УДК 624.04

ВЕКТОР ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА СЕТОЧНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Шеин Александр Иванович,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Механика».

Карташов Николай Сергеевич,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

аспирант кафедры «Механика».

Земцова Ольга Григорьевна,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика».

Аннотация

В работе описывается вывод вектора внутренних усилий механической стержневой системы в задачах динамики, решаемых в конечно-разностном виде. Вектор записан с учетом упрочнения материала, возрастающего с увеличением скорости деформирования, и явления вязкоупругости, которое сопровождает любой реальный процесс.

Ключевые слова: сеточная аппроксимация, вектор внутренних усилия, динамика, инерционные силы.

VECTOR OF INTERNAL EFFORTS IN THE PROBLEMS OF DYNAMICS USING THE DIFFERENCE APPROXIMATION METHOD

Shein Alexander Ivanovich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor, Head of the department “Mechanics”.

Kartashov Nikolai Sergeevich,
Penza State University of Architecture and Construction, Penza,
Graduate student of the department "Mechanics".
Zemtsova Olga Grigorevna,
Penza State University of Architecture and Construction, Penza,
Candidate of Sciences, Associate Professor of the department "Mechanics".

Abstract

The paper describes the derivation of the vector of internal forces of a mechanical rod system in problems of dynamics solved in a finite-difference form. The vector is recorded taking into account the hardening of the material, increasing with an increase in the rate of deformation, and the phenomenon of viscoelasticity, which accompanies any real process.

Keywords: difference approximation, vector of internal forces, dynamics, inertial forces.

Основная теория метода сеточной аппроксимации элементов изложена в работах [1-5]. В данной статье выводятся выражения для вектора внутренних усилий в задачах динамики с использованием метода сеточной аппроксимации.

При колебательных движениях зависимость $\sigma-\varepsilon$ определяется многими факторами. При малых скоростях можно использовать ту же зависимость, что и при статическом расчете. При достаточно высоких скоростях деформирования необходимо учитывать и уровень основного деформированного состояния, относительно которого происходит колебательный процесс. В этом случае при начальных напряжениях ниже предела выносливости здесь наблюдается упругая работа материала, при более высоких начальных напряжениях необходимо учитывать накопление от цикла к циклу пластических деформаций. Это можно моделировать либо ступенчатым смещением в амплитудных точках, либо используя разные законы для нагружения и разгрузки.

В динамических задачах целесообразно учитывать упрочнение материала, возрастающее с увеличением скорости деформирования, и явление вязкоупругости, которое сопровождает любой реальный процесс при сколько-нибудь значительном временном интервале исследования движения.

Пусть вектор

$$\{e\} = \left\{ \varepsilon \quad (v'_c) \quad (w'_c) \quad (\phi') \right\}^T \tag{1}$$

описывает совокупность упругих деформаций элемента в динамической задаче. Здесь $\varepsilon -$ продольная деформация волокна, $v'_c, w'_c -$ сдвиговые повороты сечений вокруг осей *z* и *y*, соответственно, а $\varphi' -$ интенсивность закручивания стержня. При реализации автоматизированной процедуры динамического расчета коэффициенты упрочнения $k(\dot{\varepsilon})$ удобно определять по аналитической зависимости, построенной с помощью интерполяционной формулы Лагранжа (т.к. значения $\dot{\varepsilon}$ взяты из неравно отстоящих узлов) по экспериментальной кривой $k(\dot{\varepsilon}) - \dot{\varepsilon}$. Например для бетона эту зависимость можно построить в виде кубического полинома используя таблицу 1:

Таблица 1

$k(\dot{\varepsilon})$	1.05	1.17	1.45	1.7
$\dot{\varepsilon}$	10^{-4}	10^{-2}	1	10

Интерполяционный полином Лагранжа будет иметь вид

$$\begin{aligned} k(\dot{\varepsilon}) = {} & 1.05 \frac{\left(\dot{\varepsilon} - 10^{-2}\right)\left(\dot{\varepsilon} - 1\right)\left(\dot{\varepsilon} - 10\right)}{\left(10^{-4} - 10^{-2}\right)\left(10^{-4} - 1\right)\left(10^{-4} - 10\right)} + \\ & + 1.17 \frac{\left(\dot{\varepsilon} - 10^{-4}\right)\left(\dot{\varepsilon} - 1\right)\left(\dot{\varepsilon} - 10\right)}{\left(10^{-2} - 10^{-4}\right)\left(10^{-2} - 1\right)\left(10^{-2} - 10\right)} + \end{aligned} \tag{2}$$

$$+1.45\frac{\left(\dot{\varepsilon}-10^{-4}\right)\left(\dot{\varepsilon}-10^{-2}\right)\left(\dot{\varepsilon}-10\right)}{\left(1-10^{-4}\right)\left(1-10^{-2}\right)\left(1-10\right)}+$$

$$+1.7\frac{\left(\dot{\varepsilon}-10^{-4}\right)\left(\dot{\varepsilon}-10^{-2}\right)\left(\dot{\varepsilon}-1\right)}{\left(10-10^{-4}\right)\left(10-10^{-2}\right)\left(10-1\right)},$$

или

$$\mathrm{k}(\dot{\varepsilon})=1{,}18164\dot{\varepsilon}^3-13{,}0329\dot{\varepsilon}^2+12{,}2516\dot{\varepsilon}+1{,}04875. \tag{3}$$

Эта зависимость справедлива в диапазоне скоростей деформаций

$$10^2\geq\dot{\varepsilon}\geq10^{-4}. \tag{4}$$

Будем определять скорость деформирования в данный момент времени *j* через левую разность:

$$\{\dot{e}\}_j=(\{e\}_j-\{e\}_{j-1})/(\Delta t). \tag{5}$$

Используя последнее соотношение и формулу (3), сформируем вектор коэффициентов упрочнения $\{k(\dot{\varepsilon})\}$. Упрочнение материала, связанное с запаздыванием пластических деформаций, можно моделировать увеличением упругой части деформаций путем умножения ее на коэффициент упрочнения

$$\{e\}^g=\{e\}\{k(\dot{\varepsilon})\}^T. \tag{6}$$

При этом предельные сдвиговые деформации могут быть уменьшены.

Явление вязкоупругости учтем аналогично гипотезе Фойгта, полагая

$$\{e\}^\partial=\{e\}^g+\chi\{\dot{e}\}, \tag{7}$$

где $\chi-$условный коэффициент вязкости материала. Тогда нормальные напряжения в точке сечения будут определяться по соотношению

$$\sigma^\partial=E\varepsilon^\partial-A_3\varepsilon^3, \tag{8}$$

где $A_3=4/27(E^3/\sigma_{nn}^2)$. Вектор внутренних сил в сечении примет вид

$$\{f^J\}_O^\partial=\left\{-\int_A\sigma^\partial dA\;\; -(v'_c)^\partial GA/k\;\; -(w'_c)^\partial GA/k\;\; -(\phi')^\partial GI_\kappa\;\; -\int_A\sigma^\partial z\cdot dA\;\; \int_A\sigma^\partial y\cdot dA\right\}^T. \tag{9}$$

Необходимые для вычисления χ_S частоты колебаний здесь можно определить через периоды циклов после предварительного расчёта без учёта влияния сопротивления:

$$\chi = \gamma / p, \tag{10}$$

где p – частота колебаний, принимаемая равной либо частоте свободных колебаний, либо частоте вынужденных колебаний, в зависимости от характера рассматриваемого движения.

При этом целесообразно воспользоваться таблицей 2 и рисунком 1. В уравнениях (2)–(9):

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= u'_{ij} - yv''_{ij} - z \cdot w''_{ij} \\ \dot{\varepsilon}_{ij} &= \left(\dot{u}\right)'_{ij} - y\left(\dot{v}_{ij}\right)'' - z\left(\dot{w}_{ij}\right)'' \end{aligned}\right\}, \tag{11}$$

где производные в правых частях представляются в разностном виде, путём аппроксимации по геометрической и по временной координате.

Для численного интегрирования внутренних усилий на поперечное сечение накладывается прямоугольная сетка размером $MM \times NN$, с координатами каждой ячейки (y_{mm}, z_{nn}).

Таблица 2

№ п/п	Материал конструкции	Коэффициент неупругого сопротивления
1.	Бетон и железобетон	0,1
2.	Дерево	0,05
3.	Кирпичная кладка	0,08
4.	Прокатная сталь	0,025

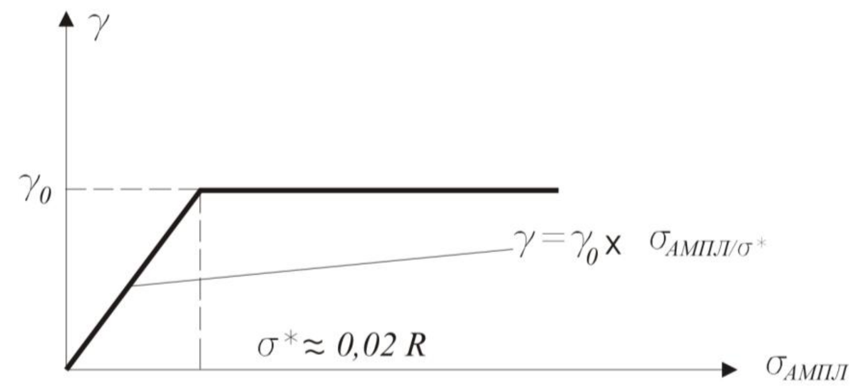

Рисунок 1 – К расчёту коэффициента γ

Библиографический список:

1. Шеин А.И. Метод сеточной аппроксимации элементов в задачах строительной механики нелинейных стержневых систем: моногр. Пенза: ПГУАС, 2005. 247 с.
2. Шеин А.И. Решение нелинейных задач динамики методом сеточной аппроксимации элементов // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2005. № 5 (557). С. 26-33.
3. Шеин А.И. Уточненная теория расчета стержневых систем применительно к методу сеточной аппроксимации элементов // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2003. № 2 (530). С. 11-16.
4. Шеин А.И. Расчёт стержневых систем на основе уточнённой теории и метода сеточной аппроксимации элементов // Строительные материалы, оборудование, технологии XXI века. 2003. № 1. С. 38.
5. Шеин А.И. Метод сеточной аппроксимации элементов при расчёте рамных каркасов // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2002. № 3. С. 9.