

УДК 539.371

**СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ПЛОСКИХ  
ГЕОМЕТРИЧЕСКИ-НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН ДЕФОРМАЦИЙ В  
СПЛОШНОЙ СРЕДЕ, ОПИСЫВАЕМОЙ МОДИФИЦИРОВАННОЙ  
ДЕФОРМАЦИОННОЙ ТЕОРИЕЙ ПЛАСТИЧНОСТИ СЫПУЧЕЙ  
СРЕДЫ**

*Бакушев Сергей Васильевич,*

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,  
г. Пенза,*

*доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».*

**Аннотация**

Статья посвящена вычислению скоростей распространения упругопластических плоских одномерных волн деформаций слабого разрыва в сплошной среде, механическое поведение которой описывается уравнениями модифицированной деформационной теории пластичности сыпучей среды, как с учётом, так и без учёта геометрической нелинейности (в смысле В.В.Новожилова). Анализ скоростей волн показал, что учёт геометрической нелинейности слабо влияет на численное значение скоростей, причём, чем выше уровень развития геометрической нелинейности в сплошной среде, тем влияние геометрической нелинейности выше. Вместе с тем, сильное влияние на скорости волн оказывают механические характеристик сплошной среды: коэффициент внутреннего трения, коэффициент дилатансии, начальные модуль объёмного расширения (сжатия) и модуль сдвига, предельная интенсивность деформаций сдвига. Результаты исследований могут быть использованы при решении задач динамического расчёта зданий и сооружений.

**Ключевые слова:** волны деформаций, скорости распространения, сыпучая среда, плоская деформация, геометрическая нелинейность.

# PROPAGATION OF ONE-DIMENSIONAL NONLINEAR WAVES- GEOMETRICALLY FLAT DEFORMATION IN A SOLID ENVIRONMENT DESCRIBED RETROFIT DEFORMATION THEORY OF PLASTICITY OF GRANULAR MEDIA

*Bakushev Sergey Vasilevich*

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,*

*Doctor of Sciences, Professor of the department "Mechanics".*

## **Abstract**

The article deals with the computation of the velocities of propagation of Elastoplastic deformation of weak, one-dimensional waves flat gap in solid Wednesday, mechanical behavior of which is described by equations retrofit deformation theory of plasticity loose Wednesday, as with the account, and without taking into account geometrical non-linearity (in the sense of V.V. Novozhilova). Wave velocity analysis showed that the accounting of geometric nonlinearity poorly affect the numerical value of the speed, and the higher the level of development of geometric nonlinearity in solid Wednesday, the influence of geometric nonlinearity of above. However, a strong influence on the speed of the waves have mechanical characteristics solid Wednesday: internal friction coefficient, dilatansii coefficient of volumetric expansion module, compression and shear modulus, maximum intensity shear deformations. The results of the research can be used in solving problems of dynamic calculation of buildings and structures.

**Keywords:** waves of deformations, propagation velocity, loose Wednesday, flat deformation, geometric non-linearity.

## **Введение.**

Исследование процесса распространения одномерных плоских упруго-пластических волн деформаций базируется на классической работе профессора Ч.А.Рахматулина [1]. В дальнейшем его идеи были поддержаны многими исследователями: [2], [3] и так далее. С учётом геометрической и физической

нелинейности процесс распространения упругопластических волн деформаций рассматривался, в частности, в работах [4, 5, 6, 7, 8, 9].

Волны деформаций в сплошных и дискретных средах возникают при динамических воздействиях. Основной характеристикой волны деформаций является скорость её распространения.

### Математическая модель сплошной среды.

В данной работе рассматриваются вопросы определения скоростей распространений одномерных плоских геометрически-нелинейных волн деформаций слабого разрыва в сплошной среде, механическое поведение которой описывается уравнениями модифицированной деформационной теории пластичности сыпучей среды [10]. Деформационные соотношения данной модели без учёта геометрической нелинейности записываются в форме перекрёстных зависимостей между первыми инвариантами тензоров  $\sigma, \varepsilon$  и вторыми инвариантами девиаторов  $T, \Gamma$  напряжений и деформаций:

$$T = \left\{ G_0 \left( 1 - \frac{\Gamma}{2\Gamma_s} \right) - fK_0 \left[ 1 - g^* \varepsilon \left( 2 - \frac{\Gamma}{\Gamma_s} \right)^2 \left( \frac{\Gamma}{\Gamma_s} \right)^2 \right] \frac{\varepsilon}{\Gamma} \right\} \Gamma = G(\varepsilon, \Gamma) \cdot \Gamma; \quad (1)$$

$$\sigma = \left\{ K_0 \left[ 1 - g^* \varepsilon \left( 2 - \frac{\Gamma}{\Gamma_s} \right)^2 \left( \frac{\Gamma}{\Gamma_s} \right)^2 \right] \right\} \varepsilon = K(\varepsilon, \Gamma) \cdot \varepsilon.$$

Здесь  $T = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$  – интенсивность

касательных напряжений;

$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}$  – интенсивность

деформаций сдвига;

$\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$  – среднее напряжение;

$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$  – объёмная деформация;

$G(\varepsilon, \Gamma)$  – переменный модуль сдвига;

$K(\varepsilon, \Gamma)$  – переменный модуль растяжения (сжатия).

При учёте геометрической нелинейности деформационные соотношения модифицированной деформационной теории пластичности сыпучей среды (1) запишем на основании принципа эквивалентности формы записей замыкающих уравнений [11]. В соответствии с этим принципом геометрически нелинейным аналогом модели сплошной среды, описываемой уравнениями модифицированной деформационной теории пластичности сыпучей среды [1] может быть принята математическая модель, для которой при активной деформации

$$\begin{aligned} T^* &= \left\{ G_0 \left( 1 - \frac{\Gamma^*}{2\Gamma_s} \right) - fK_0 \left[ 1 - g^* \varepsilon^* \left( 2 - \frac{\Gamma^*}{\Gamma_s} \right) \left( \frac{\Gamma^*}{\Gamma_s} \right)^2 \right] \frac{\varepsilon^*}{\Gamma^*} \right\} \Gamma^* = G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) \cdot \Gamma^*; \\ \sigma^* &= \left\{ K_0 \left[ 1 - g^* \varepsilon^* \left( 2 - \frac{\Gamma^*}{\Gamma_s} \right) \left( \frac{\Gamma^*}{\Gamma_s} \right)^2 \right] \right\} \varepsilon^* = K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*) \cdot \varepsilon^*. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $T^* = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1^* - \sigma_2^*)^2 + (\sigma_2^* - \sigma_3^*)^2 + (\sigma_3^* - \sigma_1^*)^2}$  – интенсивность

обобщённых касательных напряжений;

$\Gamma^* = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_1^* - \varepsilon_2^*)^2 + (\varepsilon_2^* - \varepsilon_3^*)^2 + (\varepsilon_3^* - \varepsilon_1^*)^2}$  – интенсивность

обобщённых деформаций сдвига;

$\sigma^* = \frac{1}{3} (\sigma_1^* + \sigma_2^* + \sigma_3^*)$  – обобщённое среднее напряжение;

$\varepsilon^* = \varepsilon_1^* + \varepsilon_2^* + \varepsilon_3^*$  – обобщённая объёмная деформация;

$G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$  – геометрически нелинейный аналог переменного модуля сдвига;

$K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$  – геометрически нелинейный аналог переменного модуля растяжения (сжатия).

В формулах (1) и (2)  $G_0$  – начальный модуль сдвига при чистом сдвиге;  $K_0$  – начальный модуль объёмного растяжения (сжатия);  $\Gamma_s$  – предельная

интенсивность деформаций сдвига;  $f$  – аналог коэффициента внутреннего трения;  $g^*$  – коэффициент дилатансии.

Существенно заметить, что если в формулах (1) компоненты деформации выражаются через перемещения при помощи линейных соотношений Коши, то в соотношениях (2) компоненты деформации выражаются через перемещения с учётом квадратичных слагаемых. Кроме того, компоненты тензора обобщённых напряжений  $\sigma_{ij}^*$  связаны с истинными напряжениями  $\sigma_{ij}$ , действующими по граням косоугольного параллелепипеда, рёбра которого до деформации были параллельны осям декартовой системы координат  $XYZ$ , соотношениями:

$$\sigma_{ij}^* = k_{ij} \sigma_{ij}, \quad i = x, y, z; \quad j = x, y, z; \quad (\text{не суммировать})$$

причём  $k_{ij} = \frac{1}{1 + E_j} \frac{A_i^*}{A_i}$  (не суммировать).

Здесь  $E_j$  - относительное удлинение волокон сплошной среды, параллельных до деформации осям декартовой системы координат:

$$E_j = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{jj}} - 1, \quad j = x, y, z;$$

$A_i^*/A_i$  - отношение площадей элементарных площадок, выделенных в сплошной среде после деформации, к их площадям до деформации, которые до деформации были перпендикулярны осям декартовой системы координат  $XYZ$ :

$$A_i^* = A_i \sqrt{(1 + 2\varepsilon_{jj})(1 + 2\varepsilon_{kk}) - \varepsilon_{jk}^2}, \quad i, j, k = x, y, z \quad (\text{круговая перестановка индексов}).$$

### Динамические уравнения равновесия.

При плоской одномерной деформации сплошной среды  $u = u(x)$ ,  $v = 0$ ,  $w = 0$  система динамических уравнений равновесия в перемещениях сводится к одному уравнению [5], имеющему, для нелинейно-упругого деформирования, но с учётом геометрической нелинейности, следующий вид:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) F_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Здесь  $F_x$  - удельная объёмная сила в состоянии до деформации;

$$a = \left( K^* + \frac{4}{3} G^* \right) \varepsilon_{xx}^* + \left( 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \left[ \left( K^* + \frac{4}{3} G^* \right) + \left( \frac{\partial K^*}{\partial \varepsilon^*} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\partial K^*}{\partial \Gamma^*} \text{Sign}(\varepsilon_{xx}^*) \right) \varepsilon_{xx}^* + \frac{4}{3} \left( \frac{\partial G^*}{\partial \varepsilon^*} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\partial G^*}{\partial \Gamma^*} \text{Sign}(\varepsilon_{xx}^*) \right) \varepsilon_{xx}^* \right],$$

$$\varepsilon_{xx}^* = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2.$$

Уравнение (3) описывает процесс распространения плоских одномерных волн деформаций слабого разрыва в геометрически нелинейной и нелинейно-упругой сплошной среде.

Для геометрически линейной модели сплошной среды разрешающее динамическое уравнение в перемещениях, для нелинейно-упругого деформирования, имеет следующую форму:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Здесь

$$a = \left( K + \frac{4}{3} G \right) + \left[ \left( \frac{\partial K}{\partial \varepsilon} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\partial K}{\partial \Gamma} \text{Sign}(\varepsilon_{xx}) \right) + \frac{4}{3} \left( \frac{\partial G}{\partial \varepsilon} + \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\partial G}{\partial \Gamma} \text{Sign}(\varepsilon_{xx}) \right) \right] \varepsilon_{xx},$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Уравнения (4) описывают процесс распространение плоских одномерных волн деформаций слабого разрыва в геометрически линейной и нелинейно-упругой сплошной среде.

### **Определение скоростей распространения волн деформаций.**

Для определения скоростей распространения одномерных волн деформаций - нестационарных поверхностей сильных разрывов вторых производных перемещений, являющихся, вообще говоря, поверхностями слабых разрывов деформаций, напряжений и скоростей частиц - воспользуемся кинематическими и динамическими условиями совместности [12]:

Пусть  $\omega(x,t)=0$  - уравнение линии разрыва на фазовой плоскости  $xot$ . Обозначая символом [...] скачок функций при переходе через линию  $\omega(x,t)=0$  и, применяя кинематические условия совместности

$$\left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2 \partial x_k^2} \right] = \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \lambda_u \quad (5)$$

к уравнениям (3) и (4), получим динамические условия совместности

$$\left[ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] = \frac{a}{\rho} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]. \quad (6)$$

Учитывая (5), соотношение (6) можно переписать в следующем виде:

$$\left( \frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 \lambda_u = \frac{a}{\rho} \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \lambda_u. \quad (7)$$

Поскольку коэффициент прерывности  $\lambda_u \neq 0$  и, учитывая, что скорость распространения поверхности разрыва  $\omega(x,t)=0$  определяется выражением

$N^2 = \left( \frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 / \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2$ , то из соотношения (7) получаем:

$$N^2 = \frac{a}{\rho}. \quad (8)$$

Формула (8) определяет скорости распространения плоских одномерных волн деформаций слабого разрыва.

### **Построение графика скоростей волн деформаций.**

Построим графики скоростей плоских одномерных волн деформаций в зависимости от уровня развития деформаций в сплошной среде и значений её механических констант. В соответствии с деформационными зависимостями (1) и (2), имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K}{\partial \varepsilon} &= -K_0 g^* \left(2 - \frac{\Gamma}{\Gamma_s}\right)^2 \left(\frac{\Gamma}{\Gamma_s}\right)^2; \\
\frac{\partial K}{\partial \Gamma} &= 2K_0 \frac{g^*}{\Gamma_s^2} \varepsilon \Gamma \left(2 - \frac{\Gamma}{\Gamma_s}\right) \left(\frac{\Gamma}{\Gamma_s} - 1\right); \\
\frac{\partial G}{\partial \varepsilon} &= -fK_0 \frac{1}{\Gamma} + 2fg^* K_0 \frac{\varepsilon}{\Gamma} \left(2 - \frac{\Gamma}{\Gamma_s}\right)^2 \left(\frac{\Gamma}{\Gamma_s}\right)^2; \\
\frac{\partial G}{\partial \Gamma} &= -\frac{G_0}{2\Gamma_s} + fK_0 \frac{\varepsilon}{\Gamma^2} + fg^* K_0 \frac{\varepsilon^2}{\Gamma_s^2} \left(2 - \frac{\Gamma}{\Gamma_s}\right) \left(2 - 3\frac{\Gamma}{\Gamma_s}\right).
\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial K^*}{\partial \varepsilon^*} &= -K_0 g^* \left(2 - \frac{\Gamma^*}{\Gamma_s}\right)^2 \left(\frac{\Gamma^*}{\Gamma_s}\right)^2; \\
\frac{\partial K^*}{\partial \Gamma^*} &= 2K_0 \frac{g^*}{\Gamma_s^2} \varepsilon^* \Gamma^* \left(2 - \frac{\Gamma^*}{\Gamma_s}\right) \left(\frac{\Gamma^*}{\Gamma_s} - 1\right); \\
\frac{\partial G^*}{\partial \varepsilon^*} &= -fK_0 \frac{1}{\Gamma^*} + 2fg^* K_0 \frac{\varepsilon^*}{\Gamma^*} \left(2 - \frac{\Gamma^*}{\Gamma_s}\right)^2 \left(\frac{\Gamma^*}{\Gamma_s}\right)^2; \\
\frac{\partial G^*}{\partial \Gamma^*} &= -\frac{G_0}{2\Gamma_s} + fK_0 \frac{\varepsilon^*}{\Gamma^{*2}} + fg^* K_0 \frac{\varepsilon^{*2}}{\Gamma_s^2} \left(2 - \frac{\Gamma^*}{\Gamma_s}\right) \left(2 - 3\frac{\Gamma^*}{\Gamma_s}\right).
\end{aligned} \tag{10}$$

При плоской одномерной деформации сплошной среды без учёта геометрической нелинейности  $\varepsilon_1 \neq 0$ ;  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ , то есть  $\varepsilon = \varepsilon_1$ ;  $\Gamma = \frac{2\varepsilon_1}{\sqrt{3}} \text{Sign } \varepsilon_1$ .

При учёте геометрической нелинейности  $\varepsilon_1^* \neq 0$ ;  $\varepsilon_2^* = \varepsilon_3^* = 0$ , то есть  $\varepsilon^* = \varepsilon_1^*$ ;  $\Gamma^* = \frac{2\varepsilon_1^*}{\sqrt{3}} \text{Sign } \varepsilon_1^*$ . Значения механических констант примем следующими:

$$\frac{K_0}{G_0} = \frac{2}{\sqrt{3}}; \Gamma_s = 0,01155; (0,0578); g^* = 10; f = 0,1; (0,5; 0,9).$$

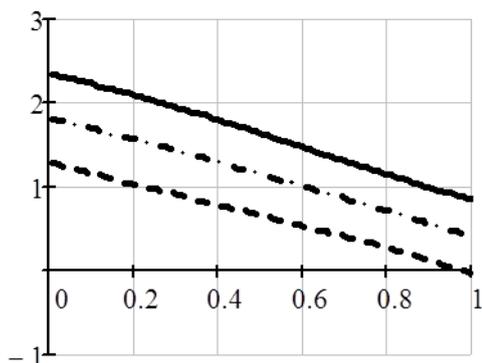
Исследования скоростей распространения плоских одномерных волн деформаций показывают, что учёт геометрической нелинейности слабо влияет на их численное значение. Гораздо сильнее сказывается влияние механических констант рассматриваемой модели.

На рис. 1, 2, 3 и 4 показаны графики приведённых скоростей волн  $\rho \frac{N^2}{G_0}$  в зависимости от уровня деформаций  $\frac{\Gamma}{\Gamma_s}$  для случаев одноосного растяжения ( $\varepsilon_1 > 0$ ) и одноосного сжатия ( $\varepsilon_1 < 0$ ).

Ось абсцисс на рисунках соответствует уровню деформированного состояния ( $\Gamma/\Gamma_s$ ); ось ординат – соответствует приведённой скорости волны  $\left(\rho \frac{N^2}{G_0}\right)$ . На рисунках сплошная линия построена для коэффициента внутреннего трения  $f = 0,1$ ; штрих-пунктирная – для  $f = 0,5$ ; пунктирная – для  $f = 0,9$ .

Анализ показывает, что при возрастании коэффициента внутреннего трения скорости волн растяжения (рис. 1 и 2) падают для любого уровня деформированного состояния ( $\Gamma/\Gamma_s$ ). Скорости волн сжатия (рис. 3 и 4) при возрастании коэффициента внутреннего трения увеличиваются для любого уровня деформированного состояния ( $\Gamma/\Gamma_s$ ). Скорости волн и растяжения и сжатия для малых уровней предельной интенсивности деформаций сдвига ( $\Gamma_s$ ) изменяются на диапазоне  $0 \leq \frac{\Gamma}{\Gamma_s} \leq 1$  более плавно (рис. 1 и 3), нежели при больших уровнях предельной интенсивности деформаций сдвига ( $\Gamma_s$ ) (рис. 2 и 4). Геометрическая нелинейность занижает, вообще говоря, значения скоростей распространения плоских одномерных волн деформаций по сравнению с геометрически линейной моделью.

а).



б).

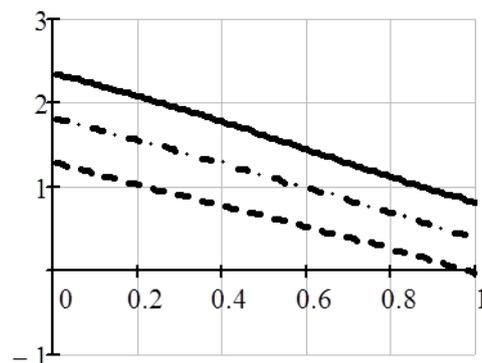
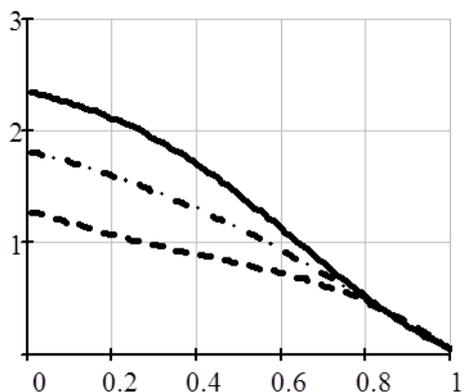


Рисунок 1 - Скорости волн растяжения для  $\Gamma_s = 0,01155$ : а). С учётом геометрической нелинейности; б). Без учёта геометрической нелинейности.

а).



б).

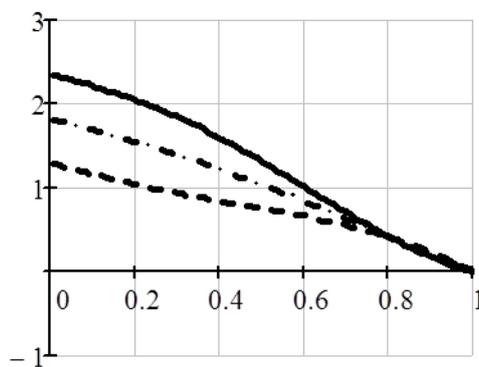
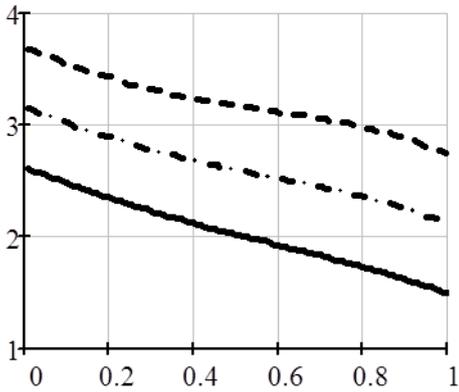


Рисунок 2 - Скорости волн растяжения для  $\Gamma_s = 0,0578$ : а). С учётом геометрической нелинейности; б). Без учёта геометрической нелинейности.

а).



б).

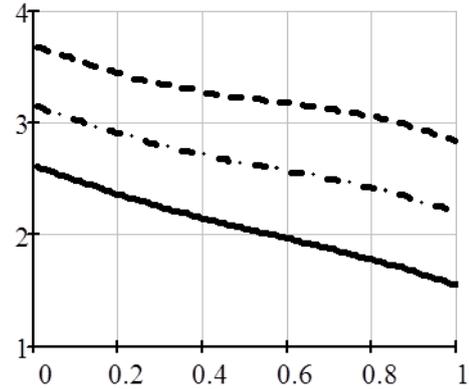
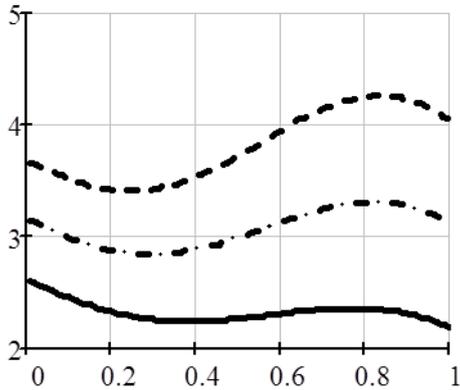


Рисунок 3 - Скорости волн сжатия для  $\Gamma_s = 0,01155$ : а). С учётом геометрической нелинейности; б). Без учёта геометрической нелинейности.

а).



б).

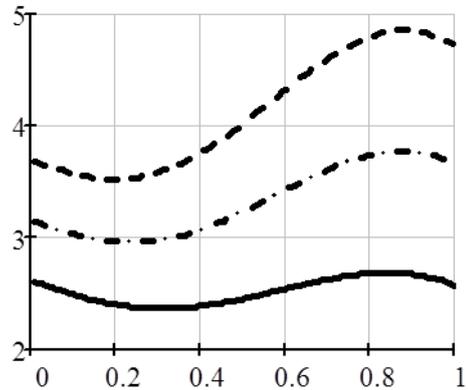


Рис. 4. Скорости волн сжатия для  $\Gamma_s = 0,0578$ : а). С учётом геометрической нелинейности; б). Без учёта геометрической нелинейности.

## Выводы.

Скорости распространения плоских одномерных волн деформаций слабого разрыва существенно определяется не только видом геометрии рассматриваемой математической модели сплошной среды, но также и уровнем

развития геометрической нелинейности, а также значением механических констант рассматриваемой модели. Результаты исследований могут быть использованы при решении задач динамического расчёта зданий и сооружений.

### **Библиографический список:**

1. Рахматулин Х.А. О распространении волн разгрузки // П.М.М. №1. т. IX, 1945. стр. 91-100.
2. Гениев Г.А. Некоторые вопросы распространения волн сжатия в грунтах. - В кн.: Исследования по вопросам теории пластичности и прочности строительных конструкций. М, 1958.
3. Бидерман В.Л. Расчёты на ударную нагрузку. Основы современных методов расчёта на прочность в машиностроении / Под ред. С.Д.Пономарёва.- М.: Машгиз, 1952.
4. Бакушев С.В. К вопросу об определении скоростей трёхмерных волн деформаций в нелинейной механике деформируемого твёрдого тела // Строительная механика и расчёт сооружений. 1992. №3. С.36-41.
5. Бакушев С.В. Некоторые вопросы динамики геометрически-нелинейных сплошных сред. // Тр. ин-та / ЦНИИСК им. В.А.Кучеренко - Методы расчёта и оптимизации строительных конструкций на ЭВМ. 1990. С.191-198.
6. Бакушев С.В. О некоторых закономерностях распространения двумерных волн деформаций в геометрически-нелинейных средах // Известия ВУЗов. Строительство. 1996. №5. С.27-31.
7. Бакушев С.В. Взаимодействие одномерных плоских волн слабого разрыва с массивной преградой. // Строительная механика и расчёт сооружений. 2013. №1. С.29-39.
8. Бакушев С.В. Продольно-поперечные геометрически-нелинейные волны деформаций. // Научный журнал: Учёные записки Петрозаводского государственного университета. Серия: Естественные и технические науки. №6(143). Сентябрь. 2014., С. 99-104 с.

9. Бакушев С.В. Физически и геометрически нелинейные цилиндрические волны деформаций сдвига. // Строительная механика и расчёт сооружений. 2018. №3. С.42-47.

10. Бакушев С.В. Модифицированная деформационная теория пластичности сыпучей среды // Строительная механика и расчёт сооружений. 2018., №2, стр. 2-8.

11. Бакушев С.В. Геометрически и физически нелинейная механика сплошной среды: Плоская задача. М.: Книжный дом «Либроком», 2013. 312 с.

12. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.4. Ч.2. М.:«Наука», 1981. 550 с.