ПВС ввиду нулевого спектра матрицы S_m : $\lambda_j^{(m)} = 0$ ($j = 1, \dots, n$), все собственные формы упругопластической системы будут совершать на интервале $t \in [t_q, t_{q+1}]$ аperiодическое движение (рисунке 3 в).

Таким образом, в вырожденном состоянии упругопластической ДДС можно выделить два равноправных и качественно отличающихся друг от друга вида собственных форм. Это формы с колебательным движением, соответствующие ненулевым значениям частот, и формы с аperiодическим движением, соответствующие нулевой части частотного спектра.

4. Обобщенная ортогональность собственных форм упругопластической ДДС.

Условия теоремы 1. При невырожденном состоянии в частотном спектре упругопластической системы отсутствуют нулевые значения (рисунок 3а). Поэтому все собственные формы – колебательные и $2n(n-1)$ соотношений ортогональности имеют вид, аналогичный (7), (9).

Условия теоремы 2. По условию вырожденного состояния частотный спектр упругопластической системы содержит нулевые значения (рисунок 3б), поэтому матрица P собственных форм включает в себе векторы как колебательных, так и монотонных собственных форм. Отсюда имеем условия ортогональности трёх видов. Первый вариант: обе собственные формы P_k, P_l ($k \neq l$) в соотношении ортогональности являются колебательными; второй: обе собственные формы – монотонные. Наконец, третий вариант – смешанный, когда одна форма колебательная, другая – монотонная.

В случае первого варианта соотношения ортогональности идентичны вы-

ражениям (7), (9). При втором варианте векторам монотонных собственных форм P_k, P_l ($k \neq l$) будут соответствовать нулевые частоты $\omega_k = \omega_l = 0$. Поэтому соотношения ортогональности примут вид:

$$P_l^T[-M(\varepsilon_l + \varepsilon_k) + C]P_k = 0, \quad P_l^T[M\varepsilon_l\varepsilon_k - K(t_i)]P_k = 0. \quad (14)$$

Наконец, для третьего варианта, полагая k -ю собственную форму (вектор P_k) монотонной, а l -ю (вектор P_l) колебательной, будем иметь: $\omega_k = 0, \omega_l \neq 0$. Тогда соотношения ортогональности смешанных форм примут вид ($k \neq l$):

$$P_l^T[M(\lambda_l - \varepsilon_k) + C]P_k = 0, \quad P_l^T[M\lambda_l\varepsilon_k + K(t_i)]P_k = 0. \quad (15)$$

Условия теоремы 3. В ПВС весь частотный спектр упругопластической системы – нулевой на интервале $t \in [t_q, t_{q+1}]$ (рисунок 3в). Поэтому имеем $2n(n-1)$ соотношений ортогональности собственных форм движения монотонного типа. Учитывая, что в (14) $\varepsilon_l\varepsilon_k \neq 0$, получим ($k \neq l$):

$$P_l^T M P_k = 0, \quad P_l^T C P_k = 0. \quad (16)$$

Эти формулы совпали с соотношениями ортогональности (1), (2) для упругой ДДС, в которой матрица C удовлетворяет условиям разделимости. При этом условие $P_l^T K(t_i) P_k = 0$ выполняется тождественно, ввиду $K(t_i) = 0$.

В отношении векторов P_k, P_l ($k, l = 1, \dots, n$) собственных форм, входящих в выражения (14)-(16) необходимо сделать следующие замечания.

В отличие от задачи упругих колебаний с малой диссипацией, где оба матричных корня S_1, S_2 в (5) невырождены и имеют простой спектр, при упругопластических колебаниях диссипативной конструкции структура матричных корней становится более сложной. Согласно условиям теорем состояний 2 и 3, только один матричный корень S_r – всегда невырожден, а второй – S_m ($m \neq r$) либо вырожден, либо нулевой.

Для вырожденной матрицы S_m базис из собственных векторов может не существовать [5], что обусловлено наличием кратных (нулевых) собственных значений. Поэтому приведённые выше соотношения ортогональности (14)-(16) необходимо строить в базисе из собственных векторов (форм) P_k, P_l ($k \neq l$) невырожденной матрицы $S_r = P \Lambda P^{-1}$ в (12) и (13).

5. Пример. Справедливость формул (14)-(16) иллюстрируется на примере упругопластических колебаний железобетонного 3-этажного здания под действием импульсов: $P(t) = P_0 \sin \theta t$, где $\theta = \pi/t_a$, $t_a = 0.8c$ – продолжительность импульсов, $P_0 = [8, 5, 5]^T$ (кН) – вектор амплитуд (рисунок 4). Коэффициенты жесткости колонн k_j составили: $k_1 = k_2 = 2.4$ кН/см, $k_3 = 3$ кН/см. Более подробная информация по этой задаче приведена в [6].

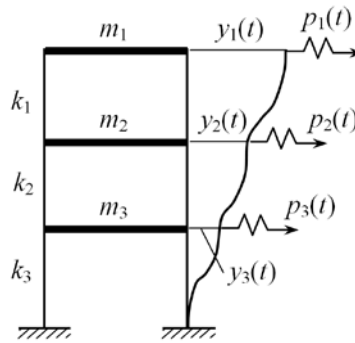


Рисунок 4 – РДМ 3-этажного каркаса

Матрицы масс, жёсткости и демпфирования составили:

$$M = \text{diag} (0.1, 0.2, 0.2) \text{ (кНс}^2/\text{см)},$$

$$K = \begin{bmatrix} 4.8 & -4.8 & 0 \\ -4.8 & 9.6 & -4.8 \\ 0 & -4.8 & 10.8 \end{bmatrix} \text{ (кН/см)}, \quad C = \begin{bmatrix} 2.205 & -2.205 & 0 \\ -2.205 & 4.4106 & -2.142 \\ 0 & -2.142 & 4.678 \end{bmatrix} 10^{-2} \text{ (кНс/см)}.$$

Упругий режим колебаний рамы происходит на интервале $t \in [0, 0.424]c$.

В этом состоянии матрицы внутренних динамических характеристик имеют вид:

$$S_{1,2} = \begin{bmatrix} -0.110266 \pm i6.319492 & +0.110165 \mp i3.971045 & +0.000093 \mp i0.567763 \\ +0.055183 \mp i1.985523 & -0.110266 \pm i6.035622 & +0.054483 \mp i1.914593 \\ -0.000047 \mp i0.283882 & +0.052630 \mp i1.914593 & -0.116955 \pm i7.082126 \end{bmatrix} (c^{-1}).$$

Спектральные характеристики матрицы S_1 (матрица собственных форм P и диагональная форма Λ) принимают значения:

$$P = \begin{bmatrix} +0.572633 - i0.572716 & +0.342044 - i0.342623 & +0.284308 - i0.283444 \\ +0.485181 - i0.485234 & -0.027902 + i0.028873 & -0.252555 + i0.252344 \\ +0.249624 - i0.249426 & -0.337819 + i0.337444 & +0.164600 - i0.165666 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda = \text{diag} (-0.016712 + i2.707579, -0.114922 + i7.208907, -0.205852 + i9.520754) (c^{-1}).$$

Значения P и Λ удовлетворяют соотношениям (6) при их подстановке в левую часть этих уравнений.

При $t_1 = 0.424$ с начинается текучесть в концевых сечениях колонн верхнего этажа. Матрица жёсткости становится вырожденной:

$$K(t_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.8 & -4.8 \\ 0 & -4.8 & 10.8 \end{bmatrix} (\text{кН/см}).$$

Согласно условию теоремы (2) матрицы внутренних динамических характеристик обладают свойством: $\det S_1 = 0$, $\det S_2 \neq 0$ и, следовательно, одна из собственных частот матрицы S_1 равна нулю. Для невырожденной матрицы S_2 значения матрицы форм P и диагональной матрицы спектра Λ составили:

$$P = \begin{bmatrix} +i6.733832 & -0.034777 + i0.038104 & +0.004982 - i0.005192 \\ -i0.012284 & +0.540215 + i0.541914 & -0.191738 - i0.186680 \\ -i0.005455 & +0.301343 + i0.298127 & +0.340080 + i0.342882 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda = \text{diag} (-0,220934, -0.066242 - i3.267352, -0.16078 - i8.201663) (c^{-1}).$$

В векторе P_1 заключена монотонная, в векторах P_2, P_3 – колебательные формы.

Проводя вычисления левой части соотношений в (6), имеем:

$$\Lambda P^T M P + P^T M P \Lambda + P^T C P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda P^T M P \Lambda - P^T K P = \begin{bmatrix} -0.220934 & 0 & 0 \\ 0 & -0.066242 - i3.267352 & 0 \\ 0 & 0 & -0.16078 - i8.201663 \end{bmatrix}.$$

Диагональные элементы полученных матриц совпадают с соответствующими элементами матриц E и Λ . Для внедиагональных элементов реализуются условия обобщённой ортогональности. Причём ортогональность монотонной формы P_1 и колебательной P_2 (и P_3) выполняется в соответствии с (15). Ортогональность колебательных форм P_2 и P_3 реализуется по формулам (7) и (9).

При $t_3 = 0.5260$ с имеет место текучесть в несущих конструкциях всех этажей каркаса. В этом случае матрица жесткости равна: $K(t_3) = 0$ и уравнения

(б) принимают упрощённый вид: $P^T M P = \Lambda^{-1}$, $P^T C P = -E$. По условию ПВС (теорема 3) имеем: $S_1 = 0$, $S_2 = -M^{-1}C$ и тогда все собственные формы матрицы S_2 являются монотонными:

$$P = i \begin{bmatrix} -10.24991 & +3.743058 & -2.819849 \\ -8.698355 & -0.154101 & +2.447962 \\ -4.646285 & -3.840181 & -1.472498 \end{bmatrix}; \Lambda = \begin{bmatrix} -0.033382 & 0 & 0 \\ 0 & -0.229611 & 0 \\ 0 & 0 & -0.411979 \end{bmatrix} (c^{-1}).$$

Условия обобщенной ортогональности собственных векторов в ПВС подчиняются соотношениям (16) $P_l^T M P_k = 0$, $P_l^T C P_k = 0$ ($k, l = 1, 2, 3$; $k \neq l$).

Выводы. На основе теорем состояний показано, что собственные формы диссипативной системы при упругих и упругопластических колебаниях качественно отличаются друг от друга. Из приведённого анализа следует, что традиционные (классические) соотношения ортогональности собственных форм есть частный случай более общих соотношений, проявляющихся в динамической системе независимо от характера колебаний конструкции (при наличии или отсутствии пластических деформаций), условий демпфирования и вида внешнего воздействия.

Библиографический список:

1. Клаф Р., Пензиен Д.Ж. Динамика сооружений. М.: Стройиздат, 1979. 320 с.
2. Киселев В.А. Строительная механика. Специальный курс: Динамика и устойчивость сооружений. М.: Стройиздат, 1980. 616 с.
3. Сорокин Е.С. О погрешностях общеизвестного метода теории колебаний диссипативных систем в применении к неоднородному демпфированию // Строительная механика и расчёт сооружений. 1984. №2. С. 29-34.
4. Харрис С.М., Крид Ч.И. Справочник по ударным нагрузкам. Л.: Судостроение, 1980. 360 с.
5. Пашков И.А., Трояновский И.Е. Метод разложений по собственным формам колебаний упругого тела с внутренним и внешним трением // Прикладная математика и механика. 1991. Т. 55. Вып. 6. С. 972-981.

6. Потапов А.Н. Динамический анализ дискретных диссипативных систем при нестационарных воздействиях. Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2003. 167с.