УДК 539.3

ПОЛУЧЕНИЕ ИНКРЕМЕНТАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Евсеев Александр Евгеньевич,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г.Пенза,

кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика».

Аннотация

В статье приводится вывод инкрементальных уравнений метода конечных элементов для пространственной стержневой системы, состоящей из тонкостенных стержней пучкового профиля. Полученные уравнения одновременно учитывают физическую и геометрическую нелинейность.

Ключевые слова: стержневые системы, метод конечных элементов, физическая нелинейность, геометрическая нелинейность.

OBTAINING THE INCREMENTAL EQUATIONS OF THE METHOD OF FINITE ELEMENTS OF THE ROD SYSTEM

Yevseyev Aleksandr Yevgenyevich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Candidate of Sciences, Associate Professor of the department “Mechanics”.

Abstract

The article presents the derivation of the incremental equations of the finite element method for a spatial rod system consisting of thin-wall rods of a beam profile. The obtained equations simultaneously take into account physical and geometric nonlinearity.

Keywords: rod systems, finite element method, physical nonlinearity, geometric nonlinearity.

Рассматривается пространственная стержневая система, состоящая из тонкостенных стержней пучкового профиля. Под пучковым профилем здесь понимается сечение, состоящее из узких прямоугольников, оси которых пересекаются в одной точке (уголок, тавр, крест и т.п.). Для решения задачи об устойчивости и несущей способности стержневой системы необходимо рассчитать ее в физически и геометрически нелинейных постановках. При этом соответствующие уравнения равновесия метода конечных элементов становятся нелинейными. Как известно решение нелинейных уравнений осуществляется либо шаговым методом, либо итерационно. При решении задачи шаговым методом можно в процессе решения получить всю кривую равновесных состояний для данной конструкции. Кроме того, в этом случае проще решается задача устойчивости.

Для получения основных расчетных соотношений шагового метода пространственных стержневых систем получим в начале, следуя [1-3], необходимые соотношения твердого деформированного тела произвольной формы, нагруженного поверхностными нагрузками в декартовой системе координат. Все компоненты напряженно-деформированного состояния в начале текущего шага снабдим индексом "1" (они считаются известными) перед названием соответствующего компонента, а в конце шага индексом "2", начальное состояние будем обозначать индексом "0". Между компонентами напряженно-деформируемого состояния в начале и конце шага принимается зависимость

$$\begin{aligned} {}^2\vec{u} &= {}^1\vec{u} + \Delta\vec{u}, \\ {}^2\vec{\varepsilon} &= {}^1\vec{\varepsilon} + \Delta\vec{\varepsilon}, \\ {}^2\vec{\sigma} &= {}^1\vec{\sigma} + \Delta\vec{\sigma}, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\vec{u} = \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}^T$ - вектор перемещений;

$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{yz} & \gamma_{xz} \end{bmatrix}^T$ - вектор деформаций;

$\vec{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{yz} & \tau_{xz} \end{bmatrix}^T$ - вектор напряжений;

Δ - приращение соответствующих векторов на данном шаге.

Используя принцип возможных перемещений Лагранжа, условия равновесия на данном шаге, без учета объемных сил, можно представить следующим образом

$$\iiint\limits_{^0V} {}^2\vec{\sigma}^T \cdot \delta({}^2\vec{\varepsilon})dV - \iint\limits_S {}^2\vec{p}^T \cdot \delta({}^2\vec{u})dS = 0,$$

где $\delta({}^2\vec{\varepsilon})$ - вариация деформаций,

$\delta({}^2\vec{u})$ - вариация перемещений,

или с учетом (1)

$$\iiint\limits_{^0V} \left[{}^1\vec{\sigma} + \Delta\vec{\sigma}\right]^T \delta({}^2\vec{\varepsilon})dV - \iint\limits_S {}^2\vec{p}^T \cdot \delta({}^2\vec{u})dS = 0. \qquad (2)$$

Учитывая, что вариация деформаций в конце шага равна вариации приращений деформаций

$$\delta({}^2\vec{\varepsilon}) = \delta({}^1\vec{\varepsilon} + \Delta\vec{\varepsilon}) = \delta(\Delta\vec{\varepsilon}), \qquad (3)$$

условия равновесия можно представить в виде

$$\iiint\limits_{^0V} \Delta\vec{\sigma}^T \cdot \delta(\Delta\vec{\varepsilon})dV = \iint\limits_S {}^2\vec{p}^T \cdot \delta({}^2\vec{u})dS - \iiint\limits_{^0V} {}^1\vec{\sigma}^T \cdot \delta(\Delta\vec{\varepsilon})dV. \qquad (4)$$

Выразим приращения деформаций $\Delta\vec{\varepsilon}$ через перемещения.

Соотношения Коши в геометрически нелинейной постановке имеют вид

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right],$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right],$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right],$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right],$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \left[\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right],$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z} \right]. \qquad (5)$$

Вектор деформаций можно представить в виде линейных и нелинейных, относительно производных, составляющих

$$\vec{\varepsilon} = \vec{e}^{\,*} + \vec{\eta}^{\,*}. \qquad (6)$$

Линейные деформации можно представить в виде

$$\vec{e}^{\,*} = A^T \vec{u}, \qquad (7)$$

где $A = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$ - матричный дифференциальный оператор.

Нелинейную часть деформаций можно записать в форме

$$\vec{\eta}^{\,*}_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial \vec{u}^T}{\partial x_i}\frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j}. \qquad (8)$$

Смысл этой записи становится понятным, если компоненты вектора деформаций представить в виде

$$\vec{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{yz} & \gamma_{zx} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{33} & 2\varepsilon_{12} & 2\varepsilon_{23} & 2\varepsilon_{31} \end{bmatrix}^T,$$

а оси координат пронумеровать $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

Исходя из приведенных выше зависимостей, деформации в конце шага равны

$$^2\vec{\varepsilon} = {}^1\vec{\varepsilon} + \Delta\vec{\varepsilon} = A^T({}^1\vec{u} + \Delta\vec{u}) + \vec{\eta}^{\,**}, \qquad (9)$$

где $\eta^{**}_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial({}^1\vec{u} + \Delta\vec{u})^T}{\partial x_i}\frac{\partial({}^1\vec{u} + \Delta\vec{u})}{\partial x_j}.$

Вычитая из (9) деформации в начале шага (6), получим приращения деформации на данном шаге

$$\Delta\vec{\varepsilon} = A^T\Delta\vec{u} + \Delta\vec{\eta}^{\,***}, \qquad (10)$$

где $\quad \eta_{ij}^{***} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^1\vec{u}^T}{\partial x_i}\frac{\partial\Delta\vec{u}}{\partial x_j} + \frac{\partial^1\vec{u}^T}{\partial x_j}\frac{\partial\Delta\vec{u}}{\partial x_i} + \frac{\partial(\Delta\vec{u})^T}{\partial x_i}\frac{\partial\Delta\vec{u}}{\partial x_j} \right).$

Представим приращения деформаций в виде суммы линейных и нелинейных частей относительно приращений

$$\Delta\vec{\varepsilon} = \Delta\vec{e} + \Delta\vec{\eta}, \tag{11}$$

где $\quad \Delta e_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\Delta u_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^1 u_k}{\partial x_i}\frac{\partial\Delta u_k}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^1 u_k}{\partial x_j}\frac{\partial\Delta u_k}{\partial x_i} \right],$

$$\Delta\eta_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial\Delta u_k}{\partial x_j}\frac{\partial\Delta u_k}{\partial x_i}.$$

С учетом (11) условия равновесия (4) принимают вид

$$\begin{gathered} \iiint\limits_{{}^0V} \Delta\vec{\sigma}^T \cdot \delta(\Delta\vec{\varepsilon})dV + \iiint\limits_{{}^0V} {}^1\vec{\sigma}^T \cdot \delta(\Delta\vec{\eta})dV = \\ = \iint\limits_{S} {}^2\vec{p}^T \cdot \delta({}^2\vec{u})dS - \iiint\limits_{{}^0V} {}^1\vec{\sigma}^T \cdot \delta(\Delta\vec{e})dV. \end{gathered} \tag{12}$$

Принимая во внимание, что шаг нагружения достаточно мал, будем считать, что между приращениями компонентов напряжений и деформаций имеет место линейная зависимость, аналогичная закону Гука

$$\Delta\vec{\sigma} = {}^1D \cdot \Delta\vec{\varepsilon}, \tag{13}$$

где ${}^1D$ — матрица, элементами которой являются жесткостные характеристики материала, определяемые исходя из напряженно-деформированного состояния в начале шага.

Уравнение равновесия (12) с учетом физических соотношений (13) принимает вид

$$\begin{gathered} \iiint\limits_{{}^0V} \Delta\vec{\varepsilon}^T \cdot {}^1D \cdot \delta(\Delta\vec{\varepsilon})dV + \iiint\limits_{{}^0V} {}^1\vec{\sigma}^T \cdot \delta(\Delta\vec{\eta})dV = \\ = \iint\limits_{S} {}^2\vec{p}^T \cdot \delta({}^2\vec{u})dS - \iiint\limits_{{}^0V} {}^1\vec{\sigma}^T \cdot \delta(\Delta\vec{e})dV. \end{gathered} \tag{14}$$

Поскольку приращения деформаций $\Delta\vec{\varepsilon}$ на каждом шаге нагружения непосредственно зависят от перемещений на этом шаге, которые неизвестны, выражение (14) является нелинейным. Однако, учитывая малость шага, его можно линеаризовать, подставив в первый интеграл $\Delta\vec{\varepsilon} \cong \Delta\vec{e}$. При этом выражение (14) примет вид

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_{^0V} \Delta\vec{e}^T \cdot {}^1D \cdot \delta(\Delta\vec{e})dV + \iiint\limits_{^0V} {}^1\vec{\sigma}^T \cdot \delta(\Delta\vec{\eta})dV = \\ &= \iint\limits_{S} {}^2\vec{p}^T \cdot \delta({}^2\vec{u})dS - \iiint\limits_{^0V} {}^1\vec{\sigma}^T \cdot \delta(\Delta\vec{e})dV,\end{aligned} \tag{15}$$

которое представляет основное линеаризованное уравнение на каждом шаге нагружения.

Это уравнение может служить основой для решения пространственной задачи механики деформируемого твердого тела методом конечных элементов. При переходе к частным случаям пространственной задачи (двумерная, стержневая система и т.п.) вводятся, как правило, дополнительные допущения, которые позволяют упростить получение матриц жесткости без ущерба для точности решения задачи. В частности, для стержневых систем из тонкостенных элементов можно считать, что деформации малы при больших перемещениях. Это приводит к двум упрощениям:

— площади сечений не меняются и компоненты $\Delta\vec{\sigma}$ являются тензорами напряжений Коши;

— длины стержней не меняются.

В результате этих допущений можно считать, что

$$\Delta\vec{e} = A^T \cdot \Delta\vec{u}. \tag{16}$$

В этом случае уравнение равновесия (15) на каждом шаге принимает вид

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_{^0V} (A^T\Delta\vec{u})^T \cdot {}^1D \cdot \delta(A^T\Delta\vec{u})dV + \iiint\limits_{^0V} {}^1\vec{\sigma}^T \cdot \delta(\Delta\vec{\eta})dV = \\ &= \iint\limits_{S} {}^2\vec{p}^T \cdot \delta({}^2\vec{u})dS - \iiint\limits_{^0V} {}^1\vec{\sigma}^T \cdot \delta(\Delta\vec{e})dV\end{aligned}$$

или, вынося за интеграл операцию варьирования, получаем

$$\begin{aligned}&\delta\left[\iiint\limits_{^0V} (A^T\Delta\vec{u})^T \cdot {}^1D \cdot (A^T\Delta\vec{u})dV\right] + \delta\left[\iiint\limits_{^0V} {}^1\vec{\sigma}^T \cdot \Delta\vec{\eta}dV\right] = \\ &= \delta\left[\iint\limits_{S} {}^2\vec{p}^T \cdot {}^2\vec{u}dS\right] - \delta\left[\iiint\limits_{^0V} {}^1\vec{\sigma}^T \cdot \Delta\vec{e}dV\right].\end{aligned} \tag{17}$$

При конечно-элементной формулировке задачи перемещения и приращения перемещений будем выражать через одни и те же функции формы (интерполяционные функции), определяющие перемещения и их приращения в каждой точке конечного элемента через узловые перемещения

$$\vec{u} = \bar{N} \cdot \vec{Z}, \qquad \Delta\vec{u} = \bar{N} \cdot \Delta\vec{Z}, \tag{18}$$

где $\bar{N}$ - матрица функций формы, число столбцов которой определяется числом степеней свободы конечного элемента;

$\vec{Z}, (\Delta\vec{Z})$ - вектор узловых перемещений (приращений перемещений).

При этом первый интеграл выражения (17) можно записать в виде

$$\delta\left[\iiint_{^0V} (A^T \cdot \bar{N} \cdot \Delta\vec{Z})^T \cdot {}^1D \cdot (A^T \cdot \bar{N} \cdot \Delta\vec{Z}) dV\right],$$

преобразуя, получим

$$\delta\left[\iiint_{^0V} \Delta\vec{Z}^T (A^T \cdot \bar{N})^T \cdot {}^1D \cdot (A^T \cdot \bar{N}) \Delta\vec{Z} dV\right]. \tag{19}$$

Так как значения узловых перемещений являются постоянными величинами, их можно вынести за знак интеграла

$$\delta \cdot \left[\Delta\vec{Z}^T \left(K_L\right) \Delta\vec{Z}\right], \tag{20}$$

де $K_L = \iiint_{^0V} (A^T \cdot \bar{N})^T \cdot {}^1D \cdot (A^T \cdot \bar{N}) dV$ линейная матрица жесткости конечного элемента.

Используя запись для нелинейных составляющих относительно приращений деформаций, из (11) второй интеграл уравнения (17) запишем в виде

$$\delta\left[\iiint_{^0V} {}^1\vec{\sigma}^T \cdot \Delta\vec{\eta} dV\right] = \delta\left[\iiint_{^0V} {}^1\sigma_{ij} \left(\frac{\partial\Delta\vec{u}^T}{\partial x_i} \frac{\partial\Delta\vec{u}}{\partial x_j}\right) dV\right]. \tag{21}$$

Выражение (21) можно представить в форме

$$\delta\left[\iiint_{^0V} \frac{\partial\Delta\vec{u}^T}{\partial x_i} {}^1\sigma_{ij} \frac{\partial\Delta\vec{u}}{\partial x_j} dV\right]$$

или, используя (18),

$$\delta\left[\iiint\limits_{{}^0V}(A_{NL}^T\cdot\Delta\vec{u})^T\cdot S\cdot(A_{NL}^T\cdot\Delta\vec{u})dV\right], \qquad (22)$$

где

$$S=\left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc}
\sigma_x & 0 & 0 & \tau_{xy} & 0 & 0 & \tau_{xz} & 0 & 0\\
0 & \sigma_x & 0 & 0 & \tau_{xy} & 0 & 0 & \tau_{xz} & 0\\
0 & 0 & \sigma_x & 0 & 0 & \tau_{xy} & 0 & 0 & \tau_{xz}\\
\hdashline
\tau_{yx} & 0 & 0 & \sigma_y & 0 & 0 & \tau_{yz} & 0 & 0\\
0 & \tau_{yx} & 0 & 0 & \sigma_y & 0 & 0 & \tau_{yz} & 0\\
0 & 0 & \tau_{yx} & 0 & 0 & \sigma_y & 0 & 0 & \tau_{yz}\\
\hdashline
\tau_{zx} & 0 & 0 & \tau_{zy} & 0 & 0 & \sigma_z & 0 & 0\\
0 & \tau_{zx} & 0 & 0 & \tau_{zy} & 0 & 0 & \sigma_z & 0\\
0 & 0 & \tau_{zx} & 0 & 0 & \tau_{zy} & 0 & 0 & \sigma_z
\end{array}\right],$$

$$A_{NL}=\left[\begin{array}{ccc:ccc:ccc}
\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0\\
0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0\\
0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z}
\end{array}\right].$$

Используя (18), запишем

$$\delta\left[\iiint\limits_{{}^0V}(A_{NL}^T\cdot\bar{N}\cdot\Delta\vec{Z})^T\cdot S\cdot(A_{NL}^T\cdot\bar{N}\cdot\Delta\vec{Z})dV\right]. \qquad (23)$$

Выноса приращения узловых перемещений за знак интеграла, получим

$$\delta\cdot\left[\Delta\vec{Z}^T\left(K_{NL}\right)\Delta\vec{Z}\right], \qquad (24)$$

где $K_{NL}=\iiint\limits_{{}^0V}(A_{NL}^T\cdot\bar{N})^T\cdot S\cdot(A_{NL}^T\cdot\bar{N})dV$ - нелинейная матрица жесткости конечного элемента.

Четвертый интеграл выражения (17), используя соотношения (16) и формулу (18), можно представить в виде

$$\delta\iiint\limits_{{}^0V} {}^1\vec{\sigma}^T \cdot \Delta\vec{e}dV = \delta\iiint\limits_{{}^0V} {}^1\vec{\sigma}^T \cdot (A^T\Delta\vec{u})dV = \delta\iiint\limits_{{}^0V} (A^T\Delta\vec{u})^T \cdot {}^1\vec{\sigma}dV =$$

$$= \delta\iiint\limits_{{}^0V} (A^T\bar{N} \cdot \Delta\vec{Z})^T \cdot {}^1\vec{\sigma}dV = \delta\left[\Delta\vec{Z}\iiint\limits_{{}^0V} (A^T\bar{N})^T \cdot {}^1\vec{\sigma}dV\right]. \qquad (25)$$

В итоге, выполнив операцию варьирования, вместо уравнения равновесия (15) получим каноническое уравнение метода перемещений шагового метода

$$\left({}^1_0K_L + {}^1_0K_{NL}\right) \cdot \Delta\vec{Z} = {}^2\vec{Q} - {}^1_0\vec{F}. \qquad (26)$$

где ${}^2\vec{Q}$ - вектор узловых нагрузок,

$\vec{F}$ - дополнительный вектор правых частей.

Библиографический список

1. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности [Текст] / Васидзу К. М.: «Мир», 1987. 542 с.

2. Еременко С.Ю. Методы конечных элементов в механике деформируемых тел. [Текст] / Еременко С.Ю. Х.: Изд-во «Основа» при Харьк. ун-те, 1991. 272 с.

3. Секулович М. Метод конечных элементов [Текст] / Секулович М. М.: «Стройиздат», 1993. 272 с.