

УДК 539.373

**МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ИЗГИБА СТЕРЖНЯ  
СО СТУПЕНЧАТЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ  
И ДВУМЯ ОСЯМИ СИММЕТРИИ**

*Бакушев Сергей Васильевич,*

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,  
г.Пенза,*

*доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».*

**Аннотация**

Рассматривается построение и особенности моделирования механического поведения стержня в условиях поперечного упругопластического изгиба с использованием математического пакета MathCAD. Поперечное сечение стержня с двумя осями симметрии отлично от прямоугольного и имеет форму равнополочного двутавра с двумя полками: внешней и внутренней, ширина и толщина которых изменяются по высоте сечения дискретно. Аппроксимация высоты упругого ядра по длине стержня при помощи квадратичной сплайн-интерполяции позволяет оценить несущую способность и жёсткость стержня при полной и ограниченной пластичности, вычислить остаточные нормальные и касательные напряжения, а также остаточные прогибы после полной разгрузки.

**Ключевые слова:** пластичность, упругопластический изгиб, сечение с двумя осями симметрии.

**SIMULATION OF ELASTIC-PLASTIC BENDING OF A ROD WITH A  
STEPPED CROSS SECTION AND THE TWO AXES OF SYMMETRY**

*Bakushev Sergey Vasilevich,*

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,*

*Doctor of Sciences, Professor of the department "Mechanics".*

## Abstract

The construction and simulation of the mechanical behavior of the rod in a transverse elastic-plastic bending using a mathematical package MathCAD. The cross section of the rod with two axes of symmetry other than rectangular and has a shape, equilateral I-beam with two shelves: external and internal, width and thickness vary in height section discretely. Approximation of the height of the elastic core along the length of the rod using a quadratic spline interpolation allows us to estimate the carrying capacity and stiffness of the rod with full and limited ductility, calculate the residual normal and shear stresses, as well as residual deflections after complete unloading.

**Keywords:** plasticity, plasto-elastic bend, section with two axes of symmetry.

Плоский поперечный упругопластический изгиб стержней, поперечное сечение которых имеет две оси симметрии, на основе идеализированной диаграммой Прандтля (рисунок 1), относят к простейшим задачам теории пластичности. Основные положения расчёта на изгиб упругопластического стержня с двумя осями симметрии достаточно подробно описаны в специальной литературе, например [1], [2], [3], [4], [5], а также изложены в статьях [6], [7], [8].

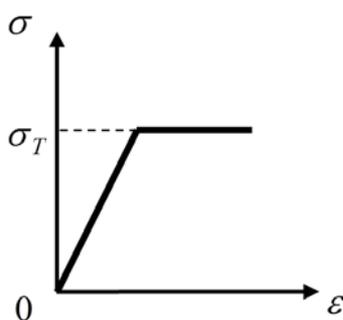


Рисунок 1 – диаграмма Прандтля

Исследование напряжённо-деформированного состояния стержня, находящегося в условиях упругопластического изгиба сталкивается со значительными математическими трудностями, связанными, прежде всего, с необходи-

мостью построения аналитического выражения для высоты упругого ядра как функции продольной координаты (рисунок 2).

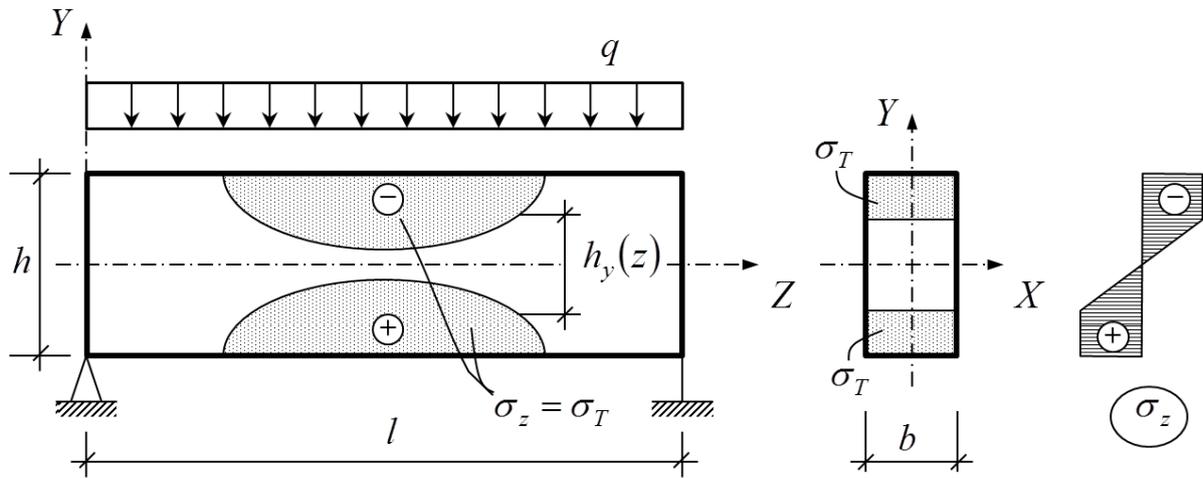


Рисунок 2 – Стержень в условиях упругопластического изгиба

Для вычисления функций  $h^y(z)$  – высоты упругого ядра, следует воспользоваться равенством внутреннего момента  $M_{vm}(z)$  изгибающему моменту от внешней нагрузки  $M_x(z)$ :

$$M_{vm}(z) = M_x(z). \quad (1)$$

Тогда

$$M_{vm}(z) = \sigma_T \left[ (S_{ix}^T(z) + S_{sx}^T(z)) + \frac{2I_x^y(z)}{h^y(z)} \right];$$

$$S_{ix}^T(z) = \int_{-\frac{1}{2}h}^{-\frac{1}{2}h^y(z)} y \cdot b(y) dy \text{ – статический момент относительно нейтральной оси}$$

x части поперечного сечения стержня в зоне растянутых волокон, где нормальные напряжения  $\sigma_z$  равны пределу текучести  $\sigma_T$  (берётся по абсолютной величине);

$$S_{sx}^T(z) = \int_{+\frac{1}{2}h^y(z)}^{+\frac{1}{2}h} y \cdot b(y) dy \text{ – статический момент относительно нейтральной оси}$$

x части поперечного сечения стержня в зоне сжатых волокон, где напряжения  $\sigma_z$  равны пределу текучести  $\sigma_T$ , (берётся по абсолютной величине);

$$I_x^y(z) = \int_{-\frac{1}{2}h^y(z)}^{+\frac{1}{2}h^y(z)} y^2 \cdot b(y) dy \quad \text{– момент инерции относительно нейтральной оси } x$$

части поперечного сечения, соответствующей упругому ядру;

$b(y)$  – ширина поперечного сечения на расстоянии  $y$  от нейтральной оси (для поперечного сечения с двумя осями симметрии нейтральная ось  $x$  совпадает с центральной осью  $x_0$ );

$h$  – высота поперечного сечения, постоянная по длине стержня.

Если поперечное сечение отлично от прямоугольного и его ширина изменяется по его высоте дискретно, то аналитическое построение выражения для высоты упругого ядра как функции продольной координаты, можно выполнить, наверное, лишь приближённо с помощью, например, квадратичной сплайн-интерполяции.

Рассмотрим процедуру построения аналитического выражения для функции  $h^y(z)$  на примере поперечного сечения в виде равнополочного двутавра с двумя полками разной ширины и высоты, изображённого на рисунке 3.

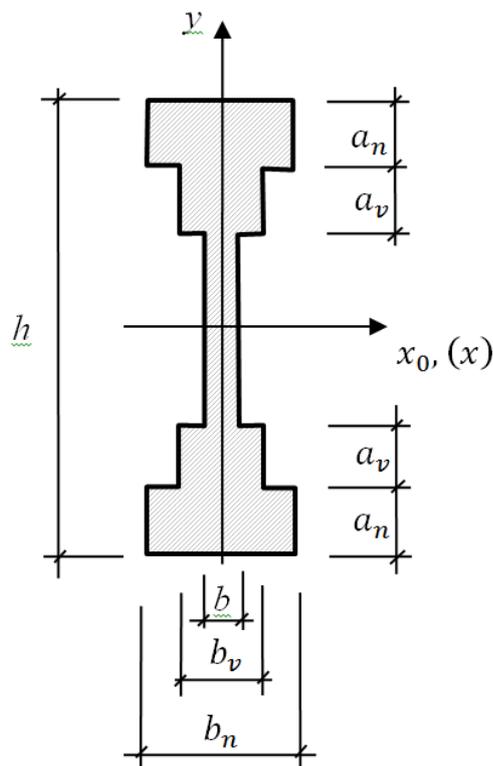


Рисунок 3 – Поперечное сечение стержня в виде равнополочного двутавра

Прежде всего, для каждого участка поперечного сечения с постоянной шириной записываем выражения для вычисления статических моментов сжатой  $S_{sx}^T(z)$  и растянутой  $S_{ix}^T(z)$  пластических зон поперечного сечения, а также момента инерции  $I_x^Y(z)$  упругого ядра относительно нейтральной оси, как функции высоты упругого ядра. Затем для тех же участков записываем выражения для внутреннего момента. После этого делим высоту сечения на определённое количество участков  $y_i$  (при вычислении с использованием автоматизированных средств количество участков можно задавать достаточно большим) и в каждой точке деления, на основании формулы (1), вычисляем длину интервала  $z_i$ , в конце которого упругие нормальные напряжения  $\sigma_z$  достигают величины предела текучести  $\sigma_T$ . Длины интервалов  $z_i$  вычисляются отдельно для левой и правой половин стержня, в соответствии с аналитическими выражениями для изгибающего момента от внешней нагрузки  $M_x(z)$  на левой и правой половинах стержня.

При нагружении стержня сосредоточенной силой  $F$  в середине пролёта длины интервалов  $z_i$  будут вычисляться по формулам:

$$- \text{ для левой половины стержня } z_i = \frac{2}{F} M_{vm}(2y_i);$$

$$- \text{ для правой половины стержня } z_i = 1 - \frac{2}{F} M_{vm}(2y_i).$$

При нагружении стержня равномерно-распределённой нагрузкой интенсивности  $q$  на всю длину пролёта длины интервалов  $z_i$  будут вычисляться по формулам:

$$- \text{ для левой половины стержня } z_i = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2M_{vm}(2y_i)}{q}};$$

$$- \text{ для правой половины стержня } z_i = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{2M_{vm}(2y_i)}{q}}.$$

Далее представлены фрагменты рабочего документа, выполненного в MathCAD, где показано построение функции  $h^Y(z)$  – высоты упругого ядра для

стержня нагруженного сосредоточенной силой в середине пролёта с поперечным сечением, показанным на рисунке 3.

Сначала определяем границу упругой и пластической зон стержня на упругопластическом участке. Вычисляем статические моменты сжатой и растянутой пластических зон поперечного сечения, а также момент инерции упругого ядра относительно нейтральной оси, как функции высоты упругого ядра.

а) граница пластической и упругой зон находится в пределах стенки поперечного сечения (здесь и далее приведены блоки вычислений в MathCAD):

$$S_{xTtst}(hy) := \left[ \begin{aligned} & \frac{bn}{2} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} + an \right)^2 - \left( \frac{h}{2} \right)^2 \right] \dots \\ & + \frac{bv}{2} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} + an + av \right)^2 - \left( \frac{h}{2} + an \right)^2 \right] \dots \\ & + \frac{b}{2} \cdot \left[ \left( \frac{hy}{2} \right)^2 - \left( \frac{h}{2} + an + av \right)^2 \right] \end{aligned} \right]$$

$$S_{xTsst}(hy) := \frac{bn}{2} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - \left( \frac{h}{2} - an \right)^2 \right] \dots$$

$$+ \frac{bv}{2} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} - an \right)^2 - \left( \frac{h}{2} - an - av \right)^2 \right] + \frac{b}{2} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} - an - av \right)^2 - \left( \frac{hy}{2} \right)^2 \right]$$

$$I_{xYst}(hy) := \frac{b}{3} \cdot \left[ \left( \frac{hy}{2} \right)^3 - \left( -\frac{hy}{2} \right)^3 \right]$$

Внутренний момент равен:

$$M_{st}(hy) := \begin{cases} \sigma T \cdot \left( S_{xTtst}(hy) + S_{xTsst}(hy) + \frac{2}{hy} \cdot I_{xYst}(hy) \right) & \text{if } hy \neq 0\text{-m} \\ \sigma T \cdot (S_{xTtst}(hy) + S_{xTsst}(hy)) & \text{if } hy = 0\text{-m} \end{cases}$$

б) граница пластической и упругой зон находится в пределах внутренней полки поперечного сечения:

$$S_{xTtvp}(hy) := \left| \frac{bn}{2} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} + an \right)^2 - \left( \frac{h}{2} \right)^2 \right] + \frac{bv}{2} \cdot \left[ \left( \frac{hy}{2} \right)^2 - \left( \frac{h}{2} + an \right)^2 \right] \right|$$

$$S_{xTsvp}(hy) := \frac{bn}{2} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - \left( \frac{h}{2} - an \right)^2 \right] + \frac{bv}{2} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} - an \right)^2 - \left( \frac{hy}{2} \right)^2 \right]$$

$$I_{xYvp}(hy) := 2 \cdot \frac{b}{3} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} - an - av \right)^3 - (0 \cdot m)^3 \right] + 2 \cdot \frac{bv}{3} \cdot \left[ \left( \frac{hy}{2} \right)^3 - \left( \frac{h}{2} - an - av \right)^3 \right]$$

Внутренний момент равен:

$$M_{vp}(hy) := \sigma T \cdot \left( S_{xTvp}(hy) + S_{xTsvp}(hy) + \frac{2}{hy} \cdot I_{xYvp}(hy) \right)$$

в) граница пластической и упругой зон находится в пределах внешней полки поперечного сечения:

$$S_{xTtnp}(hy) := \left| \frac{bn}{2} \cdot \left[ \left( -\frac{hy}{2} \right)^2 - \left( -\frac{h}{2} \right)^2 \right] \right|$$

$$S_{xTsnp}(hy) := \frac{bn}{2} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} \right)^2 - \left( \frac{hy}{2} \right)^2 \right]$$

$$I_{xYnp}(hy) := 2 \cdot \frac{b}{3} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} - an - av \right)^3 - (0 \cdot m)^3 \right] \dots \\ + 2 \cdot \frac{bv}{3} \cdot \left[ \left( \frac{h}{2} - an \right)^3 - \left( \frac{h}{2} - an - av \right)^3 \right] + 2 \cdot \frac{bn}{3} \cdot \left[ \left( \frac{hy}{2} \right)^3 - \left( \frac{h}{2} - an \right)^3 \right]$$

Внутренний момент равен:

$$M_{np}(hy) := \sigma T \cdot \left( S_{xTtnp}(hy) + S_{xTsnp}(hy) + \frac{2}{hy} \cdot I_{xYnp}(hy) \right)$$

Построение границы между упругой и пластической зонами стержня (рисунок 4):

$$y := -\frac{h}{2}, -\frac{h}{2} + \frac{h}{100} \dots \frac{h}{2}$$

– левая половина стержня:

$$zF(y) := \begin{cases} \frac{2}{Fr} \cdot Mnp(2 \cdot y) & \text{if } \frac{h}{2} - an < y \leq \frac{h}{2} \\ \frac{2}{Fr} \cdot Mvp(2 \cdot y) & \text{if } \frac{h}{2} - an - av < y \leq \frac{h}{2} - an \\ \frac{2}{Fr} \cdot Mst(2 \cdot y) & \text{if } 0 \cdot m \leq y \leq \frac{h}{2} - an - av \\ \frac{2}{Fr} \cdot Mst[2 \cdot (-y)] & \text{if } 0 \cdot m \geq y \geq -\frac{h}{2} + an + av \\ \frac{2}{Fr} \cdot Mvp[2 \cdot (-y)] & \text{if } -\frac{h}{2} + an + av > y \geq -\frac{h}{2} + an \\ \frac{2}{Fr} \cdot Mnp[2 \cdot (-y)] & \text{if } -\frac{h}{2} + an > y \geq -\frac{h}{2} \end{cases}$$

– правая половина стержня:

$$zpF(y) := \begin{cases} 1 - \frac{2}{Fr} \cdot Mnp(2 \cdot y) & \text{if } \frac{h}{2} - an < y \leq \frac{h}{2} \\ 1 - \frac{2}{Fr} \cdot Mvp(2 \cdot y) & \text{if } \frac{h}{2} - an - av < y \leq \frac{h}{2} - an \\ 1 - \frac{2}{Fr} \cdot Mst(2 \cdot y) & \text{if } 0 \cdot m \leq y \leq \frac{h}{2} - an - av \\ 1 - \frac{2}{Fr} \cdot Mst[2 \cdot (-y)] & \text{if } 0 \cdot m \geq y \geq -\frac{h}{2} + an + av \\ 1 - \frac{2}{Fr} \cdot Mvp[2 \cdot (-y)] & \text{if } -\frac{h}{2} + an + av > y \geq -\frac{h}{2} + an \\ 1 - \frac{2}{Fr} \cdot Mnp[2 \cdot (-y)] & \text{if } -\frac{h}{2} + an > y \geq -\frac{h}{2} \end{cases}$$

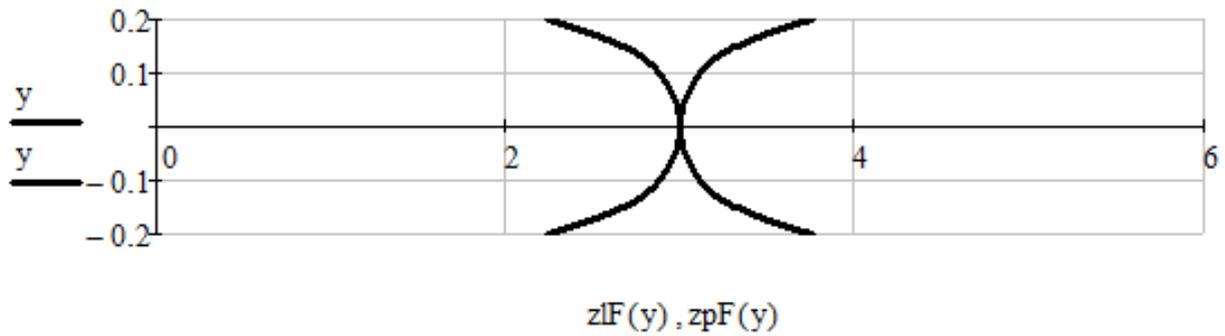


Рисунок 4 – Граница между упругой и пластической зонами стержня

Построение аналитического выражения для функции  $h_y = h^y(z)$  – высоты упругого ядра – будем выполнять при помощи кубической сплайн-интерполяции.

$$h_y := h_y(z)$$

Размерности векторов данных для участков в пределах половины стенки, внутренней и наружной полок поперечного сечения:

$$nst := \frac{\left(\frac{h}{2} - an - av\right) - 0 \cdot m}{\frac{b}{10}} - 1 = 39$$

$$nvp := \frac{\left(\frac{h}{2} - an\right) - \left(\frac{h}{2} - an - av\right)}{\frac{b}{10}} - 1 = 19$$

$$nnp := \frac{\left(\frac{h}{2}\right) - \left(\frac{h}{2} - an\right)}{\frac{b}{10}} - 1 = 19$$

Формирование вектора данных вдоль оси Y.

Рассматриваем верхнюю половину поперечного сечения стержня:

$$\begin{aligned}
 i &:= 0..nst & ym_i &:= i \cdot \left( \frac{b}{10} \right) & yyst &:= ym & ym &:= 0 \\
 & & & & yMst &:= \text{reverse}(yyst) \\
 i &:= 0..nvp & ym_i &:= \left( \frac{h}{2} - an - av \right) + i \cdot \left( \frac{b}{10} \right) & yyvp &:= ym & ym &:= 0 \\
 & & & & yMvp &:= \text{reverse}(yyvp) \\
 i &:= 0..nnp & ym_i &:= \left( \frac{h}{2} - an \right) + i \cdot \left( \frac{b}{10} \right) & yynp &:= ym & ym &:= 0 \\
 & & & & yMnp &:= \text{reverse}(yynp) \\
 & & ysM &:= \text{stack}(yMnp, yMvp, yMst)
 \end{aligned}$$

Вектор данных Y:

$$Y := \text{stack}(ysM, \text{reverse}(ysM)) \quad \text{length}(Y) = 160$$

Высота упругого ядра:

$$Y := 2 \cdot Y$$

Формирование вектора данных вдоль оси Z.

Рассматриваем верхнюю половину поперечного сечения стержня:

$$\begin{aligned}
 i &:= 1..nst & ym_i &:= i \cdot \frac{b}{10} & yyst &:= ym & ym &:= 0 \\
 zLMst &:= \text{reverse} \left[ \overrightarrow{\left( \frac{2}{Fr} \cdot Mst(2 \cdot yyst) \right)} \right] & zPMst &:= 1 - \overrightarrow{\left( \frac{2}{Fr} \cdot Mst(2 \cdot yyst) \right)} \\
 zLMst_{nst} &:= zLMst_{nst} - 0.00001 \cdot m & zPMst_0 &:= zPMst_0 + 0.00001 \cdot m \\
 i &:= 0..nvp & ym_i &:= \left( \frac{h}{2} - an - av \right) + i \cdot \frac{b}{10} & yyvp &:= ym & ym &:= 0 \\
 zLMvp &:= \text{reverse} \left[ \overrightarrow{\left( \frac{2}{Fr} \cdot Mvp(2 \cdot yyvp) \right)} \right] & zPMvp &:= 1 - \overrightarrow{\left( \frac{2}{Fr} \cdot Mvp(2 \cdot yyvp) \right)}
 \end{aligned}$$

$$i := 0..mnp \quad y_{mj} := \left( \frac{h}{2} - an \right) + i \cdot \frac{b}{10} \quad y_{ynp} := y_m \quad y_m := 0$$

$$z_{lMnp} := \text{reverse} \left[ \left( \frac{2}{Fr} \cdot Mnp(2 \cdot y_{ynp}) \right) \right] \quad z_{pMnp} := 1 - \left( \frac{2}{Fr} \cdot Mnp(2 \cdot y_{ynp}) \right)$$

$$z_{lM} := \text{stack}(z_{lMnp}, z_{lMvp}, z_{lMst}) \quad z_{pM} := \text{stack}(z_{pMst}, z_{pMvp}, z_{pMnp})$$

Вектор данных Z:

$$Z := \text{stack}(z_{lM}, z_{pM}) \quad \text{length}(Z) = 160$$

Аппроксимируя данные векторов Z и Y кубическими сплайнами, строим функцию высоты упругого ядра  $h_y$  (рисунки 5, 6):

$$h_y := h_yF(z)$$

$$s := \text{cspline}(Z, Y) \quad h_yF(t) := \text{interp}(s, Z, Y, t)$$

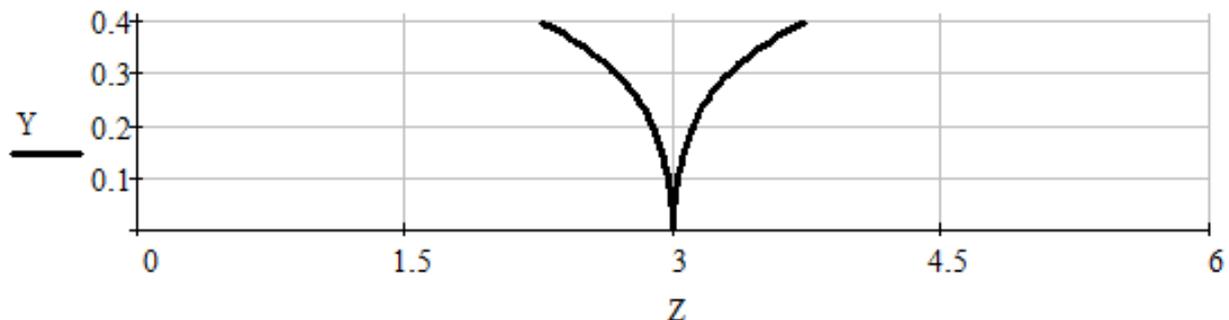


Рисунок 5 – График  $h_y := h_yF(z)$ , построенный по данным векторов Z и Y

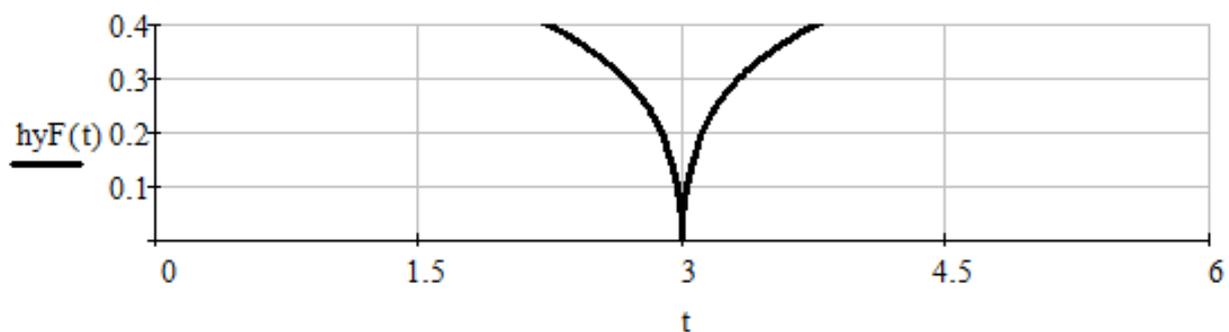


Рисунок 6 – График  $h_y := h_yF(z)$ , аппроксимированный кубическими сплайнами

При выполнении расчётов принимались следующие исходные данные: длина стержня  $l = 6,0$  м; высота поперечного сечения  $h = 0,4$  м; толщина стенки  $b = 0,025$  м; ширина и высота полок:  $a_n = 2b$ ;  $a_v = 2b$ ;  $b_n = 3b$ ;  $b_v = 2b$ ; предел текучести материала стержня  $\sigma_T = 240 \cdot 10^6$  Па; модуль упругости  $E = 200 \cdot 10^9$  Па.

После построения аналитического выражения функции высоты упругого ядра по длине стержня не составляет особого труда оценить несущую способность и жёсткость стержня при полной и ограниченной пластичности, вычислить нормальные и касательные напряжения в поперечном сечении, определить прогибы балки, а также найти остаточные нормальные и касательные напряжения и остаточные прогибы после полной разгрузки. Результаты расчётов приведены в работах [6, 7, 8].

Изложенные в статье материалы могут найти применение при упругопластическом расчёте изгибаемых стержней со сложной формой поперечного сечения.

#### **Библиографический список:**

1. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов: учебн. пособие. М.: Наука, 1986. 560 с.
2. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести: учеб. для студентов вузов. М.: Машиностроение, 1968. 400 с.
3. Нил Б.Г. Расчёт конструкций с учётом пластических свойств материалов. М.: Госстройиздат, 1961. 315 с.
4. Ржаницын А.Р. Расчёт сооружений с учётом пластических свойств материалов. 2-е изд. перераб. М.: Гос. изд-во лит. по строительству и архитектуре, 1954. 289 с.
5. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: учеб. для вузов. 10-е изд. перераб. и доп. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1999. 592 с. (Сер. Механика в техническом университете; Т.2).

6. Бакушев С.В. Упругопластический изгиб стержня с двумя осями симметрии распределённой нагрузкой // Региональная архитектура и строительство. 2013. №2. С. 71-80.

7. Бакушев С.В. Плоский поперечный упругопластический изгиб стержня с двумя осями симметрии // Строительная механика и расчёт сооружений. 2013. №4. С. 2-9.

8. Бакушев С.В. Упругопластический поперечный изгиб стержня в условиях ограниченной пластической деформации // Дороги и мосты: сборник. М.: ФГУП "РОСДОРНИИ", 2013. Вып. 30/2. С. 187-203.