УДК 629.12

ФОРМИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ ЖЁСТКОСТИ СТЕРЖНЯ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

Евсеев АлександрЕвгеньевич,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика».

Евсеев Илья Александрович,

ГК «Теплоцентрстрой», г. Москва,

инженер.

МашинВалерий Михайлович,

ООО «Спецпроектцентр», г. Пенза,

кандидат технических наук, главный конструктор.

Аннотация

В статье развиваетсяидея построения матриц жёсткости по заранее известному дифференциальному уравнению равновесия в перемещениях.В данном случае предложена методика вычисления матрицы жесткости стержня, расположенного на линейно-упругом (Винклеровском) основании. Полученная матрица позволяет вести деформационный расчет таких стержней.

Ключевые слова: метод конечных элементов, матрица жесткости, упругое основание.

FORMATION THE STIFFNESS MATRIX OF A ROD ON AN ELASTIC BASE ACCORDING TO THE DIFFERENTIAL EQUATION

Evseev Alexander Evgenievich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Candidate of Sciences, Associate Professor of the department "Mechanics".

Evseev IlyaAlexandrovich,
GC "Teplocentrstroy", Moscow,
engineer.
Mashin Valery Mikhailovich,
LLC "SpecialProjectCenter", Penza,
Candidate of Sciences, chief designer.

Abstract

The article develops the idea of forming stiffness matrices in accordance with the previously known differential equation of equilibrium during displacements. In this case, a method for forming the stiffness matrix of a rod located on a linearly elastic (Winkler) base is proposed. The resulting matrix allows us to calculate the deformation of such rods.

Keywords:finite element method, stiffness matrix, elastic base.

В вступительной статье авторов [1] был предложен единый подход к построению точных матриц жёсткости упругих стержневых конечных элементов для деформационного расчёта изгибаемых конструкций, основанный на использовании дифференциального уравнения равновесия в перемещениях. Там же был приведен пример вывода матрицы жесткости стержня, работающего на изгиб. Сравнение полученного результата с матрицей жесткости, полученной из общих уравнений строительной механики [4, 5], показало их полную идентичность, что подтверждает достоверность полученных результатов и работоспособность предлагаемой методики.

В следующих статьях авторы развили приложение своей методики на более сложные случаи напряжённо-деформированного состояния стержня сжато-изогнутый стержень [2] и растянуто-изогнутый стержень [3].

В тех же работах было показано отсутствие целесообразности в получении матриц жесткости в замкнутом виде, т.е. таком виде, когда каждый элемент матрицы записан отдельной строкой и его можно вычислить, не проводя операций с матрицами.

В настоящей работе рассмотрим стержень находящийся на линейно-упругом (Винклеровском) основании. Дифференциальное уравнение изгиба такого стержня при узловой нагрузке имеет вид:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + 4 \cdot n^4 \cdot v = 0, \text{ где } n = \sqrt[4]{\frac{k \cdot b}{4 \cdot EJ}} \tag{1}$$

где $v=v(x)$ — прогиб стержня.

Решение уравнения (1) найдём, решив соответствующее характеристическое уравнение и определив его корни. Общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$\begin{gathered} v = a_1 \cdot e^{nx} \cdot \cos(n \cdot x) + a_2 \cdot e^{nx} \cdot \sin(n \cdot x) + \\ + a_3 \cdot e^{-nx} \cdot \cos(n \cdot x) + a_4 \cdot e^{-nx} \cdot \sin(n \cdot x) = \vec{H} \cdot \vec{a}, \end{gathered} \tag{2}$$

где $\vec{H} = \left[e^{nx} \cdot \cos(n \cdot x) e^{nx} \cdot \sin(n \cdot x) e^{-nx} \cdot \cos(n \cdot x) e^{-nx} \cdot \sin(n \cdot x) \right]$ — вектор-строка линейно-независимых решений уравнения (1),

$\vec{a}^T = [a_1\ a_2\ a_3\ a_4]$ — вектор-столбец произвольных постоянных.

Запишем выражение (2) и производные от него в матричной форме

$$\begin{bmatrix} v \\ v' \\ v'' \\ v''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{nx}\cos(nx) & e^{nx}\sin(nx) & e^{nx}\cos(nx) & ne^{-nx}\sin(nx) \\ ne^{nx}\cos(nx) - ne^{nx}\sin(nx) & ne^{nx}\sin(nx) + ne^{nx}\cos(nx) & -ne^{-nx}\cos(nx) - ne^{-nx}\sin(nx) & -ne^{-nx}\sin(nx) + ne^{-nx}\cos(nx) \\ -2n^2 e^{nx}\sin(nx) & 2n^2 e^{nx}\cos(nx) & 2n^2 e^{-nx}\sin(nx) & -2n^2 e^{-nx}\cos(nx) \\ -2n^3 e^{nx}\sin(nx) - 2n^3 e^{nx}\cos(nx) & 2n^3 e^{nx}\cos(nx) - 2n^3 e^{nx}\sin(nx) & -2n^3 e^{-nx}\sin(nx) - 2n^3 e^{-nx}\cos(nx) & 2n^3 e^{-nx}\sin(nx) + 2n^3 e^{-nx}\cos(nx) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

Перемещения концевых сечений стержня, как и прежде, будем характеризовать вектором

$$\vec{Z} = [v_{\text{н}}\ \varphi_{н}\ v_{\text{к}}\ \varphi_{к}]^T, \tag{3}$$

где v и φ — прогиб (перемещение перпендикулярное оси стержня) и угол поворота сечения соответственно, а индексы «*н*» и «*к*» показывают принадлежность обобщенного перемещения к «началу» и «концу» стержня. Двойственным к вектору (3) будет вектор реакций концов стержня

$$\vec{r} = \left[r_{v\text{н}} \; r_{\varphi н} \; r_{v\text{к}} \; r_{\varphi к} \right]^T \tag{4}$$

Подставим координаты начала (x=0) и конца (x=l) стержня в выражение (2) и в первую производную от него

$$\vec{Z} = \begin{bmatrix} v_\text{н} \\ \varphi_н \\ v_к \\ \varphi_к \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ n & n & -n & n \\ e^{nl}\cos(nl) & e^{nl}\sin(nl) & e^{-nl}\cos(nl) & e^{nl}\sin(nl) \\ n\cdot e^{nl}\cdot(\cos(nl)-\sin(nl)) & n\cdot e^{nl}\cdot(\cos(nl)+\sin(nl)) & n\cdot e^{-nl}\cdot(\cos(nl)+\sin(nl)) & n\cdot e^{-nl}\cdot(\cos(nl)-\sin(nl)) \end{bmatrix} \cdot \vec{a} \tag{5}$$

или

$$\vec{Z} = L \cdot \vec{a} \tag{6}$$

Отсюда

$$\vec{a} = L^{-1} \cdot \vec{z} \tag{7}$$

Используя известные дифференциальные зависимости внутренних усилий от перемещений

$$M = EJ \cdot \frac{d^2 v}{dx^2}; \;\; Q = EJ \cdot \frac{d^3 v}{dx^3}, \tag{8}$$

запишем

$$\begin{bmatrix} Q \\ M \end{bmatrix} = EJ \cdot \begin{bmatrix} -2n^3e^{nx}\sin(nx) - 2n^3e^{nx}\cos(nx) & 2n^3e^{nx}\cos(nx) - 2n^3e^{nx}\sin(nx) & -2n^3e^{-nx}\sin(nx) - 2n^3e^{-nx}\cos(nx) & 2n^3e^{-nx}\sin(nx) + 2n^3e^{-nx}\cos(nx) \\ -2n^2e^{nx}\sin(nx) & 2n^2e^{nx}\cos(nx) & 2n^2e^{-nx}\sin(nx) & -2n^2e^{-nx}\cos(nx) \end{bmatrix} \cdot \vec{a} \tag{9}$$

Подставляя в (9) координаты начала ($x = 0$) и конца ($x = l$) стержня, получим значения поперечных сил и моментов в этих сечениях. Компоненты вектора $\vec{\gamma}$ (4) можно выразить через эти усилия

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r_{v\text{н}} \\ r_{\phi н} \\ r_{v\text{к}} \\ r_{\phi к} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{\text{н}} \\ \text{-}M_{\text{н}} \\ -Q_{\text{к}} \\ M_{\text{к}} \end{bmatrix} = EJ \cdot \begin{bmatrix} -2 \cdot n^3 & 2 \cdot n^3 & 2 \cdot n^3 & 2 \cdot n^3 \\ 0 & -2 \cdot n^2 & 0 & 2 \cdot n^2 \\ 2 \cdot n^3 \cdot e^{nl} \cdot \left(\cos(nl) + \sin(nl)\right) & 2 \cdot n^3 \cdot e^{nl} \cdot \left(\sin(nl) - \cos(nl)\right) & 2 \cdot n^3 \cdot e^{-nl} \cdot \left(\sin(nl) - \cos(nl)\right) & -2 \cdot n^3 \cdot e^{-nl} \cdot \left(\cos(nl) + \sin(nl)\right) \\ -2 \cdot n^2 \cdot e^{nl} \cdot \sin(nl) & 2 \cdot n^2 \cdot e^{nl} \cdot \cos(nl) & 2 \cdot n^2 \cdot e^{-nl} \cdot \sin(nl) & -2 \cdot n^2 \cdot e^{-nl} \cdot \cos(nl) \end{bmatrix} \cdot \vec{a} \tag{10}$$

или

$$\vec{r} = L \cdot \vec{a} \tag{11}$$

Подставим (7) в (11)

$$\vec{r} = L_1 \cdot L^{-1} \cdot \vec{z} = r \cdot \vec{z} \tag{12}$$

где $r = L_1 \cdot L^{-1}$— изгибная матрица жёсткости стержня, (13)

записанная в местной системе координат.

В работах [2, 3] было показано, что обращение матриц в «символьном виде» не является целесообразным. Менее затратным с точки зрения быстродействия и использования памяти авторами считается использование вычислительных возможностей ЭВМ.

Таким образом, получение матрицы жесткости конечного элемента сводиться к численному обращению матрицы Lи умножению её на L_1слева.

Полученная матрица жесткости позволяет вести деформационный расчет стержня на упругом основании на поперечный изгиб.

Библиографический список:

1. ЕвсеевА.Е., Евсеев И.А., Машин В.М. Методика построения матриц жёсткости по дифференциальному уравнению [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2021. №14. URL:

http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no14/stroitelnaya-mehanika/14.4/at_download/file

2. Евсеев А.Е., Евсеев И.А. Машин В.М. Построение матрицы жёсткости сжато-изогнутого стержня по дифференциальному уравнению [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2022. №15. URL: http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no15/stroitelnaya-mehanika/15.05/at_download/file

3. ЕвсеевА.Е., Евсеев И.А. Машин В.М. Построение матрицы жёсткости растянуто-изогнутого стержня по дифференциальному уравнению [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2022. №16. URL: http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no16/stroitelnaya-mehanika/16.07/at_download/file

4. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. М.: Высшая школа, 1986. 607 с.

5. Строительная механика. Стержневые системы /Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н.. М.: Стройиздат, 1981. 512 с.