УДК 539.371.

К ВОПРОСУ О ГЛАВНЫХ НАПРЯЖЕНИЯХ И ГЛАВНЫХ ДЕФОРМАЦИЯХ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Бакушев Сергей Васильевич

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Данилин Захар Андреевич

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

студент.

Аннотация

Рассматриваются вопросы соответствия друг другу главных напряжений и главных деформаций в деформируемом упругом теле.Показано, что главные напряжения соответствуют главным деформациям, то есть при выполнении неравенств $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ будут безусловно выполняться неравенства $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$, причём напряжению σ_1 соответствует деформация ε_1 напряжению σ_2 соответствует деформация ε_2 напряжению σ_3 соответствует деформация ε_3.

Ключевые слова: упругая среда, главные напряжения, главные деформации, главные направления.

ON THE QUESTION OF PRINCIPAL STRESSES AND PRINCIPAL DEFORMATIONS IN THE THEORY OF ELASTICITY

Bakushev Sergey Vasilevich

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor, Professor of the department “Mechanics”.

Danilin Zakhar Andreevich

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

student.

Abstract

The problems of correspondence of principal stresses and principal deformations in a deformable elastic body to each other are considered.It is shown that the principal stresses correspond to the principal deformations, i.e. when inequalities, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ are performed inequalities $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$, and the tension, σ_1 will be unconditionally satisfied corresponds to deformation ε_1 voltage σ_2 corresponds to deformation ε_2 voltage σ_3 corresponds to deformation ε_3.

Keywords: elastic medium, principal stresses, principal deformations, main directions.

Введение

Известно, что напряжённое и деформированное состояния твёрдого деформируемого тела подобны [1, 2, 3]. Это означает, что все формулы теории деформаций, в любой системе координат, можно получить из соответствующих формул теории напряжений при соответствующей замене нормальных напряжений на относительные линейные деформации, и замене касательных напряжений на половины углов сдвига. Несмотря на это, некоторые соответствия между напряжениями и деформациями требуют доказательства. Сюда, в частности, относится вопрос соответствия между главными напряжениями и главными деформациями.

Главные напряжения и главные деформации

Как известно, главными напряжениями $\sigma_i, i=1,2,3$ являются такие нормальные напряжения, которые действуют на площадках, на которых касательные напряжения $\tau_{ij}, ij = xy, yz, zx$ равны нулю [4]. Главные напряжения определяются путём вычисления корней кубического уравнения коэффициентами которого являются инварианты тензора напряжений, записанного в произвольной декартовой системе координат X, Y, Z. Так как тензор напряжений симметричен относительно главной диагонали, то озвученное выше кубическое уравнение всегда имеет три действительных корня (возможно и совпадающих). Для определённости введена договорённость, что имеет место быть следующая зависимость между главными напряжениями:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \qquad (1)$$

Площадки, на которых касательные напряжения равны нулю, называются главными. Нормали к главным площадкам образуют прямоугольную декартову систему координат.

Главными деформациями $\varepsilon_i, i = 1, 2, 3$ называются такие относительные линейные деформации, которые действуют в направлениях, угол сдвига $\gamma_{ij}, ij = xy, yz, zx$ между которыми равен нулю и не изменяется в процессе нагружения. В любой точке деформируемого тела всегда можно выбрать три таких направления, которые называются главными направлениями, причём эти направления будут взаимно ортогональными. Главные деформации можно найти, решая кубическое уравнение, коэффициентами которого будут инварианты тензора деформаций, записанного в произвольной декартовой системе координат. Так как тензор деформаций симметричен относительно главной диагонали, его корни всегда будут действительными числами (возможно и совпадающими).

Таким образом, в деформируемом теле, в любой его точке существуют, во-первых, три взаимно перпендикулярных направления, совпадающих с направлениями нормалей к главным площадкам, в направлении которых действуют главные нормальные напряжения; во-вторых, три взаимно перпендикулярных направления, угол сдвига между которыми равен нулю, в направлении которых действую главные относительные линейные деформации. Возникает резонный вопрос: совпадают ли между собой эти главные направления? Или, другими словами, совпадают ли между собой главные направления тензора напряжений и главные направления тензора деформаций?

Поскольку и теория напряжений, и теория деформаций формулируются независимо друг от друга, то логично предположить, что главные направления тензора напряжений и главные направления тензора деформаций не совпадают. Но тогда возникает значительно более сложная задача определения девиации (отклонения) друг от друга напряженного и деформированного состояний в деформированном теле. До настоящего времени эта задача не решена, и учёные-механики пришли к соглашению, что главные направления тензора напряжений совпадают с главными направлениями тензора деформаций в любой точке деформируемого тела в любой момент нагружения и разгрузки [5, 6].

Соответствие главных напряжений главным деформациям

Для главных напряжений имеет место быть соглашение (1). Покажем, что и для главных деформаций выполняется соглашение

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3 \qquad (2)$$

причём напряжению σ_1 соответствует деформация ε_1 напряжению σ_2 соответствует деформация ε_2 напряжению σ_3 соответствует деформация ε_3. Для этого рассмотрим первую группу уравнений обобщённого закона Гука в произвольных осях:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]; \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Пусть

$$\sigma_1 = \sigma_x, \sigma_2 = \sigma_y, \sigma_3 = \sigma_z \qquad (4)$$

При этом деформации также будут главными, причём возможное соответствие относительных линейных деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ главным деформациям $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ будет задаваться таблицей:

Предположим, что между главными деформациями установлена зависимость (2). Проверим, будет ли при этом выполняться зависимость (1), исходя из физических соотношений (3). Подставим соотношения (3), имея в виду равенства (4) в неравенства (2) с учётом табличных случаев соответствия относительных линейных деформаций в произвольных осях и главных деформаций.

Таблица 1 – Таблица соответствий относительных линейных деформаций главным деформациям

	Случай 1	Случай 2	Случай 3	Случай 4	Случай 5	Случай 6
ε_x	ε_1	ε_2	ε_3	ε_1	ε_2	ε_3
ε_y	ε_2	ε_3	ε_1	ε_3	ε_1	ε_2
ε_z	ε_3	ε_1	ε_2	ε_2	ε_3	ε_1

Случай 1.

$$\frac{1}{E}[\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)]\geq\frac{1}{E}[\sigma_2-\mu(\sigma_3+\sigma_1)]\geq\frac{1}{E}[\sigma_3-\mu(\sigma_1+\sigma_2)].$$

Отсюда, после элементарных преобразования, получаем:

$$\sigma_1\geq\sigma_2\geq\sigma_3 \tag{5}$$

Случай 2.

$$\frac{1}{E}[\sigma_3-\mu(\sigma_1+\sigma_2)]\geq\frac{1}{E}[\sigma_2-\mu(\sigma_2+\sigma_3)]\geq\frac{1}{E}[\sigma_2-\mu(\sigma_3+\sigma_1)].$$

Отсюда, после элементарных преобразования, получаем:

$$\sigma_3\geq\sigma_1\geq\sigma_2 \tag{6}$$

Случай 3.

$$\frac{1}{E}[\sigma_2-\mu(\sigma_3+\sigma_1)]\geq\frac{1}{E}[\sigma_3-\mu(\sigma_1+\sigma_2)]\geq\frac{1}{E}[\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)].$$

Отсюда, после элементарных преобразования, получаем:

$$\sigma_2\geq\sigma_3\geq\sigma_1 \tag{7}$$

Случай 4.

$$\frac{1}{E}[\sigma_1-\mu(\sigma_2+\sigma_3)]\geq\frac{1}{E}[\sigma_3-\mu(\sigma_1+\sigma_2)]\geq\frac{1}{E}[\sigma_2-\mu(\sigma_3+\sigma_1)].$$

Отсюда, после элементарных преобразования, получаем:

$$\sigma_1 \geq \sigma_3 \geq \sigma_2 \quad (8)$$

Случай 5.

$$\frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)\right] \geq \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right] \geq \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)\right].$$

Отсюда, после элементарных преобразования, получаем:

$$\sigma_2 \geq \sigma_1 \geq \sigma_3 \quad (9)$$

Случай 6.

$$\frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)\right] \geq \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)\right] \geq \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right].$$

Отсюда, после элементарных преобразования, получаем:

$$\sigma_3 \geq \sigma_2 \geq \sigma_1 \quad (10)$$

Таким образом, соответствие неравенств (1) и (2) возможно только для первого табличного случая, то есть, когда выполняются равенства:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x, \varepsilon_2 = \varepsilon_y, \varepsilon_3 = \varepsilon_z \quad (11)$$

При этом напряжению σ_1 соответствует деформация ε_1 напряжению σ_2 соответствует деформация ε_2 напряжению σ_3 соответствует деформация ε_3.

Выводы

1. Главные направления тензора напряжений совпадают с главными направлениями тензора деформаций.

2. Главные напряжения соответствуют главным деформациям, то есть при выполнении неравенств (1) будут безусловно выполняться неравенства (2), причём напряжению σ_1 соответствует деформация ε_1 напряжению σ_2 соответствует деформация ε_2 напряжению σ_3 соответствует деформация ε_3.

Библиографический список:

1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости: Пер. с англ. / Под ред. Г.С. Шапиро. – 2-е изд. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. 560 с.

2. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. 512 с.

3. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В. Теория упругости и пластичности: Учеб.: Для вузов. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 416 с.

4. Бакушев С.В. Теория упругости – краткий теоретический курс. Учебное пособие. Пенза: ПГУАС, 2016. 240 с.

5. Демидов С.П. Теория упругости: Учебник для вузов. М.: Высш. школа, 1979. 432 с.

6. Подгорный А.Н., Марченко Г.А., Пустынников В.И. Основы и методы прикладной теории упругости: Учеб. пособие для вузов. Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1981. 328 с.