

УДК 624.041

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТОНКОСТЕННОГО Z-ОБРАЗНОГО СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ БЕЗ ЗАКРУГЛЕНИЯ

Волков Владимир Павлович,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика».

Аннотация

Статья посвящена определению относительных размеров и геометрических характеристик тонкостенного Z-образного стержня переменной толщины без закругления, когда полка профиля с усилением *параллельна* главной центральной оси, необходимых для нахождения напряженно-деформированного состояния стержня в общем случае действия внешней нагрузки. Приведены расчетные формулы для определения относительных значений ширины профиля, длины контура, главных осевых моментов инерции и главного секториального момента инерции, необходимых для определения величины напряжений. Приведены эпюры главных центральных декартовых координат и главных секториальных координат, которые характеризуют распределение нормальных напряжений, а также, эпюры статических моментов отсеченной части относительно главных центральных осей и главного секториального статического момента отсеченной части, которые характеризуют распределение касательных напряжений в поперечном сечении стержня.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, гнутый тонкостенный стержень, Z-образный профиль, главные центральные оси сечения, главные осевые моменты инерции, главные секториальные координаты, главный секториальный момент инерции, статические моменты отсеченной части.

THE STRESS-STRAIN STATE OF THIN-WALLED Z-SHAPED ROD OF VARIABLE THICKNESS WITHOUT CORNER

Volkov Vladimir Pavlovich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Candidate of Sciences, Associate Professor of the department "Mechanics".

Abstract

The article is devoted to the determination of the relative size and geometric characteristics of a thin-walled Z-shaped rod of variable thickness without rounding, when the profile shelf with an increase is parallel to the main Central axis, necessary to find the stress-strain state of the rod in the General case of external load. The calculation formulas for determining the relative values of the profile width, contour length, the main axial moments of inertia and the main sectorial moment of inertia required to determine the magnitude of stresses are given. Diagrams of the main Central Cartesian coordinates and the main sectorial coordinates, which characterize the distribution of normal stresses, as well as diagrams of the static moments of the cut-off part relative to the main Central axes and the main sectorial static moment of the cut-off part, which characterize the distribution of shear stresses in the cross section of the rod.

Keywords: stress-strain state, bent thin-walled rod, Z-shaped profile, the main Central axes of the section, the main axial moments of inertia, the main sectorial coordinates, the main sectorial moment of inertia, the static moments of the cut-off part.

Условные обозначения (рис. 1):

XU - главные центральные оси сечения;

$B = 2b$ - габаритная ширина срединной линии профиля сечения;

$H = 2h$ - габаритная высота срединной линии профиля сечения;

$\delta \ll h, b$ - постоянная толщина срединной линии профиля сечения;

$\delta_{II} \ll h, b$ - толщина усиления полки;

$\xi = 1 + \frac{\delta_n}{\delta}$ - отношение толщин полки к стенке;

L - полная длина срединной линии профиля сечения;

A - площадь поперечного сечения стержня;

γ - угол между наклонной стенкой профиля и осью X ;

$b_h = \frac{b}{h} = \frac{B}{H}$ - относительная ширина профиля сечения.

В общем случае нагружения нормальные и касательные напряжения в произвольной точке срединной линии профиля сечения тонкостенного стержня определяются по принципу суперпозиции как алгебраическая сумма напряжений от отдельных составляющих деформаций [8], т.е. деформаций растяжения-сжатия, косоугольного изгиба и стесненного кручения, по формулам

$$\begin{cases} \sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot x + \frac{B_\omega}{I_\omega} \cdot \bar{\omega}, \\ \tau = \frac{Q_y \cdot S_x^{\text{отс}}}{I_x \cdot \delta} + \frac{Q_x \cdot S_y^{\text{отс}}}{I_y \cdot \delta} + \frac{M_\omega \cdot S_\omega^{\text{отс}}}{I_\omega \cdot \delta} \end{cases}$$

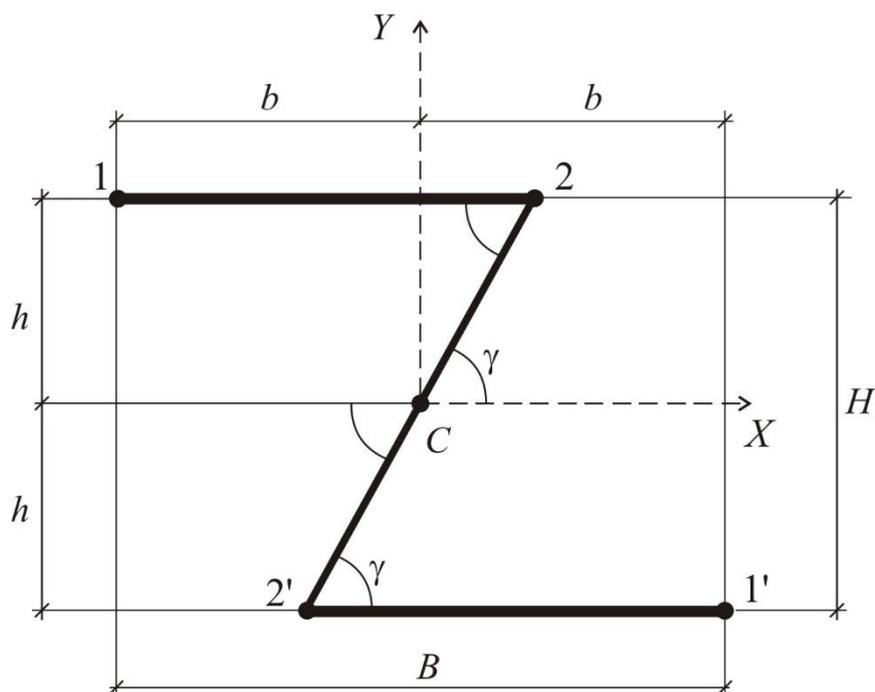
где x , y и $\bar{\omega}$ - соответственно декартовы координаты относительно главных центральных осей XU и главная секториальная координата, т.е. секториальная площадь между центром кручения или центром изгиба, истинной начальной и текущей точками на срединной линии профиля сечения, следовательно, для них должны быть справедливы выражения

$$\begin{cases} \int_A x dA = 0, \int_A y dA = 0, \int_A \bar{\omega} dA = 0, \\ \int_A xy dA = 0, \int_A y \bar{\omega} dA = 0, \int_A x \bar{\omega} dA = 0 \end{cases}$$

Эпюры x , y и $\bar{\omega}$ характеризуют распределение нормальных напряжений, а эпюры $S_x^{\text{отс}}$, $S_y^{\text{отс}}$ и $S_\omega^{\text{отс}}$ характеризуют распределение касательных напряжений в поперечном сечении тонкостенного стержня.

В статье рассматривается задача определения относительной ширины профиля сечения b_h , когда полка Z -образного профиля параллельна главной центральной оси X , и задача определения геометрических характеристик сечения необходимых для нахождения напряженно-деформированного

состояния тонкостенного стержня Z-образного сечения (рис.1).



Дано: $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$

Найти: $b_h - ?$

Рисунок 1 - C - центр симметрии

Частные случаи, когда полка тонкостенного Z-образного стержня постоянной толщины δ параллельна главной центральной оси, рассмотрены:

- без отбортовки и без закруглений в [1];
- без отбортовки, но с учетом закругления r в [2], [3];
- с отбортовкой s для сечения, равноудаленного от оси Y , в [4];
- с отбортовкой s и с закруглениями $r = r_1$ для сечения, равноудаленного от оси Y в [5];
- с отбортовкой s , но без закруглений, в [6];
- с отбортовкой s и с закруглением r в [7].

Учитывая центральную симметрию, когда и центр тяжести сечения и центр кручения или центр изгиба совпадают с точкой C – центром симметрии, рассмотрим верхнюю половину сечения между характерными точками (рис.1).

Декартовы координаты x , y характерных точек и длины соответствующих участков l (рис. 1):

$$x_1 = -b, \quad y_1 = h, \quad l_{12} = b + x_2;$$

$$x_2 = \frac{h}{\operatorname{tg}\gamma}, \quad y_2 = h, \quad l_{c2} = \frac{h}{\sin\gamma}; \quad \beta = \pi - \gamma.$$

Центральные оси XU сечения (рис.1) являются главными [8], если

$$I_{xy} = \int_A x(s) \cdot y(s) \cdot dA \Rightarrow 2 \cdot \int_{L/2} x(s) \cdot y(s) \cdot \delta(s) \cdot ds = 0,$$

$$\xi \cdot \frac{b^2 \cdot h}{2} = \xi \frac{x_2^2 \cdot y_2}{2} + \frac{l_{c2} \cdot x_2 \cdot y_2}{3},$$

или

$$b_h = \sqrt{x_h^2 \cdot y_h + \frac{2}{3 \cdot \xi} \cdot l_{c2h} \cdot x_h \cdot y_h} \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\gamma} + \frac{2}{3 \cdot \xi} \cdot \frac{1}{\sin\gamma} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}}, \quad (1)$$

где введены обозначения для относительных координат характерных точек и длин участков:

$$x_h = \frac{x_2}{h} \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{tg}\lambda}, \quad y_h = \frac{y_2}{h} \Rightarrow 1;$$

$$l_{12h} = b_h + x_h \Rightarrow b_h + \frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}; \quad l_{c2h} = \frac{l_{c2}}{h} \Rightarrow \frac{1}{\sin\gamma}.$$

Статические моменты отсеченной части относительно оси x :

$$S_x^{\text{отс}} = \int_{A^{\text{отс}}} y \cdot dA = \int_{L^{\text{отс}}} y(s) \cdot \delta(s) \cdot ds = \delta \cdot S_{x,i}^{\text{отс}},$$

и их относительные значения $S_{x,ih}^{\text{отс}} = \frac{S_{x,i}^{\text{отс}}}{h^2}$ для характерных точек:

$$S_{x,1h}^{\text{отс}} = 0;$$

$$S_{x,2h}^{\text{отс}} = S_{x,1h}^{\text{отс}} + \xi \cdot 1 \cdot l_{12h};$$

$$S_{x,Ch}^{\text{отс}} = S_{x,2h}^{\text{отс}} + l_{c2h}^{\text{отс}} \cdot \frac{y_h}{2} \Rightarrow S_{x,\max}^{\text{отс}}$$

Эпюра декартовых координат Y , подобная напряжениям σ_{Mx} , и эпюра $S_x^{\text{отс}}$ с распределением напряжений τ_{Qy} приведены на рис.2.

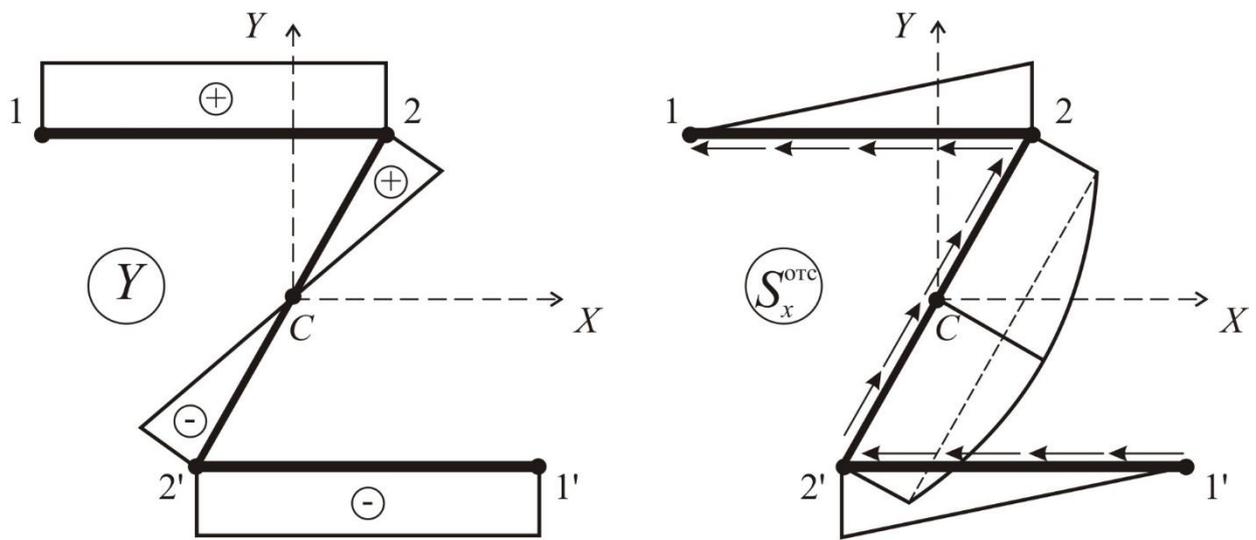


Рисунок 2

Статические моменты отсеченной части относительно оси y :

$$S_y^{\text{отс}} = \int_{A^{\text{отс}}} x \cdot dA = \int_{L^{\text{отс}}} x(s) \cdot \delta(s) \cdot ds = \delta \cdot S_{y,i}^{\text{отс}},$$

и их относительные значения $S_{y,ih}^{\text{отс}} = \frac{S_{y,i}^{\text{отс}}}{h^2}$ для характерных точек:

$$S_{y,1h}^{\text{отс}} = 0;$$

$$S_{y,\min}^{\text{отс}} = 0 - \xi \cdot \frac{b_h^2}{2};$$

$$S_{y,2h}^{\text{отс}} = S_{y,\min}^{\text{отс}} + \xi \cdot \frac{x_h^2}{2};$$

$$S_{y,Ch}^{\text{отс}} = S_{y,2h}^{\text{отс}} + l_{C2h} \cdot \frac{x_h}{2} \Rightarrow S_{y,\max}^{\text{отс}}$$

Эпюра декартовых координат X , подобная напряжениям σ_{My} , и эпюра $S_y^{\text{отс}}$ с распределением напряжений τ_{Qx} приведены на рис.3.

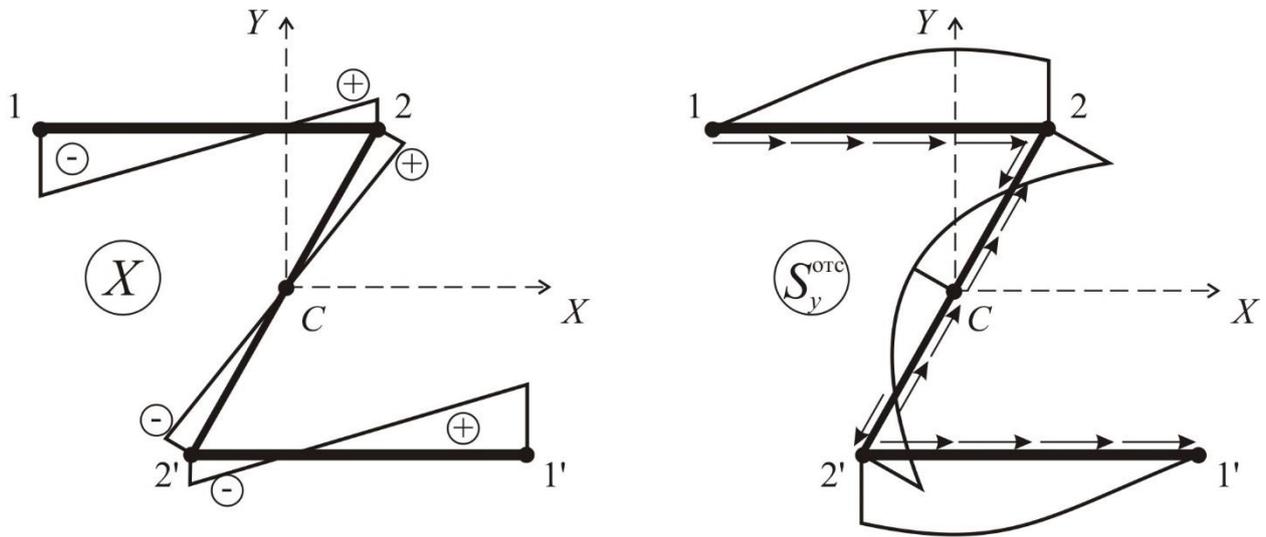


Рисунок 3

Относительная длина контура гнутого Z-образного профиля $\frac{L}{H}$:

$$l_h = \frac{L/2}{h} \Rightarrow l_{12h} + l_{c2h}, \quad (2)$$

где $L/2 = l_{12} + l_{c2}$.

Главные осевые моменты инерции определяются по формулам:

$$I_x = \int_A y^2(s) \cdot dA \Rightarrow 2 \cdot \int_{\frac{L}{2}} y^2(s) \cdot \delta(s) \cdot ds \Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot \left(\xi \cdot l_{12} \cdot h^2 + \frac{l_{c2}}{3} \cdot y_2^2 \right),$$

$$I_x \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^3} \Rightarrow \xi \cdot l_{12h} + \frac{l_{c2h}}{3} \cdot y_h^2, \quad (3)$$

$$I_y = \int_A x^2(s) \cdot dA \Rightarrow 2 \cdot \int_{\frac{L}{2}} x^2(s) \cdot \delta(s) \cdot ds \Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot \left(\xi \cdot \frac{l_{12}}{3} \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_1 \cdot x_2) + \frac{l_{c2}}{3} \cdot x_2^2 \right),$$

$$I_y \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^3} \Rightarrow \xi \cdot \frac{l_{12h}}{3} \cdot (b_h^2 + x_h^2 + b_h \cdot x_h) + \frac{l_{c2h}}{3} \cdot x_h^2. \quad (4)$$

Для нахождения главного секториального момента инерции сечения (рис.1) $I_\omega = \int_A \omega^2(s) \cdot dA$ введем секториальные координаты ω (удвоенная площадь сектора, где полюс и начальная точка отсчета выбраны в точке C), которые равны для характерных точек:

$$\omega_c = 0; \quad \omega_2 = 0;$$

$$\omega_1 = \omega_2 + h \cdot l_{12}.$$

Относительные секториальные координаты $\frac{\omega}{h^2}$ характерных точек:

$$\omega_{Ch} = 0; \quad \omega_{2h} = 0;$$

$$\omega_{1h} = \omega_{2h} + l_{12h}.$$

Для нахождения истинной начальной точки M_0 вычислим секториальный статический момент половины сечения:

$$S = \int_{\frac{A}{2}} \omega \cdot dA = \int_{\frac{L}{2}} \omega(s) \cdot \delta(s) \cdot ds \Rightarrow \delta \cdot S_C^{\text{отс}} = \delta \cdot h^3 \cdot S_{Ch}^{\text{отс}},$$

его значение определим, суммируя отдельные участки, причём при отсчете от точки 1 эти относительные величины для характерных точек будут равны

$$S_{1h}^{\text{отс}} = 0;$$

$$S_{2h}^{\text{отс}} = S_{1h}^{\text{отс}} + \xi \cdot \frac{\omega_{1h} + \omega_{2h}}{2} \cdot l_{12h};$$

$$S_{Ch}^{\text{отс}} = S_{2h}^{\text{отс}} + 0. \quad (5)$$

Тогда постоянная D , определяющая истинную начальную точку отсчета M_0 и s_0 – расстояние от точки 2 до точки M_0 , где $\omega = 0$:

$$D = \frac{s}{\int_{\frac{A}{2}} dA} \Rightarrow \frac{\delta \cdot S_C^{\text{отс}}}{\delta \cdot (\xi \cdot l_{12} + l_{C2})} = h^2 \cdot \frac{S_{Ch}^{\text{отс}}}{\xi \cdot l_{12h} + l_{C2h}}, \quad \frac{D}{h^2} = \frac{S_{Ch}^{\text{отс}}}{\xi \cdot l_{12h} + l_{C2h}} \quad (6)$$

$$s_0 = \frac{D - \omega_2}{h} \Rightarrow h \cdot \left(\frac{S_{Ch}^{\text{отс}}}{\xi \cdot l_{12h} + l_{C2h}} - \omega_{2h} \right), \quad \frac{s_0}{h} = \frac{S_{Ch}^{\text{отс}}}{\xi \cdot l_{12h} + l_{C2h}} - \omega_{2h} \quad (7)$$

Главные секториальные координаты $\bar{\omega} = \omega - D$ характерных точек:

$$\bar{\omega}_c = \omega_2 \Rightarrow h^2 \cdot \left(0 - \frac{S_{Ch}^{\text{отс}}}{\xi \cdot l_{12h} + l_{C2h}} \right);$$

$$\bar{\omega}_1 \Rightarrow h^2 \cdot \left(\omega_{1h} - \frac{S_{Ch}^{\text{отс}}}{\xi \cdot l_{12h} + l_{C2h}} \right).$$

Относительные главные секториальные координаты $\frac{\bar{\omega}}{h^2}$ характерных

точек:

$$\bar{\omega}_{Ch} = \bar{\omega}_{2h} \Rightarrow \left(0 - \frac{S_{Ch}^{отс}}{\xi \cdot l_{12h} + l_{C2h}} \right);$$

$$\bar{\omega}_{1h} \Rightarrow \left(\omega_{1h} - \frac{S_{Ch}^{отс}}{\xi \cdot l_{12h} + l_{C2h}} \right).$$

Главный секториальный статический момент отсеченной части:

$$S_{\omega}^{отс} = \int_{A^{отс}} \bar{\omega} \cdot dA \Rightarrow \int_{L^{отс}} \bar{\omega} \cdot \delta(s) \cdot ds,$$

и его относительные значения $S_{\omega,ih}^{отс} = \frac{1}{\delta \cdot h^3} \cdot S_{\omega}^{отс}$ для характерных точек:

$$S_{\omega,1h}^{отс} = 0;$$

$$S_{\omega,max}^{отс} = 0 + \xi \cdot \bar{\omega}_{1h} \cdot \frac{l_{12} - s_0}{2};$$

$$S_{\omega,2h}^{отс} = S_{\omega,max}^{отс} - \xi \cdot \bar{\omega}_{2h} \cdot \frac{s_0}{2};$$

$$S_{\omega,Ch}^{отс} = S_{\omega,2h}^{отс} - \bar{\omega}_{Ch} \cdot l_{C2h} \Rightarrow 0.$$

Эпюра главных секториальных координат $\bar{\omega}$, подобная напряжениям $\sigma_{B\omega}$, и эпюра $S_{\omega}^{отс}$ с распределением напряжений $\tau_{M\omega}$ приведены на рис.4.

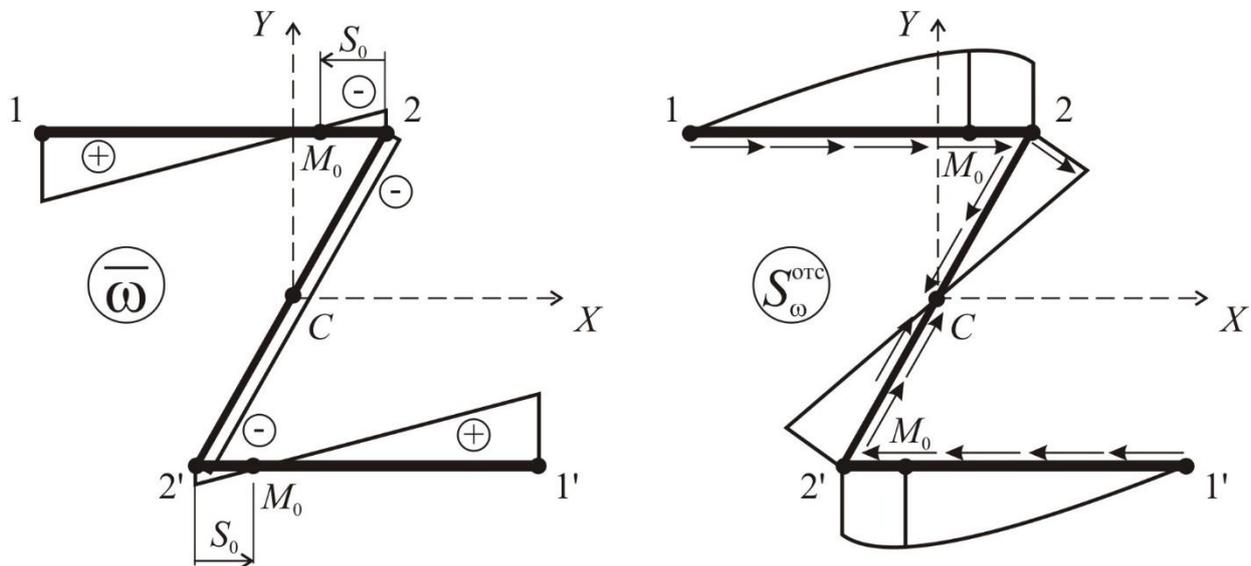


Рисунок 4

Главный секториальный момент инерции сечения определяется по формуле:

$$I_{\omega} = \int_A \bar{\omega}^2(s) \cdot dA \Rightarrow 2 \cdot \int_{\frac{L}{2}} \bar{\omega}^2(s) \cdot \delta(s) \cdot ds \Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot \left(\xi \cdot \frac{l_{12}}{3} \cdot (\bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_2^2 + \bar{\omega}_1 \cdot \bar{\omega}_2) + l_{C2} \cdot \bar{\omega}_2^2 \right),$$

$$I_{\omega} \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^5} \Rightarrow \xi \cdot \frac{l_{12h}}{3} \cdot (\omega_{1h}^2 + \omega_{2h}^2 + \omega_{1h} \cdot \omega_{2h}) + l_{c2} \cdot \omega_{2+h}^2 \quad (8)$$

Библиографический список:

1. Волков В.П., Волкова О.В. Определение геометрических характеристик тонкостенного Z-образного стержня [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2015. №1. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostenogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file .
2. Волков В.П., Волкова О.В. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с закруглением [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2015. №2. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostenogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file .
3. Волков В.П., Волкова О.В. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с закруглением для расчета на изгиб с кручением [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2016. №3. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostenogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file .
4. Волков В.П., Кустова О.В. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с отбортовкой [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2016. №4. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostenogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file .
5. Волков В.П., Кустова О.В. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с отбортовкой и с закруглением [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2017. №5.

URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostenogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file .

6. Волков В.П., Кустова О.В. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с отбортовкой с учетом изготовления [Электронный ресурс] //Моделирование и механика конструкций. 2017. №6.

URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostenogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file (дата обращения: 07.11.2017).

7. Волков В.П., Кустова О.В. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с отбортовкой и с закруглением с учетом изготовления [Электронный ресурс] //Моделирование и механика конструкций. 2018. №7.

URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostenogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file.

8. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. М: Высш. шк., 1995. 560 с.; ил.