

УДК 624.072.31

## **ВНЕЦЕНТРЕННО-СЖАТАЯ КОЛОННА, НАГРУЖЕННАЯ СОВОКУПНОСТЬЮ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛ**

***Бакушев Сергей Васильевич,***

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,  
г. Пенза,*

*доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».*

***Ключникова Ирина Алексеевна,***

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,  
г. Пенза,*

*студент.*

### **Аннотация**

Рассматривается внецентренно сжатая прямолинейная упругая колонна с консолью, воспринимающая нагрузку от балки, опирающейся на консоль колонны через опорную поверхность. Распределённая по площади опорной поверхности нагрузка моделируется совокупностью сосредоточенных сил для случаев идеального и неидеального исполнения опорных конструкций консоли колонны и балки. Рассматривается пять вариантов нагружения консоли колонны сосредоточенными силами. Показано, что расчёт внецентренно нагруженной колонны при неидеальном обустройстве опорных конструкций консолей колонны и балки следует выполнять на действие совокупности сосредоточенных сил, определённых для фактического распределения опорного давления по опорной площадке.

**Ключевые слова:** внецентренное нагружение, упругая колонна с консолью, нейтральная линия, нормальные напряжения, распределённая нагрузка, сосредоточенные силы.

# PATANDS-A COMPRESSED COLUMN, LOADED WITH COMBINATION OF CONCENTRATED FORCES

*Bakushev Sergey Vasilevich*

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,  
Doctor of Sciences, Professor of the department "Mechanics".*

*Kluchnikova Irina Alekseevna*

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,  
student.*

## **Abstract.**

Patands is considered a compressed elastic straight column with the console, perceiving the load of beams based on the console through the bearing surface. Distributed by square load bearing surface is modeled by a combination of concentrated forces in cases of perfect and imperfect performance console supporting structure columns and beams. Considered five options loading console columns concentrated forces. It is shown that the calculation of the patands loaded column in nonideal landscaping retaining structures consoles columns and beams should be carried out on the effect of concentrated forces together for the actual distribution of reference pressure on the supporting floor.

**Keywords:** loading by the Centre of gravity, elastic column with the console, neutral line, normal pressure, distributed load, concentrated force.

## **Введение**

Внецентренно нагруженные стойки или стержни находят широкое применение в строительстве. Сюда относятся колонны промышленных цехов, пилястры кирпичных стен и так далее. Внецентренно нагруженные колонны воспринимают нагрузку, как правило, от балок, опирающихся на консоли колонн через опорную поверхность.

Если опорные конструкции колонны и балки выполнены идеально, то вес балки передаётся на опорную поверхность консоли колонны посредством равномерно-распределённой по площади опорной поверхности нагрузки. В этом случае для расчёта внецентренно сжатой колонны равномерно-распределённая опорная нагрузка приводится к одной сосредоточенной силе, приложенной в центре тяжести опорной поверхности.

Если же опорные конструкции колонны и балки выполнены не идеально, то вес балки передаётся на опорную поверхность консоли колонны посредством неравномерно-распределённой по площади опорной поверхности нагрузки. В этом случае следует опорную поверхность разделить на несколько отдельных частей, для каждой из которых найти равнодействующую от той части нагрузки, которая действует по этой части поверхности и рассчитать внецентренно нагруженную колонну от действия совокупности сосредоточенных сил, параллельных оси колонны.

### Постановка задачи

В данной работе моделируется случай внецентренного нагружения колонны при идеальном и неидеальном обустройстве опорных конструкций консолей колонны и балки (рис. 1).

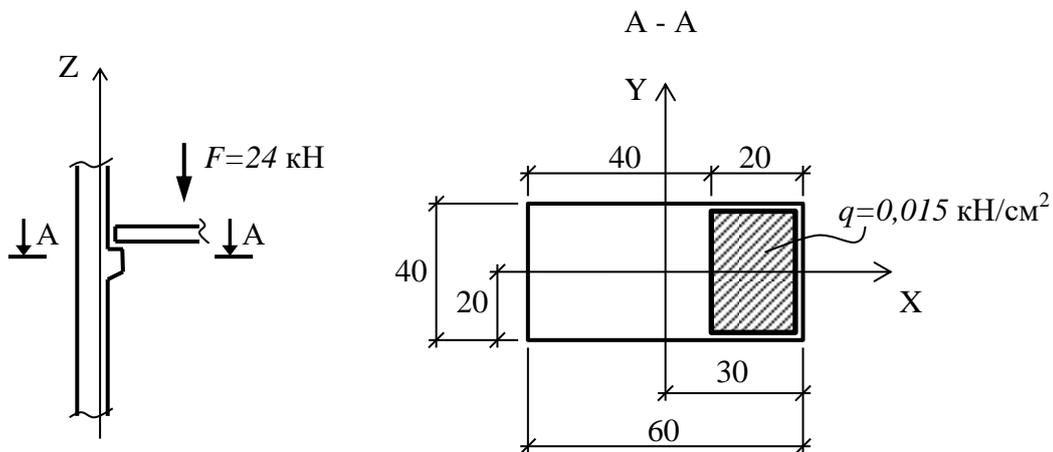


Рисунок 1 - Внецентренно нагруженная колонна

Рассматриваются пять вариантов нагружения консоли колонны сосредоточенными силами. В первом случае равномерно-распределённая нагрузка, действующая по опорной поверхности консоли, заменяется равнодействующей, приложенной в центре тяжести опорной поверхности (рис. 2 а). Во втором случае равномерно-распределённая нагрузка заменяется четырьмя равными между собой сосредоточенными силами, действующими по четырём равным площадям опорной поверхности (рис. 2б). В третьем и четвертом случаях неравномерно-распределённая нагрузка заменяется четырьмя неравными между собой сосредоточенными силами, действующими по четырём равным площадям опорной поверхности (рис. 2б). В пятом случае равномерно-распределённая нагрузка заменяется девятью неравными между собой сосредоточенными силами, действующими по девяти неравным между собой площадям опорной поверхности (рис. 2в). В каждом случае определяется положение нейтральной линии, максимальное и минимальное нормальные напряжения в поперечном сечении колонны на уровне опорной поверхности консоли, а также величина изгибающего момента относительно центральной оси  $Y$ .

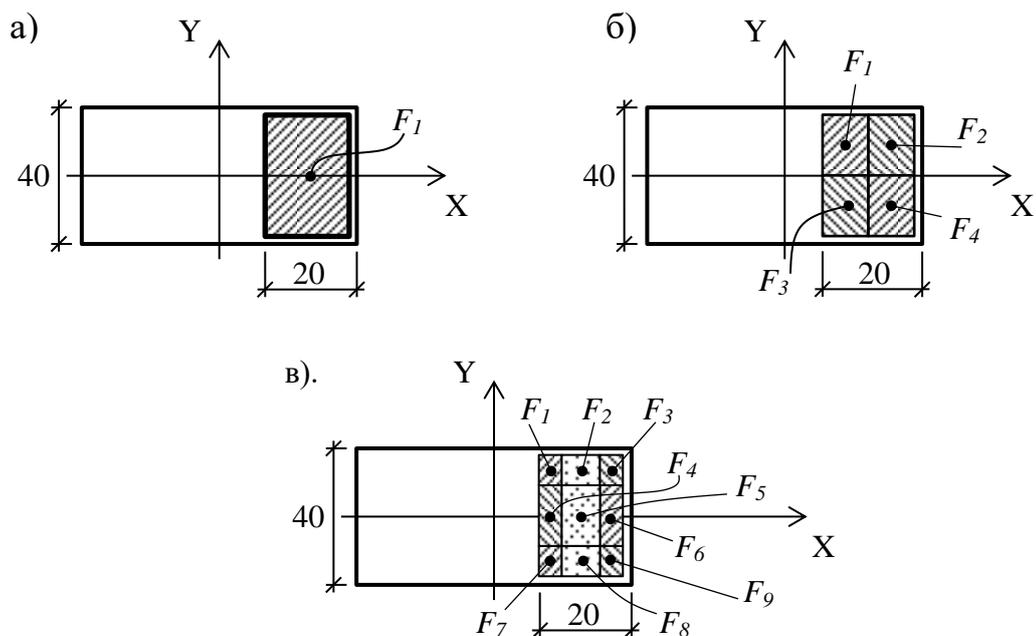


Рисунок 2 - Варианты загрузки опорной площадки консоли колонны.

## Теоретические основы

Нормальные напряжения  $\sigma_z$  в прямолинейном внецентренно нагруженном упругом стержне с площадью поперечного сечения  $A$ , определяются по формуле [1, 2]:

$$\sigma_z = \frac{\sum_{i=1}^n F_i}{A} \left( 1 + \frac{\sum_{i=1}^n F_i y_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \cdot \frac{y}{i_x^2} + \frac{\sum_{i=1}^n F_i x_i}{\sum_{i=1}^n F_i} \cdot \frac{x}{i_y^2} \right). \quad (1)$$

Отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях координат  $X$  и  $Y$ , являющихся главными центральными осями инерции поперечного сечения, определяются по формулам:

$$a_x = -\frac{\sum_{i=1}^n F_i}{\sum_{i=1}^n F_i x_i} i_y^2, \quad a_y = -\frac{\sum_{i=1}^n F_i}{\sum_{i=1}^n F_i y_i} i_x^2. \quad (2)$$

Изгибающий момент относительно оси  $Y$  вычисляется по формуле:

$$M_y = \sum_{i=1}^n F_i x_i. \quad (3)$$

Здесь  $I_x, I_y$  – осевые моменты инерции относительно главных центральных осей инерции  $X$  и  $Y$  поперечного сечения стержня;

$x_0, y_0$  – координаты точки приложения силы  $F$ ;

$x, y$  – координаты точки, в которой определяется нормальное напряжение.

$i_x^2 = \frac{I_x}{A}; i_y^2 = \frac{I_y}{A}$  – квадраты радиусов инерции поперечного сечения стержня.

## Результаты численного расчёта

Рассмотрим колонну, поперечное сечение которой на уровне консоли является прямоугольным с размерами в плане  $b = 40$  см и  $h = 60$  см. На

колонну, по опорной площадке консоли размером 20x40 см., передаётся нагрузка от веса балки, равного 24 кН. Геометрические характеристики площади поперечного сечения колонны на уровне консоли:  $A = 2400(\text{см}^2)$ ;  $I_x = 320000(\text{см}^4)$ ;  $I_y = 720000(\text{см}^4)$ ;  $i_x^2 = 133,33(\text{см}^2)$ ;  $i_y^2 = 300,00(\text{см}^2)$ .

1-й вариант загрузки (рис. 2а). Действующую по опорной площадке консоли колонны распределённую нагрузку интенсивностью

$$q = \frac{12(\text{кН})}{20 \cdot 40(\text{см}^2)} = 0,015 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right) \quad \text{заменяем} \quad \text{сосредоточенной} \quad \text{силой}$$

$F_1 = q \cdot 20 \cdot 40 = 12(\text{кН})$ , приложенной в центре опорной площадки - в точке с координатами  $x_1 = 20(\text{см})$ ,  $y_1 = 0(\text{см})$ . В результате расчёта получаем: отрезки,

отсекаемые нейтральной линией на осях координат  $a_x = -15(\text{см})$ ;  $a_y = \pm\infty$ ;

наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающие нормальные напряжения в поперечном сечении колонны на уровне консоли

$$\sigma_z^{(+)}(-30;0) = 0,005 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right); \quad \sigma_z^{(-)}(30;0) = -0,015 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right); \quad \text{изгибающий} \quad \text{момент}$$

относительно центральной оси  $Y$  равен  $M_y = 240(\text{кН} \cdot \text{см})$ .

2-й вариант загрузки (рис. 2б). Действующую по опорной площадке

$$\text{консоли колонны распределённую нагрузку интенсивностью} \quad q = 0,015 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right)$$

заменяем четырьмя сосредоточенными силами

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = q \cdot 10 \cdot 20 = 3(\text{кН}), \text{ приложенными в центрах тяжести четырёх}$$

равных частей опорной площадки - в точках с координатами

$$x_1 = 15(\text{см}), y_1 = 10(\text{см}); \quad x_2 = 25(\text{см}), y_2 = 10(\text{см}); \quad x_3 = 15(\text{см}), y_3 = -10(\text{см});$$

$$x_4 = 25(\text{см}), y_4 = -10(\text{см}). \text{ В результате расчёта получаем: отрезки, отсекаемые}$$

нейтральной линией на осях координат  $a_x = -15(\text{см})$ ;  $a_y = \pm\infty$ ; наибольшее

растягивающее и наибольшее сжимающие нормальные напряжения в

$$\text{поперечном сечении колонны на уровне консоли} \quad \sigma_z^{(+)}(-30;0) = 0,005 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right);$$

$\sigma_z^{(-)}(30;0) = -0,015 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right)$ ; изгибающий момент относительно центральной оси  $Y$  равен  $M_y = 240(\text{кН} \cdot \text{см})$ .

Следует отметить, что равнодействующая  $R$  четырёх сосредоточенных сил, действующих на опорную площадку, приложена в её центре, то есть в точке с координатами  $x_1 = 20(\text{см})$ ,  $y_1 = 0(\text{см})$ , и равна  $R = 12(\text{кН})$ . Это означает, что положение нейтральной линии, максимальные нормальные напряжения и изгибающий момент от равнодействующей  $R$  будут соответствовать 1-ому варианту загрузки.

3-й вариант загрузки (рис. 2б). Действующую по опорной площадке консоли колонны распределённую нагрузку заменяем четырьмя сосредоточенными силами  $F_1 = F_3 = 2(\text{кН})$ ;  $F_2 = F_4 = 4(\text{кН})$ , приложенными в центрах тяжести четырёх равных частей опорной площадки – в точках с координатами  $x_1 = 15(\text{см})$ ,  $y_1 = 10(\text{см})$ ;  $x_2 = 25(\text{см})$ ,  $y_2 = 10(\text{см})$ ;  $x_3 = 15(\text{см})$ ,  $y_3 = -10(\text{см})$ ;  $x_4 = 25(\text{см})$ ,  $y_4 = -10(\text{см})$ . В результате расчёта получаем: отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях координат  $a_x = -13,84615(\text{см})$ ;  $a_y = \pm\infty$ ; наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающие нормальные напряжения в поперечном сечении колонны на уровне консоли  $\sigma_z^{(+)}(-30;0) = 0,005833 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right)$ ;  $\sigma_z^{(-)}(30;0) = -0,015833 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right)$ ; изгибающий момент относительно центральной оси  $Y$  равен  $M_y = 260(\text{кН} \cdot \text{см})$ .

Следует отметить, что равнодействующая  $R$  четырёх сосредоточенных сил, действующих на опорную площадку, приложена не в её центре, а в точке с координатами  $x_R = 21,667(\text{см})$ ,  $y_R = 0(\text{см})$ , и равна  $R = 12(\text{кН})$ . Это означает, что отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях координат будут равны  $a_x = -13,84594(\text{см})$ ;  $a_y = \pm\infty$ , максимальные нормальные напряжения в поперечном сечении колонны на уровне консоли  $\sigma_z^{(+)}(-30;0) = 0,005835 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right)$ ;

$\sigma_z^{(-)}(30;0) = -0,015834 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right)$ ; изгибающий момент относительно центральной оси  $Y$  равен  $M_y = 260,004 (\text{кН} \cdot \text{см})$ .

4-й вариант загрузки (рис. 2б). Действующую по опорной площадке консоли колонны распределённую нагрузку заменяем четырьмя сосредоточенными силами  $F_1 = F_3 = 4 (\text{кН})$ ;  $F_2 = F_4 = 2 (\text{кН})$ , приложенными в центрах тяжести четырёх равных частей опорной площадки – в точках с координатами  $x_1 = 15 (\text{см})$ ,  $y_1 = 10 (\text{см})$ ;  $x_2 = 25 (\text{см})$ ,  $y_2 = 10 (\text{см})$ ;  $x_3 = 15 (\text{см})$ ,  $y_3 = -10 (\text{см})$ ;  $x_4 = 25 (\text{см})$ ,  $y_4 = -10 (\text{см})$ . В результате расчёта получаем: отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях координат  $a_x = -16,36364 (\text{см})$ ;  $a_y = \pm\infty$ ; наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающие нормальные напряжения в поперечном сечении колонны на уровне консоли  $\sigma_z^{(+)}(-30;0) = 0,004167 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right)$ ;  $\sigma_z^{(-)}(30;0) = -0,014167 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right)$ ; изгибающий момент относительно центральной оси  $Y$  равен  $M_y = 220 (\text{кН} \cdot \text{см})$ .

Следует отметить, что равнодействующая  $R$  четырёх сосредоточенных сил, действующих на опорную площадку, приложена не в её центре, а в точке с координатами  $x_R = 18,364 (\text{см})$ ,  $y_R = 0 (\text{см})$ , и равна  $R = 12 (\text{кН})$ . Это означает, что отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях координат будут равны  $a_x = -16,36393 (\text{см})$ ;  $a_y = \pm\infty$ , максимальные нормальные напряжения в поперечном сечении колонны на уровне консоли  $\sigma_z^{(+)}(-30;0) = 0,004166 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right)$ ;  $\sigma_z^{(-)}(30;0) = -0,014166 \left( \frac{\text{кН}}{\text{см}^2} \right)$ ; изгибающий момент относительно центральной оси  $Y$  равен  $M_y = 219,996 (\text{кН} \cdot \text{см})$ .

5-й вариант загрузки (рис. 2 в). Действующую по опорной площадке консоли колонны распределённую нагрузку заменяем девятью сосредоточенными силами  $F_1 = F_3 = F_7 = F_9 = 1,17 (\text{кН})$ ;  $F_2 = F_8 = 1,56 (\text{кН})$ ;

$F_4 = F_6 = 1,26(\text{кН})$  и  $F_5 = 1,68(\text{кН})$ , приложенными в центрах тяжести девяти неравных частей опорной площадки - в точках с координатами  $x_1 = 13(\text{см})$ ,  $y_1 = 13,5(\text{см})$ ;  $x_2 = 20(\text{см})$ ,  $y_2 = 13,5(\text{см})$ ;  $x_3 = 27(\text{см})$ ,  $y_3 = 13,5(\text{см})$ ;  $x_4 = 13(\text{см})$ ,  $y_4 = 0(\text{см})$ ;  $x_5 = 20(\text{см})$ ,  $y_5 = 0(\text{см})$ ;  $x_6 = 27(\text{см})$ ,  $y_6 = 0(\text{см})$ ;  $x_7 = 13(\text{см})$ ,  $y_7 = -13,5(\text{см})$ ;  $x_8 = 20(\text{см})$ ,  $y_8 = -13,5(\text{см})$ ;  $x_9 = 27(\text{см})$ ,  $y_9 = -13,5(\text{см})$ . В результате расчёта получаем: отрезки, отсекаемые нейтральной линией на осях координат  $a_x = -15,0(\text{см})$ ;  $a_y = \pm\infty$ ; наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающие нормальные напряжения в поперечном сечении колонны на уровне консоли  $\sigma_z^{(+)}(-30;0) = 0,005\left(\frac{\text{кН}}{\text{см}^2}\right)$ ;  $\sigma_z^{(-)}(30;0) = -0,015\left(\frac{\text{кН}}{\text{см}^2}\right)$ ; изгибающий момент относительно центральной оси  $Y$  равен  $M_y = 240(\text{кН} \cdot \text{см})$ .

Следует отметить, что равнодействующая  $R$  девяти сосредоточенных сил, действующих на опорную площадку, приложена в её центре, то есть в точке с координатами  $x_1 = 20(\text{см})$ ,  $y_1 = 0(\text{см})$ , и равна  $R = 12(\text{кН})$ . Это означает, что положение нейтральной линии, максимальные нормальные напряжения и изгибающий момент от равнодействующей  $R$  будут соответствовать 1-ому варианту загрузки.

## Заключение

Выполненные исследования показали следующее:

1. Во внецентренно сжатой упругой колонне, нагруженной совокупностью сосредоточенных сил, положение нейтральной линии, а также наибольшие растягивающие и сжимающие нормальные напряжения и величины изгибающих моментов относительно центральных осей определяется как величиной этих сил, так и их местоположением.

2. Если равнодействующая совокупности сосредоточенных сил приложена не в центре тяжести опорной площадки, то положение нейтральной линии, наибольшие растягивающие и сжимающие нормальные напряжения и

величины изгибающих моментов относительно центральных осей, определённые для совокупности сосредоточенных сил, будут отличаться от их значений, определённых для равнодействующей этих сосредоточенных сил (см. 3-й и 4-й варианты загрузки).

3. Расчёт внецентренно нагруженной колонны при неидеальном обустройстве опорных конструкций консолей колонны и балки следует выполнять на действие совокупности сосредоточенных сил, определённых для фактического распределения опорного давления по опорной площадке.

### **Выводы.**

Представленные в статье результаты могут быть использованы при расчёте внецентренно сжатой упругой колонны при неидеальном обустройстве опорных конструкций консолей колонны и балки.

### **Библиографический список:**

1. Бакушев С.В. Сопротивление материалов (справочное руководство). Учебное пособие по направлению подготовки 08.03.01 "Строительство". Пенза: ПГУАС, 2017. 104 с.: ил.

2. Бакушев С.В., Казаков Д.А. Теоретические основы расчёта внецентренно сжатого стержня, нагруженного совокупностью сосредоточенных сил [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2018. №8. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: [http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no8/stroitel'naya-mehanika/8.4/at\\_download/file](http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no8/stroitel'naya-mehanika/8.4/at_download/file)