

УДК 624.046.3

**ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОРОТАЦИОННОГО
БАЛОЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ДЛЯ РАСЧЕТА УСТОЙЧИВОСТИ РАМ
ПРИ БОЛЬШИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ**

Галишникова Вера Владимировна,

Российский университет дружбы народов, г.Москва,

*кандидат технических наук, доцент, заведующая кафедрой «Строительные
конструкции и сооружения».*

Аннотация

Стальные пространственные стержневые конструкции широко используются в современном строительстве. Из-за своего малого веса и больших пролетов, эти конструкции часто испытывают большие перемещения. Обеспечение устойчивости таких конструкций представляет собой чрезвычайно важную задачу. Однако существующие вычислительные методы расчета пространственных стержневых систем в нелинейной постановке пока еще не дают возможности обеспечить инженеров-проектировщиков надежным инструментом для анализа устойчивости таких конструкций. В данной статье описан один из методов, используемых в современных программных комплексах для нелинейного расчета рам на перемещения и устойчивость, и представлены результаты численных исследований этого метода, демонстрирующие его возможности и ограничения.

Ключевые слова: пространственные рамы, нелинейный расчет на устойчивость, большие перемещения.

**ON THE COROTATIONAL BEAM ELEMENT
FOR STABILITY ANALYSIS OF PLANE FRAMES
WITH LARGE DISPLACEMENTS**

Galishnikova Vera Vladimirovna,

*Peoples' Friendship University of Russia, Moscow,
Candidate of Sciences, Associate Professor, Head of the department "Structural
Engineering".*

Abstract

Steel spatial framed structures are used extensively in modern construction. Due to their light weight and large spans these structures are often undergoing large displacements. Stability of space frames is a matter of paramount importance. However, computer methods for stability analysis of large space frames still do not provide reliable support to practicing engineers. This paper presents one of the methods used in the modern software products for the nonlinear stability analysis and investigates its possibilities and limitations

Keywords: space frames, nonlinear stability analysis, large displacements.

Введение. Особенность поведения пространственных рам по сравнению с пространственными фермами состоит в том, что в их элементах присутствуют изгиб и кручение. Это различие вызвано как изгибной и крутильной жесткостью стержней рамы, так и жесткостью ее узлов, которые способны передавать и силы, и моменты без деформации узловых соединений.

При традиционном линейном методе анализа рам узловые перемещения и повороты, вызванные растяжением-сжатием, изгибом или кручением стержней, считаются независимыми друг от друга, и их эффекты суммируются. Главные задачи линейного анализа пространственных рам – формулирование теории изгиба и теории кручения призматических стержней. Главные оси поперечных сечений призматических стержней используются при формулировке двух независимых основных уравнений изгиба. Разрешающее уравнение кручения описывает равномерно распределенное кручение (кручение Сен-Венана) и кручение, вызванное стесненной депланацией сечений.

Если в расчет вводятся большие перемещения и повороты стержней, то сложность анализа пространственных рам значительно возрастает. Это вызвано изменением направления осевого перемещения, перемещений изгиба и оси вращения сечения стержня, происходящим при изменении положения и формы стержня под нагрузкой.

В начале первого шага нагружения стержень находится в исходной конфигурации. Осевая деформация стержня происходит в направлении его продольной оси, а поперечные перемещения при изгибе – в направлении главных осей сечения. Поворот поперечного сечения происходит вокруг продольной оси элемента. В данной работе принято, что центр тяжести и центр кручения поперечного сечения совпадают.

Для последующих шагов нагружения инкременты нагрузок прикладываются уже к мгновенной конфигурации деформированной рамы. При этом координаты инкрементов перемещения и поворота для разных инкрементов нагрузок не могут быть непосредственно суммированы, поскольку относятся к мгновенным осям координат, направления которых меняются пошагово по мере изменения нагрузки, действующей на раму. Разрешающие уравнения для определения инкрементов перемещений и углов поворота формулируются в текущих локальных системах координат элемента. Преобразование функций продольных и поперечных перемещений и поворотов к исходной локальной системе координат представляет значительную сложность, так как гипотезы (допущения), применяемые при моделировании физического поведения стержня, приводят к различным функциям для продольных деформаций, деформаций изгиба и поворотов сечений. Эти функции не могут быть приведены к единой системе координат.

В своей монографии [1,2] Крисфилд для анализа поведения плоских стержневых систем использовал метод Орана [3,4], на основе которого он разработал трехмерный стержневой элемент пространственных рам. При выводе уравнений элемента использован так называемый коротационный

подход, предложенный Ораном. В данной статье приводятся результаты численного исследования поведения элемента, предложенного Крисфилдом, при расчете стоек на потерю устойчивости при сжатии при больших перемещениях. С этой целью автором данной статьи была выполнена алгоритмизация и программная реализация метода Крисфилда, описанного в монографии.

Основные уравнения метода. На рисунке 1 показаны перемещения балочного элемента.

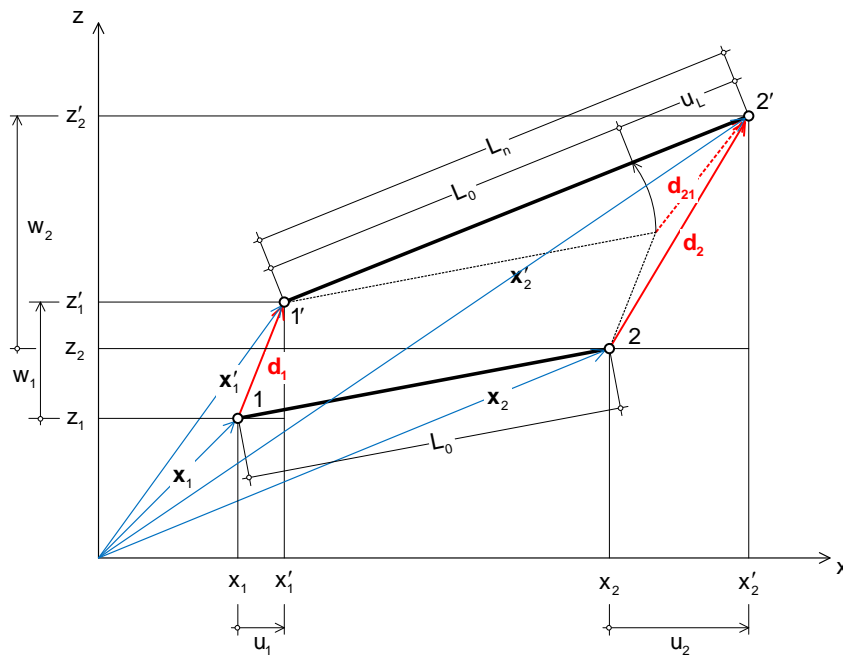


Рисунок 1 – Перемещения элемента

Исходное состояние элемента обозначено 1 – 2, текущее состояние – 1' – 2'.

Радиус-векторы точек 1 и 2:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Радиус-векторы точек 1' и 2'

$$\mathbf{x}'_1 = \begin{bmatrix} x'_1 \\ z'_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}'_2 = \begin{bmatrix} x'_2 \\ z'_2 \end{bmatrix}$$

Векторы перемещений точек 1 и 2:

$$\mathbf{d}_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ w_2 \end{bmatrix}$$

Инкременты радиус-векторов: $\mathbf{x}_{21} = \begin{bmatrix} x_{21} \\ z_{21} \end{bmatrix}$, где $x_{21} = x_2 - x_1$, $z_{21} = z_2 - z_1$

Инкременты векторов перемещений: $\mathbf{d}_{21} = \begin{bmatrix} u_{21} \\ w_{21} \end{bmatrix}$,

где $u_{21} = u_2 - u_1$, $w_{21} = w_2 - w_1$.

Осевые деформации элемента описываются следующими уравнениями:

– изменение длины оси элемента:

$$u_L = L_n - L_0 = \sqrt{(\mathbf{x}_{21} + \mathbf{d}_{21})^T (\mathbf{x}_{21} + \mathbf{d}_{21})} - \sqrt{\mathbf{x}_{21}^T \mathbf{x}_{21}},$$

или, для улучшения численной обусловленности,

$$u_L = \frac{(L_n - L_0)(L_n + L_0)}{L_n + L_0} = \frac{L_n^2 - L_0^2}{L_n + L_0};$$

– положение срединной точки: $u_L = \frac{2}{L_n + L_0} (\mathbf{x}_{21} + \frac{1}{2} \mathbf{d}_{21})^T \mathbf{d}_{21}$;

– осевая деформация: $\varepsilon_L = \frac{u_L}{L_0}$; осевая сила $N = EA\varepsilon_L = EA \frac{u_L}{L_0}$, где A –

площадь поперечного сечения; E – модуль упругости.

Изгибные деформации элемента рамы показаны на рисунке 2. Поворот элемента описывается следующими параметрами: исходная (отсчетная) система координат: x_R, z_R ; локальная текущая система координат: x_L, z_L ; поворот оси элемента как жесткого целого: α ; угол между осями x и x_L : β ; угол между осью x и касательной к оси стержня в точке $1'$: θ_1 ; угол между осью x и касательной к оси стержня в точке $2'$: θ_2 ; угол между осью x_L и касательной к оси стержня в точке $1'$: $\theta_{L1} = \theta_1 - \alpha$; угол между осью x_L и касательной к оси стержня в точке $2'$: $\theta_{L2} = \theta_2 - \alpha$.

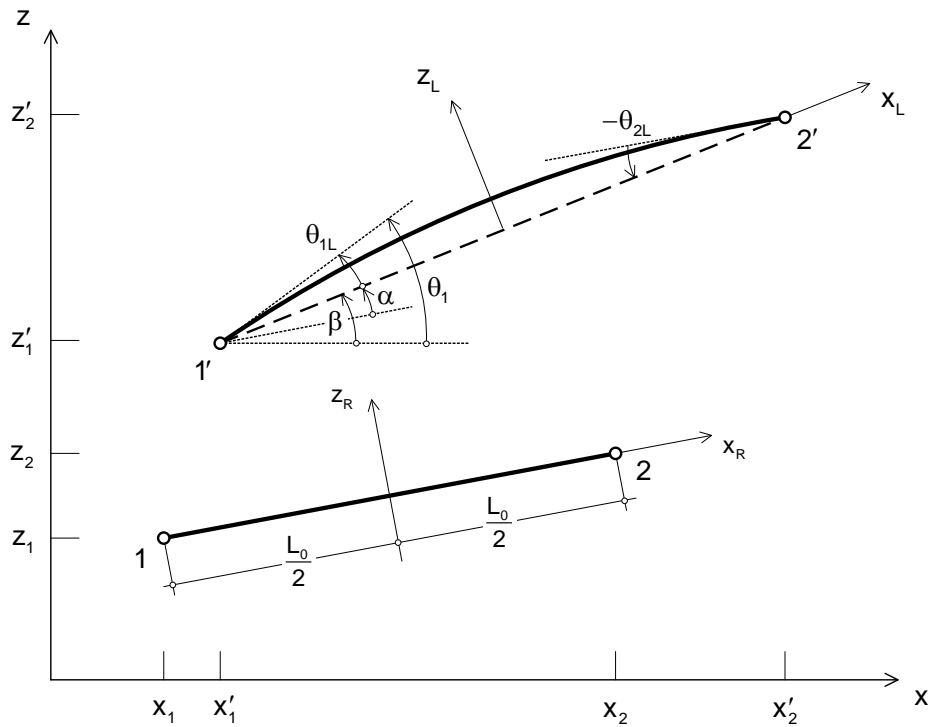


Рисунок 2 – Изгиб элемента

Тригонометрические функции угла поворота α оси элемента как жесткого тела равны:

$$\sin \alpha = \frac{\mathbf{x}_{21}}{L_0} \times \frac{\mathbf{x}_{21} + \mathbf{d}_{21}}{L_n} = \frac{1}{L_0 L_n} (x_{21} w_{21} - z_{21} u_{21}),$$

$$\cos \alpha = \left(\frac{\mathbf{x}_{21}}{L_0} \right)^T \frac{\mathbf{x}_{21} + \mathbf{d}_{21}}{L_n} = \frac{1}{L_0 L_n} (\mathbf{x}_{21}^T \mathbf{x}_{21} + \mathbf{x}_{21}^T \mathbf{d}_{21}).$$

Принцип виртуальной работы. Виртуальные перемещения элемента в локальной системе координат показаны на рисунке 3. Вектор нагрузок системы в глобальной системе координат получается при помощи принципа виртуальной работы. В соответствии с рисунком 3 тригонометрические функции угла поворота β элемента можно записать следующим образом:

$$s := \sin \beta = \frac{z'_{21}}{L_n} = \frac{z_{21} + w_{21}}{L_n}; \quad c := \cos \beta = \frac{x'_{21}}{L_n} = \frac{x_{21} + u_{21}}{L_n}.$$

Базовые векторы локальной системы координат запишутся как:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} -s \\ c \end{bmatrix}; \quad \text{инкремент перемещения: } \mathbf{d}_{21} = \frac{1}{L_n} \begin{bmatrix} x'_{21} \\ z'_{21} \end{bmatrix}; \quad \text{осевые}$$

перемещения оси элемента: $u_L = \mathbf{e}_1^T \mathbf{d}_{21}$; вариация осевых перемещений:

$\delta u_L = \mathbf{e}_1^T \delta \mathbf{d}_{21}$; вариации радиус-векторов текущей конфигурации:

$\delta x'_{21} = \delta u_2 - \delta u_1$ и $\delta z'_{21} = \delta w_2 - \delta w_1$; вектор перемещений элемента в глобальной

системе координат: $\mathbf{p}^T := \begin{bmatrix} u_1 & w_1 & \theta_1 & u_2 & w_2 & \theta_2 \end{bmatrix}$.

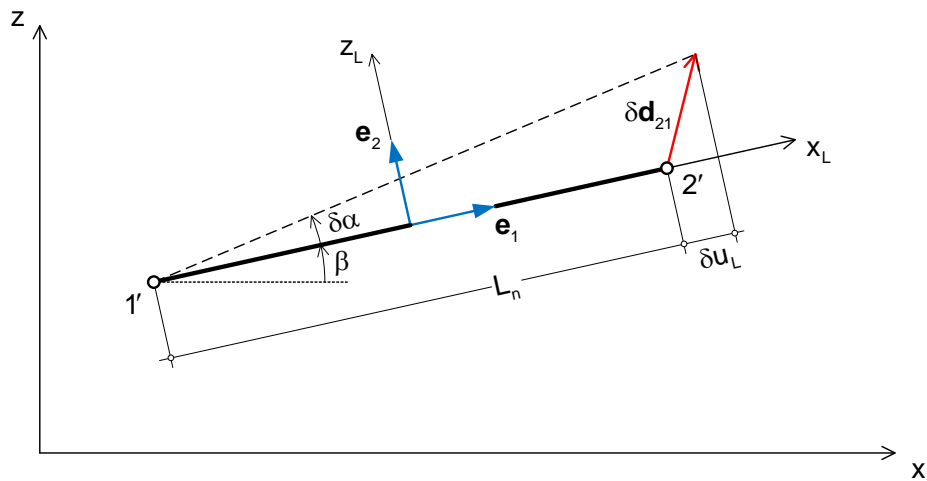


Рисунок 3 – Виртуальные перемещения элемента
в локальной системе координат

Поворот оси элемента, как жесткого тела равен $\alpha = (1/L_n) \mathbf{e}_2^T \delta \mathbf{d}_{21}$, а его вариация – $\delta \alpha = (1/L_n) \mathbf{z}^T \delta \mathbf{p}$.

Вариация поворота в локальной системе координат:

$$\delta \theta_L = \begin{bmatrix} \delta \theta_{L1} \\ \delta \theta_{L2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \theta_1 - \delta \alpha \\ \delta \theta_2 - \delta \alpha \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T \delta \mathbf{p},$$

где $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{L_n} \begin{bmatrix} \mathbf{z}^T \\ \mathbf{z}^T \end{bmatrix}$.

Объединенное матричное выражение для вариаций осевых перемещений и поворотов имеет вид: $\delta \mathbf{p}_L = \mathbf{B} \delta \mathbf{p}$, или, в развернутом виде:

$$\begin{array}{|c|} \hline \delta u_L \\ \hline \delta \theta_{L1} \\ \hline \delta \theta_{L2} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline -c & -s & 0 & c & s & 0 \\ \hline \frac{s}{L_n} & \frac{-c}{L_n} & 1 & \frac{-s}{L_n} & \frac{c}{L_n} & 0 \\ \hline \frac{s}{L_n} & \frac{-c}{L_n} & 0 & \frac{-s}{L_n} & \frac{c}{L_n} & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \delta u_1 \\ \hline \delta w_1 \\ \hline \delta \theta_1 \\ \hline \delta u_2 \\ \hline \delta w_2 \\ \hline \delta \theta_2 \\ \hline \end{array}$$

Моменты, действующие по концам элемента, принимаются равными моментам, полученным из классической теории балок при малых перемещениях:

$$\begin{array}{|c|} \hline \bar{M}_1 \\ \hline \bar{M}_2 \\ \hline \end{array} = \frac{2EJ}{L_0} \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \theta_{L1} \\ \hline \theta_{L2} \\ \hline \end{array}.$$

Виртуальная работа узловых сил одинакова в глобальной и локальной системах координат:

$$V_i = \delta \mathbf{p}^T \mathbf{q}_i = \delta \mathbf{p}_L^T \mathbf{q}_{Li} = \delta \mathbf{p}^T \mathbf{B}^T \mathbf{q}_{Li},$$

где \mathbf{p} – вектор перемещений элемента в глобальной системе координат; \mathbf{q}_i – вектор внутренних сил в глобальной системе координат; \mathbf{q}_{Li} – вектор внутренних сил в локальной системе координат.

Так как выражение виртуальной работы справедливо для произвольных виртуальных перемещений $\delta \mathbf{p}$, то можно записать

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{B}^T \mathbf{q}_{Li}$$

Матрица касательной жесткости. Запишем вариацию вектора внутренних сил в локальной системе координат:

$$\delta \mathbf{q}_{Li} = \frac{E}{L_0} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A & 0 & 0 \\ \hline 0 & 4J & 2J \\ \hline 0 & 2J & 4J \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \delta u_L \\ \hline \delta \theta_{L1} \\ \hline \delta \theta_{L2} \\ \hline \end{array} := \mathbf{C}_L \delta \mathbf{p}_L = \mathbf{C}_L \mathbf{B} \delta \mathbf{p}.$$

Тогда для глобальной системы координат

$$\delta \mathbf{q}_i = \mathbf{B}^T \delta \mathbf{q}_{Li} + N \delta \mathbf{B}_1 + \bar{M}_1 \delta \mathbf{B}_2 + \bar{M}_2 \delta \mathbf{B}_3,$$

$$\text{где } \delta \mathbf{B}_1 = \frac{1}{L_n} \mathbf{z} \mathbf{z}^T \delta \mathbf{p}, \quad \delta \mathbf{B}_2 = \delta \mathbf{B}_3 = \frac{1}{L_n^2} (\mathbf{r} \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{r}^T) \delta \mathbf{p}.$$

По определению матрицы касательной жесткости элемента:

$$\delta \mathbf{q}_i = \mathbf{K}_t \delta \mathbf{p}.$$

Матрица касательной жесткости раскладывается на постоянную и девиаторную части:

$$\mathbf{K}_t := \mathbf{K}_{t1} + \mathbf{K}_\sigma,$$

$$\text{где } \mathbf{K}_{t1} = \mathbf{B}^T \mathbf{C}_L \mathbf{B}, \quad \mathbf{K}_\sigma = \frac{N}{L_n} \mathbf{z} \mathbf{z}^T + \frac{\bar{M}_1 + \bar{M}_2}{L_n^2} (\mathbf{r} \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{r}^T).$$

Потеря устойчивости Эйлеровых колонн. Для численного исследования поведения элемента Крисфилда при расчете устойчивости рам, было выполнено его компьютерное моделирование на платформе Java. Критическая нагрузка прямых колонн призматического сечения определялась для трех случаев опирания и различного количества конечных элементов в стержне колонны.

Колонны призматического поперечного сечения моделировались одним, двумя, четырьмя, шестью, восемью, десятью и двенадцатью элементами Крисфилда. Были определены критические нагрузки при трех условиях опирания: случай 1 – оба конца колонны шарнирно оперты; случай 2 – оба конца колонны жестко защемлены; случай 3 – один конец жестко защемлен, второй – шарнирно оперт. Результаты численного расчета приведены в таблице 1. Точные значения критической нагрузки для трех описанных случаев опирания, полученные из аналитического решения, равны 1,000000, 4,000000 и 2,04576 соответственно. Если стержень колонны моделируется одним конечным элементом, компьютерная модель не определяет потери устойчивости.

На рисунке 4 графически показана зависимость погрешности вычисления критической нагрузки (по сравнению с критической нагрузкой по Эйлеру) от числа конечных элементов в сжатом стержне.

Таблица 1 – Критическая нагрузка в зависимости от числа конечных элементов

Кол-во элементов	случай 1: шарнирные опоры		случай 2: жесткие опоры		случай 3: смешанное опирание	
	нагрузка	ε , %	нагрузка	ε , %	нагрузка	ε , %
2	1,2163	21,63	4,8709	21,18	2,7816	35,97
3	1,0947	9,47	5,4809	37,02	2,4383	19,19
4	1,0527	5,27	4,8709	21,18	2,2675	10,84
5	1,0337	3,37	4,5548	13,30	2,1874	6,92
6	1,0234	2,34	4,3832	9,58	2,1441	4,81
8	1,0132	1,32	4,2094	5,23	2,1014	2,72
10	1,0086	0,86	4,1387	3,47	2,0817	1,76
12	1,0061	0,61	4,0976	2,44	2,0711	1,24

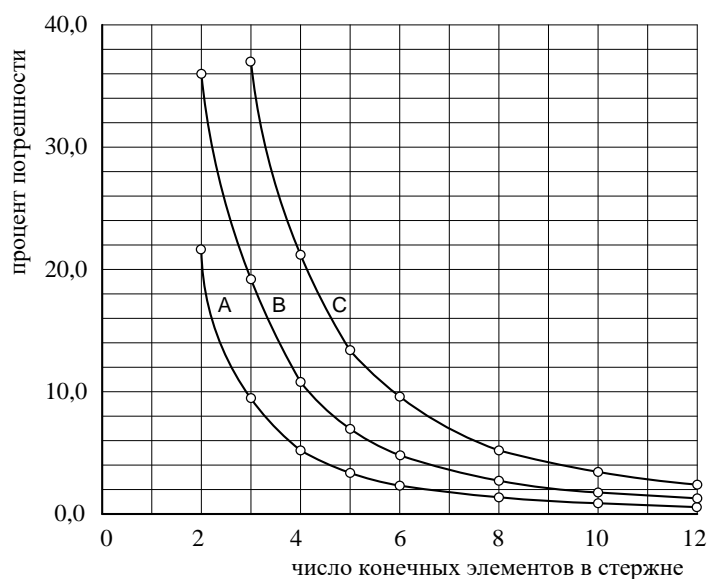


Рисунок 4 – Влияние числа конечных элементов на погрешность вычисления критической силы: кривая А – оба конца закреплены шарнирно; кривая В – один конец шарнирно закреплен, второй защемлен; кривая С – оба конца защемлены

Заключение. Численные эксперименты показали, что стержень, заданный одним конечным элементом Крисфилда, не показывает потери

устойчивости ни при каких условиях опирания. Для стержней, заданных двумя и более конечными элементами, погрешность зависит от условий опирания. Для заданного количества элементов погрешность наименьшая, если оба конца закреплены шарнирно, и максимальная – если оба конца жестко защемлены. Погрешность вычисления критической нагрузки равна 5%, если используются четыре элемента в шарнирно опертом стержне или восемь элементов в стержне с жестко закрепленными концами. При использовании восьми элементов в шарнирно опертом стержне и четырнадцати элементов в стержне с жестко закрепленными концами погрешность уменьшается до 2%.

Подобные результаты получаются и при моделировании стержней пространственных рам при помощи элемента Крисфилда. В формулировке уравнений этого элемента, как это изложено выше, не учитывается вклад касательных напряжений в равнодействующие напряжений при изгибе и кручении стержня. Поэтому каждый стержень рамы должен моделироваться несколькими конечными элементами.

Использование в компьютерной модели нескольких конечных элементов для каждого стержня пространственной рамы имеет существенные недостатки. Количество элементов, которые необходимо генерировать, и свойства которых необходимо описать, значительно возрастает. Кроме того, значительно возрастает также количество переменных в уравнениях системы, а следовательно и объем памяти и количество операций, необходимых для решения этих уравнений. Кроме того, возрастают и требуемые затраты на представление и интерпретацию результатов анализа пространственной рамы.

Библиографический список:

1. Crisfield M.A. Nonlinear finite-element analysis of solids and structures. Volume 1. New York: Wiley, 1997. ISBN 0-471-97059.
2. Crisfield M.A. Nonlinear finite-element analysis of solids and structures. Volume 2. New York: Wiley, 1997. ISBN 0-471-95649.

3. Oran C. Tangent stiffness in space frames // Journal of the Structural Division, ASCE. 1973. № 99(ST6). Pp.973-985.

4. Oran C., Kassimali A. Large deformations of framed structures under static and dynamic loads // Computers & Structures. 1976. № 6. Pp. 539-547.

5. Galishnikova V., Dunaiski P., Pahl P. Geometrically Nonlinear Analysis of Plane Trusses and Frames. Stellenbosch: Sun Press, 2009. ISBN 978-1-920109-48-6.