УДК 539.313

РАЗРЕШАЮЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИ-НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В НАПРЯЖЕНИЯХ ДЛЯ ОБОБЩЁННОГО ПЛОСКОГО НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ

Бакушев Сергей Васильевич,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Аннотация

Рассматривается построение разрешающих дифференциальных уравнений физически-нелинейной теории упругости в напряжениях для случая обобщённого плоского напряжённого состояния для математической модели сплошной среды, в которой переменный коэффициент объёмного расширения (сжатия) является функцией только среднего напряжения, а переменный коэффициент сдвига - только функцией интенсивности касательных напряжений. Полученные в статье результаты могут найти применение при решении плоских задач физически нелинейной теории упругости в напряжениях.

Ключевые слова: теория упругости, физическая нелинейность, разрешающие дифференциальные уравнения, решение в напряжениях, обобщённое плоское напряжённое состояние.

ALLOW DIFFERENTIAL EQUATIONS PHYSICALLY NONLINEAR THEORY OF ELASTICITY IN A BUSY STATUS TO GENERIC FLAT

Bakushev Sergey Vasilevich

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor of the department “Mechanics”.

Abstract

How to construct to allow physically nonlinear differential equations of the theory of elasticity in case of generalized two-dimensional busy condition for mathematical model of solid Wednesday, in which a variable coefficient volumetric expansion (contraction) is a function only of medium voltage and alternating shift factor (only a function of the intensity of the tangents. The obtained results in this article are applicable in addressing the task physically flat nonlinear theory of elasticity in.

Keywords: theory of elasticity, physical nonlinearity, allow differential equations, the decision in, generic flat stressful condition.

Введение

Разрешающие дифференциальные уравнения в напряжениях физически-нелинейной теории упругости в общем случае трёхмерного деформирования при произвольных перекрёстных зависимостях между первыми инвариантами тензоров σ, ε и вторыми инвариантами девиаторов T, Γ напряжений и деформаций получены в работе [1]. Для случая плоской задачи, в частности обобщённого плоского напряжённого состояния, разрешающие дифференциальные уравнения в напряжениях физически-нелинейной теории упругости при произвольных перекрёстных зависимостях между первыми инвариантами тензоров σ, ε и вторыми инвариантами девиаторов T, Γ напряжений и деформаций получены в работе [2]. Для случая плоской деформации разрешающие дифференциальные уравнения в напряжениях физически-нелинейной теории упругости представлены в работе [3].

В данной работе рассматривается построение разрешающих дифференциальных уравнений физически-нелинейной теории упругости в напряжениях в случае обобщённого напряжённого состояния для математической модели сплошной среды, в которой переменный коэффициент объёмного расширения (сжатия) является функцией только среднего напряжения, а переменный коэффициент сдвига - только функцией интенсивности касательных напряжений, то есть

$$K = K(\sigma); \quad G = G(T). \tag{1}$$

Вывод расчётных уравнений

В формуле (1) обозначено:

K - переменный модуль объёмного расширения (сжатия);

G - переменный модуль сдвига;

$\sigma = \sigma_x + \sigma_y; \quad \varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z;$

$$T = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2}; \tag{2}$$

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}\gamma_{xy}^2}.$$

Физические соотношения, при этом, запишем в следующей форме:

$$\varepsilon_x = a\sigma_x + b\sigma_y; \quad \varepsilon_y = a\sigma_y + b\sigma_x; \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\tau_{xy}. \tag{3}$$

Здесь $a = \dfrac{3K + G}{9KG}; \quad b = \dfrac{2G - 3K}{18KG}.$ (4)

Ввиду этого коэффициенты

$$a = a(\sigma, T); \quad b = b(\sigma, T). \tag{5}$$

Подставляя физические соотношения (3) в уравнение неразрывности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{6}$$

и, учитывая уравнения равновесия при постоянных объёмных силах:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + F_x = 0; \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + F_y = 0, \tag{7}$$

$(F_x = Const, \ \ F_y = Const)$, получим уравнение неразрывности деформаций для физически нелинейной теории упругости для случая обобщённого плоского напряжённого состояния, записанное в напряжениях:

$$\nabla^2\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=\left(\frac{1}{G^2}\frac{\partial G}{\partial x}-2\frac{\partial b}{\partial x}\right)\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\left(\frac{1}{G^2}\frac{\partial G}{\partial y}-2\frac{\partial b}{\partial y}\right)\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}-$$
$$-2\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial\sigma_x}{\partial y}-2\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}-\left(\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}\right)\sigma_x- \tag{8}$$
$$-\left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}\right)\sigma_y-\frac{1}{G^2}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial x\partial y}-\frac{2}{G}\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y}\right)\tau_{xy}.$$

Здесь $\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ - гармонический оператор.

В правой части уравнения (8) производные определяются соотношениями:

$$\frac{\partial a}{\partial x}=\frac{\partial a}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{\partial a}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x};\quad \frac{\partial a}{\partial y}=\frac{\partial a}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial y}+\frac{\partial a}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial y};$$
$$\frac{\partial b}{\partial x}=\frac{\partial b}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x};\quad \frac{\partial b}{\partial y}=\frac{\partial b}{\partial\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial y}+\frac{\partial b}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial y}; \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 a}{\partial\sigma^2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 a}{\partial T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 a}{\partial\sigma\partial T}\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial a}{\partial\sigma}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}+\frac{\partial a}{\partial T}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2};$$
$$\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 a}{\partial\sigma^2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial^2 a}{\partial T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 a}{\partial\sigma\partial T}\frac{\partial\sigma}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{\partial a}{\partial\sigma}\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2}+\frac{\partial a}{\partial T}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2};$$
$$\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 b}{\partial\sigma^2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 b}{\partial T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 b}{\partial\sigma\partial T}\frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial\sigma}\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}+\frac{\partial b}{\partial T}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2};$$
$$\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 b}{\partial\sigma^2}\left(\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial^2 b}{\partial T^2}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 b}{\partial\sigma\partial T}\frac{\partial\sigma}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{\partial b}{\partial\sigma}\frac{\partial^2\sigma}{\partial y^2}+\frac{\partial b}{\partial T}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2};$$

При этом, как это следует из зависимостей (4)

$$\frac{\partial a}{\partial\sigma}=-\frac{1}{3K^2}\frac{\partial K}{\partial\sigma};\quad \frac{\partial a}{\partial T}=-\frac{1}{3G^2}\frac{\partial G}{\partial T};\quad \frac{\partial b}{\partial\sigma}=-\frac{1}{9K^2}\frac{\partial K}{\partial\sigma};\quad \frac{\partial b}{\partial T}=\frac{1}{6G^2}\frac{\partial G}{\partial T};$$
$$\frac{\partial^2 a}{\partial\sigma^2}=\frac{2}{9K^3}\left(\frac{\partial K}{\partial\sigma}\right)^2-\frac{1}{9K^2}\frac{\partial^2 K}{\partial\sigma^2};\quad \frac{\partial^2 a}{\partial T^2}=\frac{2}{3G^3}\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)^2-\frac{1}{3G^2}\frac{\partial^2 G}{\partial T^2}; \tag{10}$$
$$\frac{\partial^2 b}{\partial\sigma^2}=\frac{2}{9K^3}\left(\frac{\partial K}{\partial\sigma}\right)^2-\frac{1}{9K^2}\frac{\partial^2 K}{\partial\sigma^2};\quad \frac{\partial^2 b}{\partial T^2}=-\frac{1}{3G^3}\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)^2+\frac{1}{6G^2}\frac{\partial^2 G}{\partial T^2},$$

причём

$$\frac{\partial G}{\partial x}=\frac{\partial G}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x};\quad \frac{\partial G}{\partial y}=\frac{\partial G}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial y};\quad \frac{\partial^2 G}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 G}{\partial T^2}\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y}+\frac{\partial G}{\partial T}\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial y}. \tag{11}$$

В формулах (9), (10) и (11) в соответствии с зависимостями (2)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma}{\partial x}=\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial x}; \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y}=\frac{\partial \sigma_x}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y};\\
&\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x \partial y};\\
&\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{1}{6T}\left[2\left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial x}\right)-\left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_y}{\partial x}+\sigma_y \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\right)+6\tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right];\\
&\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{1}{6T}\left[2\left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial y}+\sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\right)-\left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\sigma_y \frac{\partial \sigma_x}{\partial y}\right)+6\tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right];\\
&\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{1}{6T}\left[2\left(\sigma_x \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\sigma_y \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial x}\frac{\partial \sigma_y}{\partial x}\right)-\right.\\
&\qquad -\left(\sigma_x \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2}+\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\frac{\partial \sigma_y}{\partial x}+\sigma_y \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial x}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\right)+\\
&\qquad \left.-6\tau_{xy} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2}+6\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right]-\frac{1}{6T^2}\left[2\left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial x}\right)-\right.\\
&\qquad \left.-\left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_y}{\partial x}+\sigma_y \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\right)+6\tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\right]\frac{\partial T}{\partial x};\\
&\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\frac{1}{6T}\left[2\left(\sigma_x \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial \sigma_x}{\partial y}\frac{\partial \sigma_x}{\partial y}+\sigma_y \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\right)-\right.\\
&\qquad -\left(\sigma_x \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}+\frac{\partial \sigma_x}{\partial y}\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\sigma_y \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\frac{\partial \sigma_x}{\partial y}\right)+\\
&\qquad \left.-6\tau_{xy} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2}+6\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right]-\frac{1}{6T^2}\left[2\left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial y}+\sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\right)-\right.\\
&\qquad \left.-\left(\sigma_x \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\sigma_y \frac{\partial \sigma_x}{\partial y}\right)+6\tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}\right]\frac{\partial T}{\partial y};\\
&\frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}=\frac{1}{6T}\left[2\left(\sigma_x \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial y}+\frac{\partial \sigma_x}{\partial y}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\sigma_y \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x \partial y}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\frac{\partial \sigma_y}{\partial x}\right)-\right.\\
&\qquad -\left(\sigma_x \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x \partial y}+\frac{\partial \sigma_x}{\partial y}\frac{\partial \sigma_y}{\partial x}+\sigma_y \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial y}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\right)-
\end{aligned}
\tag{12}
$$

$$-6\tau_{xy}\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}+6\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\Bigg]-\frac{1}{6T^2}\Bigg[2\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}\right)-$$

$$-\left(\sigma_x\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\right)+6\tau_{xy}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\Bigg]\frac{\partial T}{\partial y}.$$

Введём обычным образом функцию напряжений $\varphi=\varphi(x,y)$ так, что

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2};\ \ \sigma_y=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2};\ \ \tau_{xy}=\tau_{yx}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}. \qquad (13)$$

При этом уравнения равновесия (7) без учёта объёмных сил удовлетворяются тождественно.

С учётом формул (13) уравнение неразрывности деформаций (8) будет представлять собой физически нелинейный аналог бигармонического уравнения для обобщённого плоского напряжённого состояния. Вполне понятно, что в отличие от физически линейной теории упругости, где бигармоническое уравнение является однородным, аналог бигармонического уравнения для физически нелинейной теории упругости является неоднородным. Вид правой части уравнения (8) существенно определяется видом рассматриваемой математической модели сплошной среды.

Для модели сплошной среды, описываемой зависимостями:

$$K=K_0=Const;\ \ G=G_0=Const \qquad (14)$$

уравнение (8) приводится к виду:

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=0, \qquad (15)$$

то есть совпадает с уравнением Леви линейной теории упругости.

Заключение

Полученные в статье результаты могут найти применение при решении задач обобщённого плоского напряжённого состояния физически нелинейной теории упругости в напряжениях.

Библиографический список:

1. Бакушев С.В. Уравнения физически нелинейной теории упругости в напряжениях // Региональная архитектура и строительство, 2011. №1(12), С.117-123.

2. Бакушев С.В. Плоская задача физически нелинейной теории упругости - решение в напряжениях // Региональная архитектура и строительство. 2014., №1(18). С.82-88.

3. Бакушев С.В. Плоская деформация физически нелинейной теории упругости – решение в напряжениях. // Строительная механика и расчёт сооружений. 2014. №2. С.2-9.