

УДК 624.041

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ТОНКОСТЕННОГО Z-ОБРАЗНОГО СТЕРЖНЯ

Волков Владимир Павлович,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г.Пенза,*

кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика».

Волкова Ольга Владимировна,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г.Пенза,*

аспирант кафедры «Механика».

Аннотация

Статья посвящена определению геометрических характеристик тонкостенного стержня Z-образного профиля, которые необходимы для определения его несущей способности при расчете на прочность, жесткость и устойчивость.

В статье исследованы пределы изменения относительной длины свеса полки, определяющие положение главных центральных осей сечения. Выведены формулы для определения относительных значений главных моментов инерции и моментов сопротивления сечения. Определено значение относительной длины свеса полки при котором осевой момент сопротивления принимает максимальное значение. Приведена таблица значений геометрических характеристик сечения для различных значений относительной длины свеса полки.

Ключевые слова: геометрические характеристики, тонкостенный стержень, Z-образный профиль, относительная длина свеса полки.

DETERMINATION OF GEOMETRIC CHARACTERISTICS OF THE THIN-WALLED Z-SHAPED RODS

Volkov Vladimir Pavlovich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Candidate of Sciences, Associate Professor of the department "Mechanics".

Volkova Olga Vladimirovna,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

post-graduate student of the department "Mechanics".

Abstract

Article is devoted to the definition of the geometric characteristics of thin-walled bar Z-shaped profile, which are needed to determine its bearing capacity when calculating the strength, rigidity and stability.

The article explores the limits of variation of the relative length of overhang shelves determining the position of principal central axes of the section. The formulas for determining the relative values of the principal moments of inertia and section modulus. Determined by the relative length of the overhang shelves where the section modulus is maximum. A table of values of the geometric characteristics of the cross section for different values of the relative length of overhang shelves.

Keywords: geometric characteristics, thin-wall bar, Z-shaped profile, the relative length of the overhang shelves.

Знание положения главных центральных осей сечения стержня играет решающую роль при его расчете на прочность, жесткость и устойчивость по формулам сопротивления материалов. Особую роль это положение занимает для тонкостенных стержней.

В данной работе рассматривается задача определения положения главных центральных осей сечения при различных соотношениях длины полки к полной

длине Z-образного стержня. Определяются относительные значения главных моментов инерции и моментов сопротивления сечения.

Постановка задачи: при каком значении относительной длины свеса полки $\xi = b/L$, где $L = 2b + 2a$ – полная длина Z-образного профиля; оси XU являются главными центральными осями сечения, т.е. найти угол α . Принять толщину $\delta \ll h, b$ (рисунок 1).

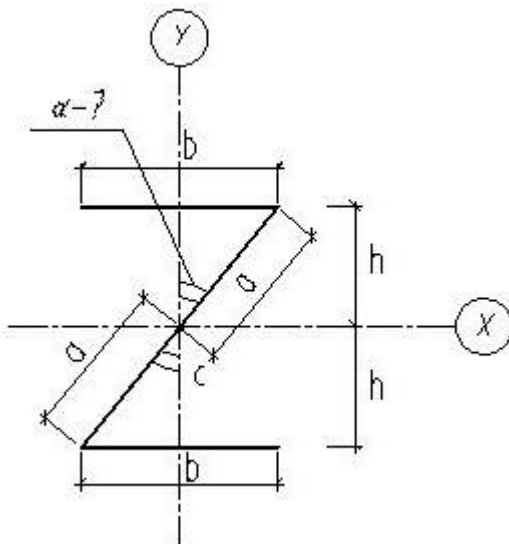


Рисунок 1 – Схема Z-образного профиля

Т.к. данная форма сечения имеет центральную симметрию (т. С, рисунок 1), то центр тяжести сечения будет совпадать с центром симметрии. Следовательно, все оси, проходящие через центр тяжести (т. С, рисунок 1), являются центральными осями.

Оси XU являются главными осями, если центробежный момент инерции сечения равен нулю, т.е.

$$J_{xy} = \delta \int_0^L xy \cdot ds = 0.$$

Предварительно определяем диапазон изменения $\xi = b/L$:

При $\xi = 0$ или $b = 0$ получаем форму, изображенную на рисунке 2, а при $\xi = 0,5$ или $a = 0$ – на рисунке 3. Таким образом, предварительно имеем диапазон

$$0 < \xi < 0,5.$$

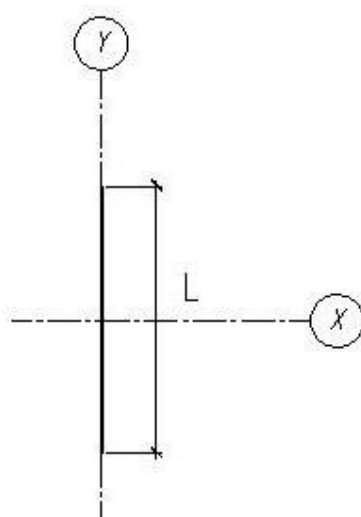


Рисунок 2 – Форма Z-образного профиля при $\xi = 0$ или $b = 0$

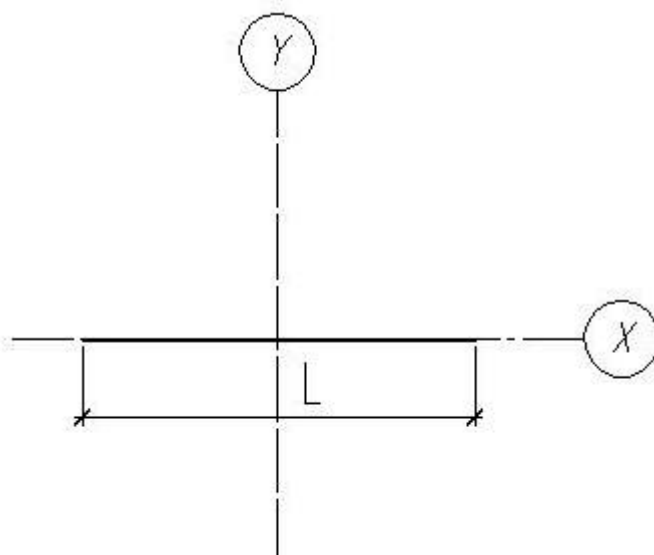


Рисунок 3 – Форма Z-образного профиля при $\xi = 0,5$ или $a = 0$

Учитывая центральную симметрию сечения (т. С, рисунок 1), центробежный момент инерции будем определять для верхней половины сечения (рисунок 4)

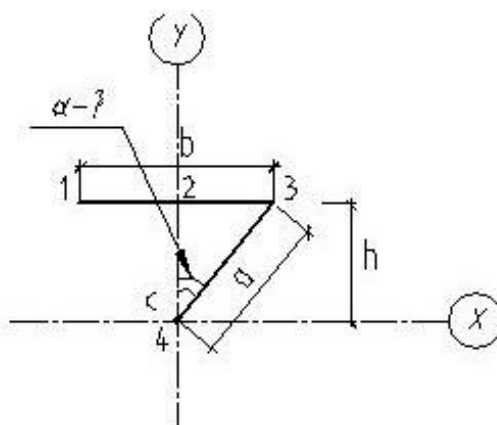


Рисунок 4 – Верхняя половина Z-образного поперечного сечения

Предварительно решим две задачи: найдем центробежный J_{xy} и осевой J_x моменты инерции полосы длиной l и толщиной $\delta = \text{const}$, $0 \leq s \leq L$ (рисунки 5,6)

Задача №1 (рисунок 5):

Для элементарного участка ds :

$$dJ_{xy} = \delta \cdot xy \cdot ds = \delta \cdot sh \cdot ds, \quad dJ_x = \delta \cdot y^2 \cdot ds = \delta \cdot h^2 \cdot ds;$$

Для всей полосы, длиной l :

$$J_{xy} = \int_0^l \delta \cdot sh \cdot ds = \delta h \frac{s^2}{2} \Big|_0^l = \frac{\delta \cdot h \cdot l^2}{2}, \quad J_x = \int_0^l \delta \cdot h^2 \cdot ds = \delta h^2 s \Big|_0^l = \delta \cdot h^2 \cdot l.$$

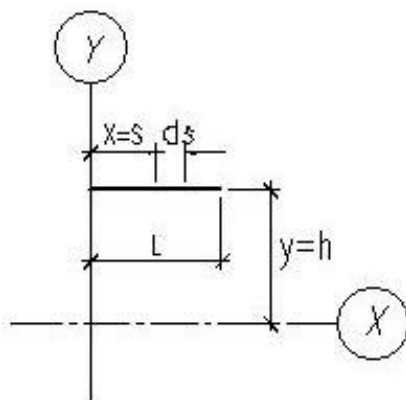


Рисунок 5 – Горизонтальный элемент Z-образного профиля

Задача №2 (рисунок 6):

Для элементарного участка ds :

$$dJ_{xy} = \delta \cdot xy \cdot ds = \delta \cdot s \sin \alpha \cdot s \cos \alpha \cdot ds, \quad dJ_x = \delta \cdot y^2 \cdot ds = \delta \cdot (s \cos \alpha)^2 \cdot ds.$$

Для всей полосы, длиной l :

$$J_{xy} = \int_0^l \delta \cdot s \sin \alpha \cdot s \cos \alpha \cdot ds = \delta \sin \alpha \cdot \cos \alpha \frac{s^3}{3} \Big|_0^l = \delta \sin \alpha \cdot \cos \alpha \frac{l^3}{3} = \frac{\delta \cdot b \cdot h \cdot l}{3},$$

$$J_x = \int_0^l \delta \cdot (s \cos \alpha)^2 \cdot ds = \delta \cdot \cos^2 \alpha \frac{s^3}{3} \Big|_0^l = \delta \cos^2 \alpha \frac{l^3}{3} = \frac{\delta \cdot h^2 \cdot l}{3}.$$

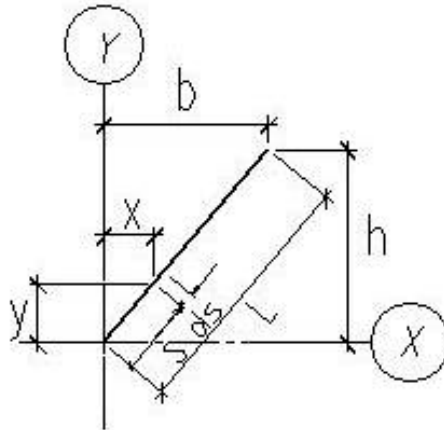


Рисунок 6 – Наклонный элемент Z-образного профиля

Тогда, из рисунка 4, следует, что

$$L_{13} = b \Rightarrow \xi \cdot L,$$

$$L_{34} = a = L/2 - b \Rightarrow (0,5 - \xi) \cdot L;$$

а так же

$$h = L_{34} \cdot \cos \alpha,$$

$$L_{23} = L_{34} \cdot \sin \alpha,$$

$$L_{12} = L_{13} - L_{23} \Rightarrow \xi \cdot L - (0,5 - \xi) \cdot L \cdot \sin \alpha.$$

Из рисунка 4 следует, что центробежный момент инерции верхней половины сечения равен нулю, если справедливо равенство

$$L_{12} \frac{L_{12}}{2} h = L_{23} \frac{L_{23}}{2} h + L_{34} \frac{L_{23}}{3} h,$$

$$L_{12}^2 = L_{23}^2 + L_{34} \cdot L_{23} \cdot \frac{2}{3},$$

$$(L_{13} - L_{23})^2 = L_{23}^2 + L_{34} \cdot L_{23} \cdot \frac{2}{3},$$

$$\left(\frac{L_{13}}{L_{23}} - 1\right)^2 = 1 + \frac{L_{34}}{L_{23}} \cdot \frac{2}{3},$$

$$\left(\frac{L_{13}}{L_{23}}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{L_{13}}{L_{23}}\right) - \frac{L_{34}}{L_{23}} \cdot \frac{2}{3} = 0,$$

$$L_{13}^2 \frac{1}{L_{23}} - 2 \cdot L_{13} - \frac{2}{3} \cdot L_{34} = 0,$$

$$\frac{1}{(0,5 - \xi) \sin \alpha} \xi^2 - 2 \cdot \xi - \frac{2}{3} \cdot (0,5 - \xi) = 0.$$

Или $\frac{3 \cdot \xi^2 - (4 \cdot \xi + 1) \cdot (0,5 - \xi) \cdot \sin \alpha}{(0,5 - \xi) \sin \alpha} = 0$, где $0 < \xi < 0,5$.

Тогда $\sin \alpha = \frac{3 \cdot \xi^2}{(4 \cdot \xi + 1) \cdot (0,5 - \xi)}$ (1)

Следовательно, $\alpha = \arcsin\left(\frac{3 \cdot \xi^2}{-4 \cdot \xi^2 + \xi + 0,5}\right)$ (2)

Установим окончательные пределы изменения ξ :

т.к. $\sin \alpha < 1$, то имеем неравенство $\frac{3 \cdot \xi^2}{(4 \cdot \xi + 1) \cdot (0,5 - \xi)} < 1$,

$$7 \cdot \xi^2 - \xi - 0,5 < 0,$$

или $7\left(\xi - \frac{1 - \sqrt{15}}{14}\right) \cdot \left(\xi - \frac{1 + \sqrt{15}}{14}\right) < 0$,

т.е. $\frac{1 - \sqrt{15}}{14} < \xi < \frac{1 + \sqrt{15}}{14}$ или $-0,205 < \xi < 0,348$.

Из системы:

$$\begin{cases} 0 < \xi < 0,5 \\ -0,205 < \xi < 0,348 \end{cases}$$

окончательно получаем диапазон изменения относительной длины свеса полки:

$$\begin{cases} 0 < \xi < 0,348 \\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (3)$$

Предельные случаи изображены:

– при $\alpha = 0$ или $\xi = 0$ – на рисунке 2;

– при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ или $\xi = 0,348$ – верхняя половина сечения на рисунке 7.

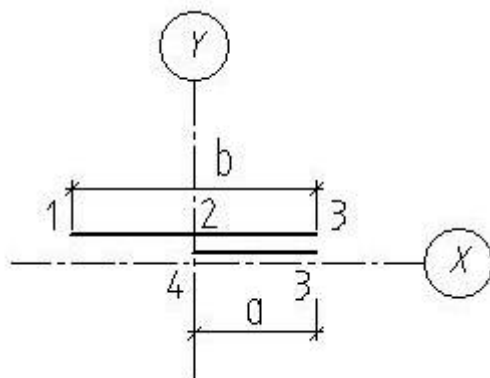


Рисунок 7 – Предельное положение элементов Z-образного профиля

В заключении приведём соотношение размеров Z-образного профиля, при наиболее используемых значениях $\xi = \frac{b}{L}$ (табл.1).

Введем обозначения (рисунок 8):

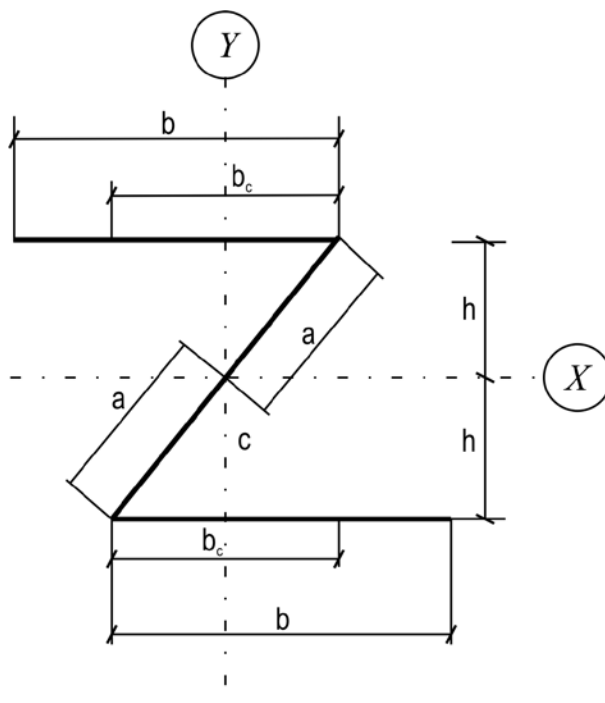


Рисунок 8 – Геометрические размеры Z-образного поперечного сечения

$$\beta = \frac{b_c}{b} = \frac{6\xi}{4\xi + 1};$$

$$\mu = \frac{2h}{b_c} = \sqrt{\left(\frac{\frac{1}{\xi} - 2}{\beta}\right)^2} - 1;$$

$$\eta = \frac{L}{b_c} = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{1}{\beta}.$$

Осевой момент инерции определяется по формуле:

$$J_x = \frac{\delta L^3}{12} \cdot \left(\frac{(1 - 2\xi)^2 \cdot (1 + 4\xi)^2 - (6\xi^2)^2}{(1 + 4\xi)} \right).$$

Осевой момент сопротивления определяется по формуле:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}} = \frac{J_x}{h} = \frac{\delta L^2}{6} \cdot \sqrt{(1 - 2\xi)^2 \cdot (1 + 4\xi)^2 - (6\xi^2)^2} = \frac{\delta L^2}{6} \cdot \frac{J_x}{(\delta L^3 / 12)} \cdot \left(\frac{\eta}{\mu}\right),$$

причем при $\xi = 0,1184$ имеем $\frac{dW_x}{d\xi} = 0$ или $W_x = W_{\max}$ на промежутке $0 < \xi < 0,348$

(таблица 1).

Таблица 1 – Геометрические характеристики Z-образного поперечного сечения

$\xi = \frac{b}{L}$	$\frac{1}{\beta} = \frac{b}{b_c}$	$\mu = \frac{2h}{b_c}$	$\eta = \frac{L}{b_c}$	$\frac{J_x}{(\delta L^3 / 12)}$	$\frac{W_x}{(\delta L^2 / 6)}$
0,1	2,3333	18,64	23,333	0,8934	1,1184
0,1184	2,0743	13,333	17,5194	0,8535	1,1215
0,15	1,7778	8,2358	11,852	0,7726	1,1118
0,2	1,5	4,3875	7,5	0,616	1,053
0,21	1,4603	3,9073	6,9538	0,5809	1,0339
0,22	1,4242	3,4847	6,4738	0,5447	1,0120
0,23	1,3913	3,1097	6,0491	0,5074	0,987
0,24	1,3611	2,7744	5,6713	0,4691	0,9588
0,25	1,3333	2,4721	5,3333	0,4297	0,927

Продолжение таблицы 1

$\xi = \frac{b}{L}$	$\frac{1}{\beta} = \frac{b}{b_c}$	$\mu = \frac{2h}{b_c}$	$\eta = \frac{L}{b_c}$	$\frac{J_x}{(\delta L^3 / 12)}$	$\frac{W_x}{(\delta L^2 / 6)}$
0,26	1,3077	2,1974	5,0296	0,3894	0,8912
0,27	1,284	1,9455	4,7556	0,3482	0,8851
0,28	1,2619	1,7124	4,5068	0,3061	0,8055
0,29	1,2414	1,4941	4,2807	0,2632	0,7539
0,30	1,2222	1,2867	4,074	0,2195	0,6948
0,31	1,2043	1,0859	3,8848	0,1750	0,6262
0,3143	1,1969	1,0003	3,8081	0,1557	0,5928
0,32	1,1875	0,8859	3,7109	0,1299	0,5443
0,33	1,1717	0,6763	3,5506	0,08417	0,4419
0,34	1,1569	0,4307	3,4026	0,03782	0,2987
0,345	1,1498	0,2595	3,3328	0,01443	0,1853

Библиографический список:

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов: учеб. для вузов. М: Высш. шк., 1995. 560 с.

2. Власов В.З. Избранные труды. В 3 т. Т.2 Тонкостенные упругие стержни. Принципы построения общей технической теории оболочек. М.: Изд-во АН СССР, 1963. 507с.