УДК 624.04

ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ РАВНОВЕСИЯ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ МЕТОДОМ ВЫРЕЗАНИЯ УЗЛОВ

Монахов Владимир Андреевич,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Булавина Дарья Андреевна,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

студент.

Аннотация

Формирование матрицы равновесия стержневой системы в матричной форме базируется на применении известного из теории расчёта шарнирных ферм метода вырезания узлов. Воспользовавшись механической моделью стержневой системы, полученной при её дискретизации, с учётом общепринятых правил знаков величины поперечных сил в расчётных сечениях двухэтажной рамы нетрудно выразить через изгибающие моменты. Путём составления условий равновесия узлов рамы в виде сумм проекций сил (включая и поперечные), приложенных в узлах, в дальнейшем формируется матрица равновесия рамы в целом. Достоверность полученного результата подтверждается эквивалентностью транспонированной формы геометрической матрицы и матрицы равновесия рассматриваемой рамы в соответствии с принципом двойственности задач строительной механики. Поскольку формирование геометрической матрицы может быть осуществлено в автоматическом режиме, то вывод уравнений равновесия стержневой системы в матричной форме целесообразно выполнять с помощью геометрической матрицы.

Ключевые слова: стержневая система, механическая модель, узлы рамы, конечные элементы, матрица равновесия и геометрическая матрица, принцип двойственности.

FORMATION OF THE MATRIX OF EQUILIBRIUM OF THE ROD SYSTEM BY THE METHOD OF CUTTING NODES

Monakhov Vladimir Andreevich,
Penza State University of Architecture and Construction, Penza,
Doctor of Sciences, Professor of the department "Mechanics".
Bulavina Darya Andreevna,
Penza State University of Architecture and Construction, Penza,
student.

Annotation

The formation of the equilibrium matrix of the core system in the matrix form is based on the application of the knot-cutting method known from the theory of calculation of hinged trusses. Using the mechanical model of the core system, obtained by its discretization, taking into account the generally accepted rules of signs of the magnitude of the shear forces in the calculated cross sections of a two-story frame, it is easy to express in terms of bending moments. By drawing up the equilibrium conditions of the frame nodes as sums of force projections (including transverse ones) applied at the nodes, the equilibrium matrix of the frame as a whole is subsequently formed. The reliability of the result obtained is confirmed by the equivalence of the transposed form of the geometric matrix and the equilibrium matrix of the frame under consideration in accordance with the principle of duality of problems of structural mechanics. Since the formation of a geometric matrix can be carried out in the automatic mode, the derivation of the equilibrium equations of the core system in a matrix form should be carried out using a geometric matrix.

Keywords: core system, mechanical model, frame nodes, finite elements, equilibrium matrix and geometric matrix, duality principle.

В качестве механической модели рамы рассматривается стержневая система, состоящая из недеформируемых конечных элементов, связанных между собой «упругими» шарнирами. Характеристики шарниров соответствуют распределению жёсткостей, указанному на расчётной схеме стержневой системы, в частности, двухэтажной рамы (пролёт рамы l составляет 1м и угол наклона левой стойки рамы равен $\psi = 60^\circ$). Дискретизации схемы осуществляется следующим образом: намечаются расчётные сечения (узлы) и конечные элементы (КЭ); первые обозначаются арабскими цифрами $(i = 1,2,\ldots,10)$, вторые – римскими (j=I,II,…,VIII) (рис. 1,а, б).

а б в

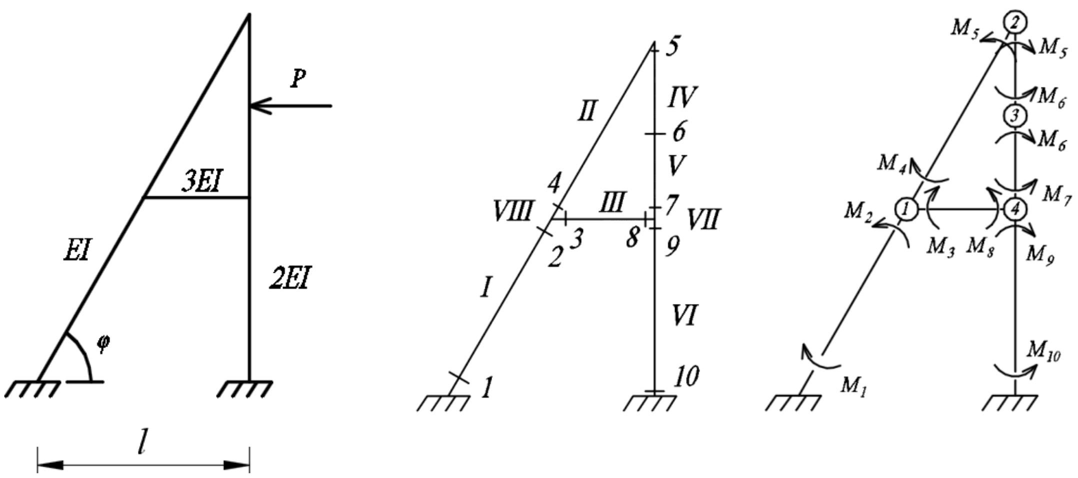

Рисунок 1 - Расчетная схема рамы и её дискретная модель

Одновременно вводится правило знаков для изгибающих моментов – они положительны, если растянуты внутренние волокна стоек и нижние волокна ригеля (рис. 1,в). Согласно определению поперечной силы при действии узловой нагрузки величина поперечной силы в сечении стержня находится по формуле [1]

$$Q_I = \frac{M_{I,e} - M_{I,b}}{l_I} \qquad (I = I, II, \ldots, VI), \tag{1}$$

где Q_I - поперечная сила в конечном элементе;

$M_{I,e}, M_{I,b}$ - значения изгибающих моментов на конце и в начале I-го элемента;

l_{I} - длина КЭ.

По аналогии с методом вырезания узлов, известным из теории расчёта шарнирных ферм, далее рассматривается равновесие каждого узла, находящегося под воздействием продольных и поперечных сил и внешних нагрузок (рис. 2, а, б, в, г). В таком случае условия равновесия рамы имеют вид:

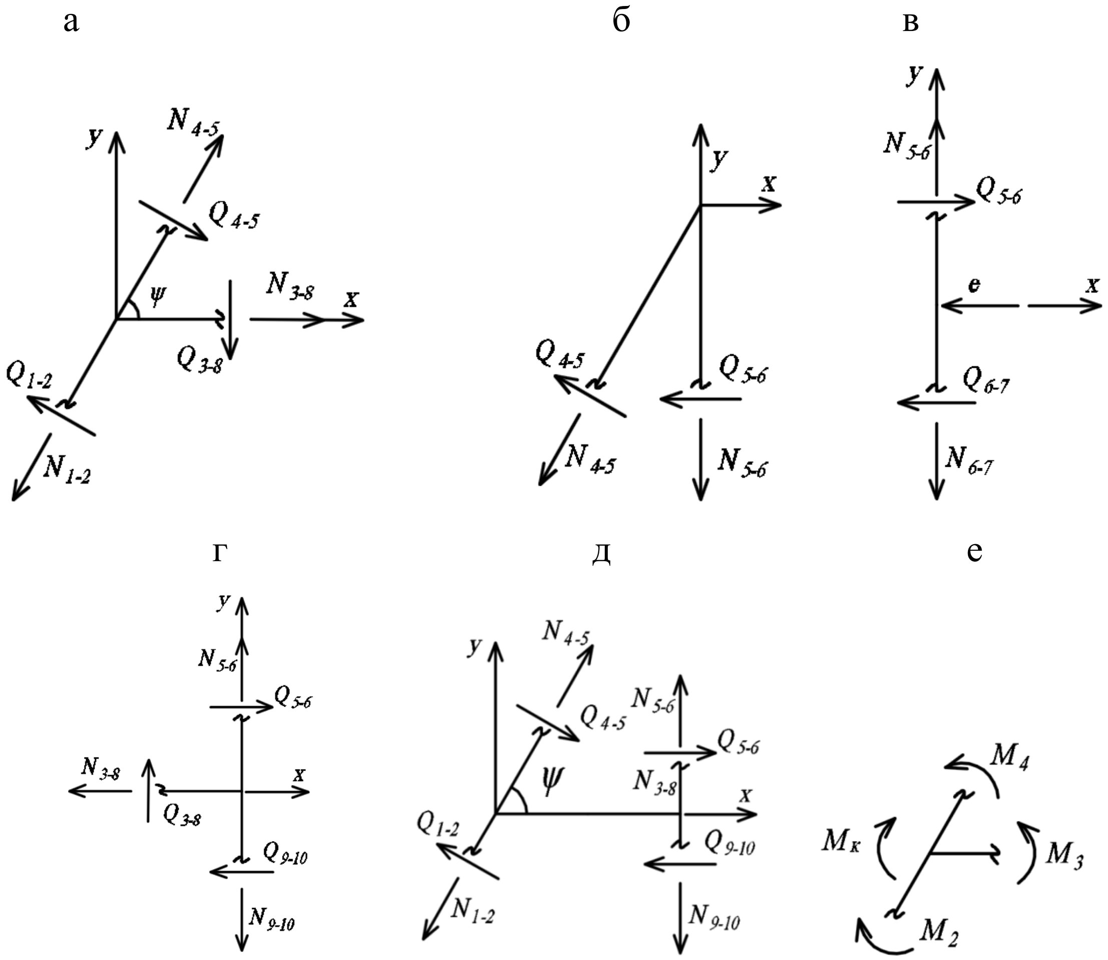

Рисунок 2 - Равновесие узлов рамы

для 1-го узла

1. $\sum F_{ix} = 0{:}\ -Q_{1\text{-}2}\sin\psi + Q_{4\text{-}5}\cos\psi + N_{4-5}\cos\psi - N_{1-2}\cos\psi = 0,$

2. $\sum F_{iy} = 0{:}\ Q_{1\text{-}2}\cos\psi - Q_{4\text{-}5}\sin\psi - Q_{3\text{-}8} + N_{4-5}\sin\psi - N_{1-2}\sin\psi = 0;$

для 2-го узла

3. $\sum F_{ix} = 0:\ -Q_{4\text{-}5}\cos\psi + Q_{5\text{-}6} - N_{4-5}\cos\psi = 0;$

для 3-го узла

4. $\sum F_{ix} = 0: Q_{5\text{-}6} - Q_{6\text{-}7} - P = 0;$

для 4-го узла

5. $\sum F_{ix} = 0: Q_{6\text{-}7} - Q_{9\text{-}10} - N_{3-8} = 0.$

Подставив сюда выражения для поперечных сил согласно (1) и предполагая, что продольные силы в элементах незначительны, т. е. пренебрегая ими, условия равновесия можно записать через изгибающие моменты в сечениях:

1. $$-\frac{M_2 - M_1}{l_1}\sin\psi + \frac{M_5 - M_4}{l_2}\cos\psi = 0,$$

2. $$\frac{M_2 - M_1}{l_1}\cos\psi - \frac{M_5 - M_4}{l_2}\sin\psi - \frac{M_8 - M_3}{l_3} = 0,$$

3. $$-\frac{M_5 - M_4}{l_2}\cos\psi + \frac{M_6 - M_5}{l_4} = 0,$$

4. $$\frac{M_6 - M_5}{l_4} - \frac{M_7 - M_6}{l_5} - P = 0,$$

5. $$\frac{M_7 - M_6}{l_5} - \frac{M_{10} - M_9}{l_6} = 0.$$

Для сокращения записи полученной системы первое и последнее условия могут быть объединены в одно путём сложения

$$-\frac{M_2 - M_1}{l_1}\sin\psi + \frac{M_5 - M_4}{l_2}\cos\psi + \frac{M_7 - M_6}{l_5} - \frac{M_{10} - M_9}{l_6} = 0.$$

Последнее уравнение характеризует условие равновесия ригеля рамы (рис. 2,д). Теперь порядок системы уравнений равновесия

$$[V]_{(4\times 10)}\overline{M}_{(10)} + \overline{P}_{(4)} = 0,$$

коэффициенты которой составляют матрицу равновесия рамы $[V]_{(4\times 10)}$, снижается до четырёх. После приведения подобных слагаемых в уравнениях и подстановки значений пролёта рамы $l = 1$м и угла наклона левой стойки $\psi = 60^\circ$ матрица равновесия принимает окончательную форму:

$$[V]_{(6\times10)}=\begin{bmatrix} 0{,}87 & -0{,}87 & 0 & -0{,}87 & 0{,}87 & -2{,}31 & 2{,}31 & 0 & 1{,}16 & -1{,}16 \\ -0{,}5 & 0{,}5 & 2 & 0{,}5 & -0{,}5 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}87 & 1{,}44 & -2{,}31 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2{,}31 & 4{,}62 & -2{,}31 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Две последние строки в этой матрице добавлены на тот случай, если узлы рамы, где сходятся по три элемента, подвергаются внешним воздействиям в виде сосредоточенных моментов $M_к$ (рис. 2,е). Аналогичный подход к построению матрицы равновесия применяется в статье [2].

а б

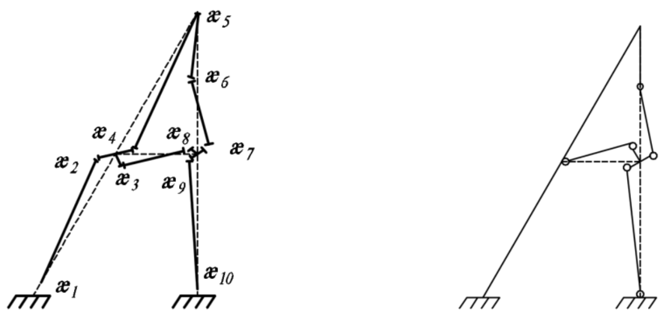

Рисунок 3 - Схемы сосредоточенных изгибных деформаций:

а) для рамы в целом; б) отдельно - при $\vartheta_5 = 1$

Воспользовавшись известным в строительной механике принципом двойственности усилий и деформаций, путём транспонирования матрицы равновесия $[H]_{(10\times6)}=[V]^T_{(6\times10)}$ легко перейти к геометрической матрице стержневой системы [3]

$$
[H]_{(10\times 6)} = \begin{bmatrix} 0{,}87 & -0{,}5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}87 & 0{,}5 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0{,}87 & 0{,}5 & 0{,}87 & 0 & 0 & 1 \\ 0{,}87 & -0{,}5 & 1{,}144 & -2{,}31 & 0 & 0 \\ -2{,}31 & 0 & -2{,}31 & 4{,}62 & 0 & 0 \\ 2{,}31 & 0 & 0 & -2{,}31 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1{,}16 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1{,}16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

благодаря которой легко установить конфигурацию рамы в целом

$$
\overline{\varkappa}_{(10)} = [H]_{(10\times 6)} \overline{\vartheta}_6,
$$

где $\overline{\vartheta}_{(6)} = (\vartheta_1,\ \vartheta_2, ..., \vartheta_6)^T$ - обобщённый вектор-столбец узловых перемещений, как линейных $\vartheta_1,\ \vartheta_2, ..., \vartheta_4$, так и угловых $\vartheta_5,\ \vartheta_6$,

$\overline{\varkappa}_{(10)}$ - вектор-столбец сосредоточенных кривизн в узлах (рис. 3 а, б). Перемещения ϑ_1, ϑ_2 относятся к левому узлу, ϑ_3 - к верхнему (по горизонтали) и ϑ_4 - к узлу, где приложена сила P (по её направлению). Подробное изложение процедуры автоматического формирования геометрической матрицы можно найти в работе авторов [4]. Поскольку процесс формирования геометрической матрицы может быть алгоритмизирован, то построение матрицы равновесия целесообразно осуществлять на основе принципа двойственности с помощью геометрической матрицы.

Библиографический список:

1. Потапов, В. Д. Строительная механика. Книга 1. Стержневые системы: [Текст] Учебник для вузов / В. Д. Потапов, А. В. Александров, К. П. Долотказин, С. Б. Косицын. М.: Стройиздат, 2007. 512 с.
2. Ржаницын А. Ф. Расчёт стержневых систем с применением принципа двойственности // Исследования по теории сооружений. Вып. XXIV. 1980. С. 10-23.

3. Проценко А. М. Теория идеально-упругопластических систем. [Текст]. М.: «Наука», 1982. 287 с.

4. Монахов В.А., Булавина Д.А. Построение схемы сосредоточенных изгибных деформаций рамы [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2018. №8. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no8/stroitelnaya-mehanika/8.5/at_download/file.