

УДК 539.313

## ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.

### ЧАСТЬ 2 – АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ПРИ БИЛИНЕЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ЗАМЫКАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ.

*Бакушев Сергей Васильевич,*

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,  
г. Пенза,*

*доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».*

#### **Аннотация**

Рассматривается построение алгоритма для решение плоской задачи физически нелинейной теории упругости в напряжениях применительно к расчёту балок-стенок. Замыкающие уравнения физических соотношений, описывающие графики диаграмм объёмного и сдвигового деформирования, аппроксимируются билинейными функциями. Построение алгоритма основано на выявлении возможного положения плоских кривых излома объёмных и сдвиговых деформаций, то есть определения геометрических мест на плоскости балки-стенки, в которых зависимости между первыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций, а также зависимости между вторыми инвариантами девиаторов напряжений и деформаций имеют излом. Кривые излома объёмных и сдвиговых деформаций будут делить область балки-стенки на отдельные участки в каждом из которых напряжённо-деформированное состояние будет определяться в соответствии с разными модулями объёмного расширения-сжатия и сдвига. Исследования показывают, что возможны не менее 46 случаев взаимного расположения кривых объёмного и сдвигового деформирования и плоскости балки-стенки, а также значений модулей объёмного  $K$  и сдвигового  $G$  деформирования.

**Ключевые слова:** плоская задача, балка-стенка, билинейная аппроксимация, решение в напряжениях, алгоритм.

# A PLANE PROBLEM OF THE PHYSICALLY NONLINEAR THEORY OF ELASTICITY.

## PART 2 – ALGORITHM FOR SOLVING BILINEAR APPROXIMATION OF CLOSING EQUATIONS

*Bakushev Sergey Vasilevich,*

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,*

*Doctor of Sciences, Professor of the department “Mechanics”.*

### **Abstract**

The article discusses the construction of an algorithm for solving the plane problem of the physically nonlinear theory of elasticity under stress in relation to the analysis of deep beams. The closing equations of physical relations describing the graphs of volumetric and shear deformation diagrams are approximated by bilinear functions. The construction of the algorithm is based on the identification of the possible position of the plane fracture curves of volumetric and shear deformations, that is, the determination of geometric places on the beam-wall plane in which the dependencies between the first invariants of stress and strain tensors, as well as the dependencies between the second invariants of stress and strain deviators, have a fracture. The fracture curves of volumetric and shear deformations will divide the region of the deep beam into separate sections, in each of which the stress-strain state will be determined in accordance with different moduli of volumetric expansion-contraction and shear. Studies show that there are at least 46 cases of mutual arrangement of the volumetric and shear deformation curves and the deep beam plane, as well as the values of the moduli of volumetric  $K$  and shear  $G$  of deformation.

**Keywords:** planar problem, beam-bore, bilinear approximation, stress solution, algorithm

## **Введение**

В части 1 моей статье «Плоская задача физически нелинейной теории упругости.» было дано построение разрешающих уравнений в напряжениях для решения плоской задачи физически нелинейной теории упругости, применительно к расчёту балок-стенок, при билинейной аппроксимации замыкающих уравнений физических соотношений. Кроме того, был дан сокращённый алгоритм расчёта балки-стенки для разрывных функций объёмного и сдвигового деформирования. В данной работе читателю предоставляется полный алгоритм определения напряжённо-деформированного состояния при решении плоской задачи физически нелинейной теории упругости (обобщённого плоского напряжённого состояния), применительно к расчёту балки-стенки, физические соотношения для которой включают замыкающие уравнения, аппроксимированные билинейными функциями (рис. 1).

Решению плоской задачи как с учётом, так и без учёта физической нелинейности применительно к расчёту балок-стенок, являющихся одним из основных элементов строительных конструкций зданий и сооружений гражданского и промышленного назначения, уделяется значительное влияние в научной литературе. Так в работах [1-5] российских авторов и в работах [6-10] зарубежных авторов рассматриваются вопросы расчёта балок-стенок в составе зданий и сооружений. В работах [11-17] рассматриваются алгоритмы расчёта балок-стенок как элементов строительных конструкций.

В данной статье рассматривается построения алгоритма расчёта балки-стенки, материал которой является физически нелинейным, при аппроксимации замыкающих уравнений физических соотношений, описывающих графики диаграмм объёмного и сдвигового деформирования, билинейными функциями.

**Замечание.** Ниже все ссылки даны на формулы, приведённые в части 1. Статьи «Плоская задача физически нелинейной теории упругости. Часть 1 – решение в напряжениях при билинейной аппроксимации замыкающих уравнений».

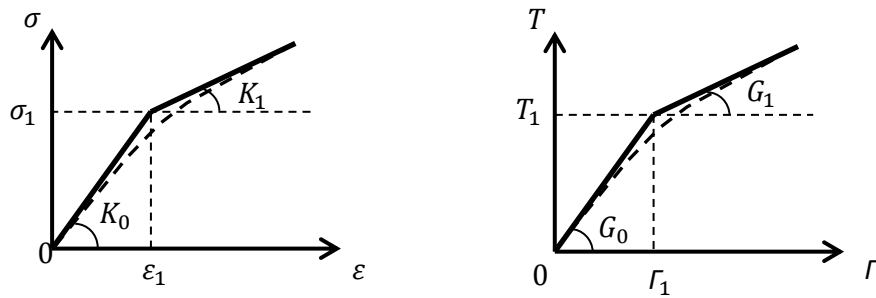


Рисунок 1 – Диаграммы объёмного  $\sigma = \sigma(\epsilon)$  и сдвигового  $T = T(\Gamma)$  деформирования

Пусть балка-стенка нагружена произвольной нагрузкой  $q(x, y)$ , лежащей в её плоскости, вообще говоря, по всем четырём сторонам.

Построение алгоритма основано на выявлении возможного положения плоских кривых излома объёмных и сдвиговых деформаций и состоит из следующих этапов:

1. Основываясь на первом прямолинейном участке диаграмм объёмного и сдвигового деформирования (рис. 1), то есть принимая  $K = K^I$  и  $G = G^I$  определяем напряжения  $\sigma_{xx}(x, y)$ ,  $\sigma_{yy}(x, y)$ ,  $\sigma_{xy}(x, y)$  в каждой точке балки-стенки, используя уравнения равновесия (17) и (21). При этом можно воспользоваться любым известным методом: методом конечных разностей, методом конечных элементов, и так далее. Для определения деформаций воспользуемся физическими соотношениями (5) с коэффициентами (6).

2. Вычисляем первый инвариант тензора напряжений  $\sigma(x, y)$  и интенсивность касательных напряжений  $T(x, y)$ .

3. Из условий  $\sigma(x_1^\sigma, y_1^\sigma) = \sigma_1$ ;  $T(x_1^T, y_1^T) = T_1$  находим уравнения кривых  $f_\sigma(x_1^\sigma, y_1^\sigma) = 0$  и  $f_T(x_1^T, y_1^T) = 0$ .

Замечание: плоскую кривую  $f_\sigma(x_1^\sigma, y_1^\sigma) = 0$  будем называть кривой излома объёмных деформаций; плоскую кривую  $f_T(x_1^T, y_1^T) = 0$  будем называть кривой излома сдвиговых деформаций. Следует иметь в виду, что при переходе через кривую  $f_\sigma(x_1^\sigma, y_1^\sigma) = 0$  модуль объёмного деформирования меняет верхний индекс (с I на II и наоборот); при переходе через кривую  $f_T(x_1^T, y_1^T) = 0$

модуль сдвигового деформирования меняет верхний индекс (с I на II и наоборот).

Кривые излома объёмных и сдвиговых деформаций будут делить область балки-стенки на отдельные участки в каждом из которых напряжённо-деформированное состояние будет определяться в соответствии с разными модулями объёмного расширения-сжатия и сдвига. При этом в одной из частей напряжённо-деформированное состояние, очевидно, будет определяться по первому прямолинейному участку диаграмм объёмного и сдвигового деформирования, то есть  $K = K^I$  и  $G = G^I$ . Для определения этой области достаточно вычислить в любой точке этой области значения первого инварианта тензора напряжений  $\sigma(x, y)$  и интенсивности касательных напряжений  $T(x, y)$ .

Замечание: не исключается случай, когда область, в которой  $K = K^I$  и  $G = G^I$  будет находиться за пределами балки-стенки.

Таким образом, в той части балки-стенки, где  $K = K^I$ ,  $G = G^I$  напряжения  $\sigma_{xx}(x, y)$ ,  $\sigma_{yy}(x, y)$ ,  $\sigma_{xy}(x, y)$  определяем используя уравнения равновесия (17) и (21). В той части балки-стенки, где  $K = K^{II}$ ,  $G = G^I$  напряжения  $\sigma_{xx}(x, y)$ ,  $\sigma_{yy}(x, y)$ ,  $\sigma_{xy}(x, y)$  определяем используя уравнения равновесия (17), (20) и (22). В той части балки-стенки, где  $K = K^I$ ,  $G = G^{II}$  напряжения  $\sigma_{xx}(x, y)$ ,  $\sigma_{yy}(x, y)$ ,  $\sigma_{xy}(x, y)$  определяем используя уравнения равновесия (17), (20) и (24). В той части балки-стенки, где  $K = K^{II}$ ,  $G = G^{II}$  напряжения  $\sigma_{xx}(x, y)$ ,  $\sigma_{yy}(x, y)$ ,  $\sigma_{xy}(x, y)$  определяем используя уравнения равновесия (17), (20) и (26).

Возможные варианты расположения кривых излома объёмных и сдвиговых деформаций на плоскости балки-стенки и значения модулей объёмного расширения-сжатия и сдвига в различных её частях показаны ниже на рисунках.

4. Если кривые  $f_\sigma(x_1^\sigma, y_1^\sigma) = 0$  и  $f_T(x_1^T, y_1^T) = 0$  проходят за пределами балки-стенки (рис. 2), то задача решена.

5. Кривая  $f_\sigma(x_1^\sigma, y_1^\sigma) = 0$  пересекает балку-стенку, а кривая  $f_T(x_1^T, y_1^T) = 0$  проходит за пределами балки-стенки (рис. 3).

6. Кривая  $f_T(x_1^T, y_1^T) = 0$  пересекает балку-стенку, а кривая  $f_\sigma(x_1^\sigma, y_1^\sigma) = 0$  проходит за пределами балки стенки (рис. 4).

7. Кривые  $f_T(x_1^T, y_1^T) = 0$  и  $f_\sigma(x_1^\sigma, y_1^\sigma) = 0$  пересекают балку-стенку (рис. 5).

8. Кривая  $f_\sigma(x_1^\sigma, y_1^\sigma) = 0$  является замкнутой линией, целиком лежащей в пределах балки-стенки. Кривая  $f_T(x_1^T, y_1^T) = 0$  находится за пределами балки-стенки (рис. 6).

9. Кривая  $f_T(x_1^T, y_1^T) = 0$  является замкнутой линией, целиком лежащей в пределах балки-стенки. Кривая  $f_\sigma(x_1^\sigma, y_1^\sigma) = 0$  находится за пределами балки-стенки (рис. 7).

10. Кривые  $f_\sigma(x_1^\sigma, y_1^\sigma) = 0$  и  $f_T(x_1^T, y_1^T) = 0$  являются замкнутыми линиями, нигде не пересекаются и обе располагаются в пределах балки-стенки (рис. 8).

11. Кривая  $f_\sigma(x_1^\sigma, y_1^\sigma) = 0$  является замкнутой линией, нигде не пересекающая контур балки-стенки; кривая  $f_T(x_1^T, y_1^T) = 0$  пересекает область балку-стенку и область, ограниченную линией  $f_\sigma(x_1^\sigma, y_1^\sigma) = 0$  (рис. 9).

12. Кривая  $f_T(x_1^T, y_1^T) = 0$  является замкнутой линией, нигде не пересекающая контур балки-стенки; кривая  $f_\sigma(x_1^\sigma, y_1^\sigma) = 0$  пересекает область балку-стенку и область, ограниченную линией  $f_T(x_1^T, y_1^T) = 0$  (рис. 10).

13. Кривая  $f_\sigma(x_1^\sigma, y_1^\sigma) = 0$  является замкнутой линией, нигде не пересекающая контур балки-стенки; кривая  $f_T(x_1^T, y_1^T) = 0$  пересекает область балку-стенку, но не пересекает область, ограниченную линией  $f_\sigma(x_1^\sigma, y_1^\sigma) = 0$  (рис. 11).

14. Кривая  $f_T(x_1^T, y_1^T) = 0$  является замкнутой линией, нигде не пересекающая контур балки-стенки; кривая  $f_\sigma(x_1^\sigma, y_1^\sigma) = 0$  пересекает область балку-стенку, но не пересекает область, ограниченную линией  $f_T(x_1^T, y_1^T) = 0$  (рис. 12).

15. Кривые  $f_\sigma(x_1^\sigma, y_1^\sigma) = 0$  и  $f_T(x_1^T, y_1^T) = 0$  являются замкнутыми пересекающимися линиями, не выходящими за пределы балки-стенки (рис. 13).

16. Кривые  $f_{\sigma}(x_1^{\sigma}, y_1^{\sigma}) = 0$  и  $f_T(x_1^T, y_1^T) = 0$  являются замкнутыми непересекающимися линиями (рис. 14).

17. Кривые  $f_{\sigma}(x_1^{\sigma}, y_1^{\sigma}) = 0$  и  $f_T(x_1^T, y_1^T) = 0$  - пересекающиеся линии (рис. 15).

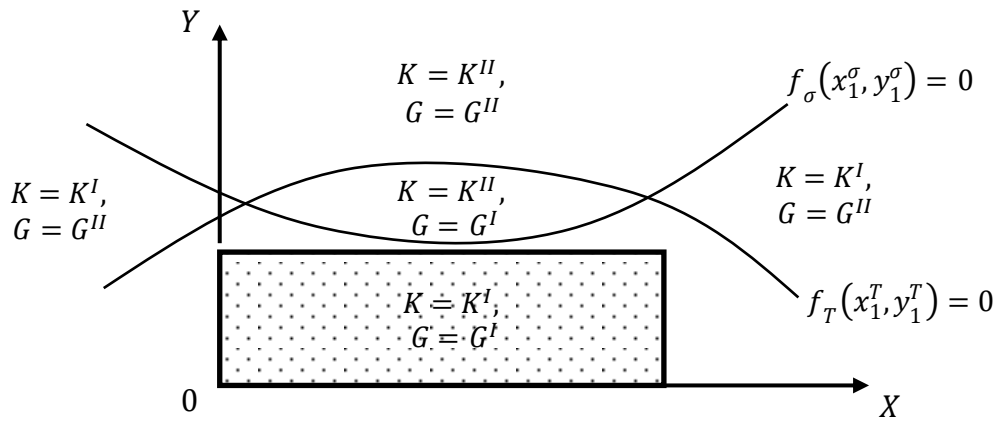


Рисунок 2 – Балка-стенка. Кривые излома объёмных и сдвиговых деформаций проходят за пределами балки-стенки

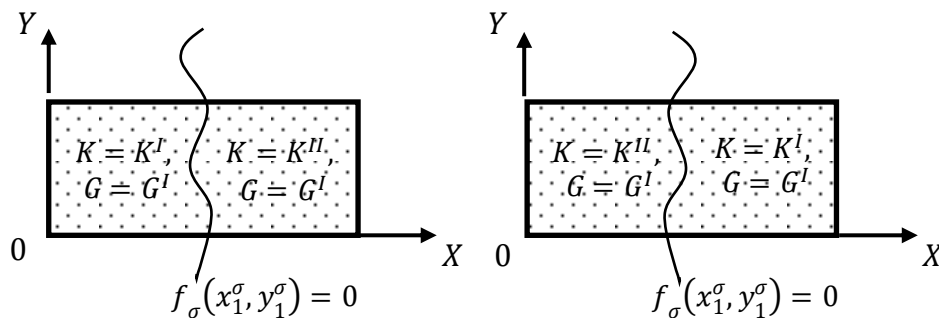


Рисунок 3 – Балка-стенка. Кривая излома объёмных деформаций пересекает балку-стенку

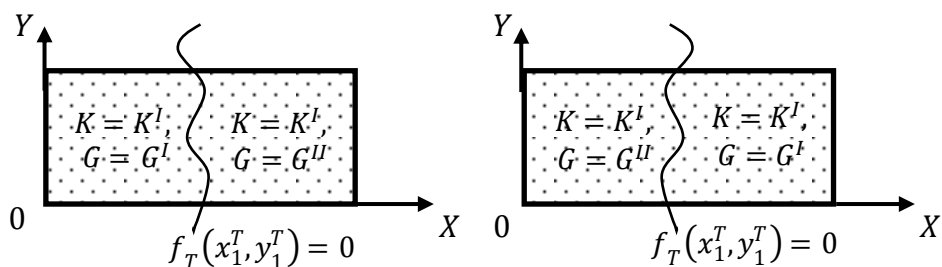


Рисунок 4 – Балка-стенка. Кривая излома сдвиговых деформаций пересекает балку-стенку

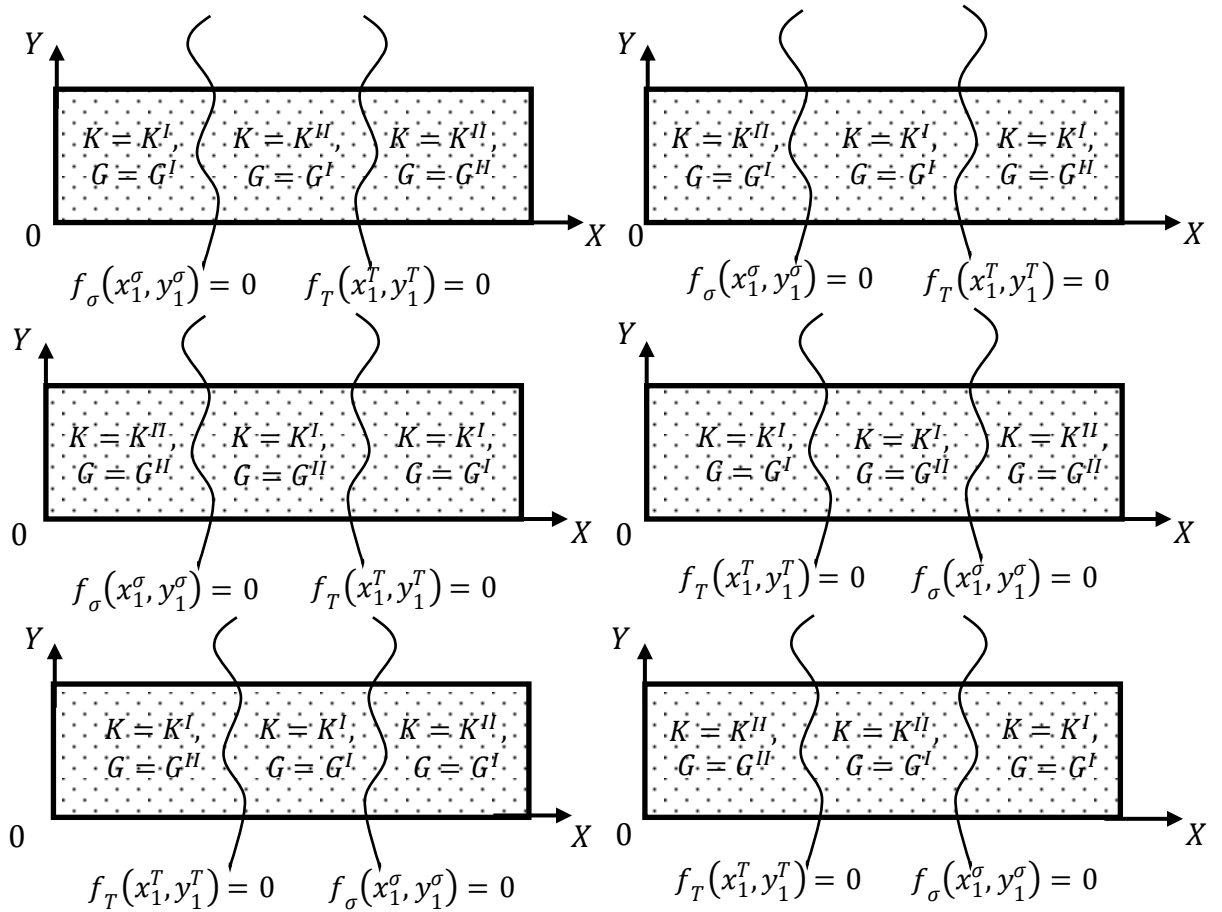


Рисунок 5 – Балка-стенка. Кривые излома объёмных и сдвиговых деформаций пересекают балку-стенку

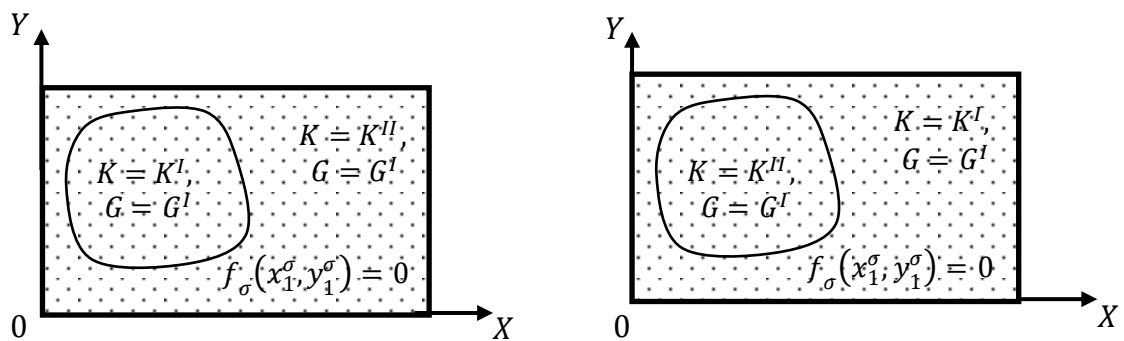


Рисунок 6 – Балка-стенка. Кривая излома объёмных деформаций замкнута и находится в пределах балки-стенки



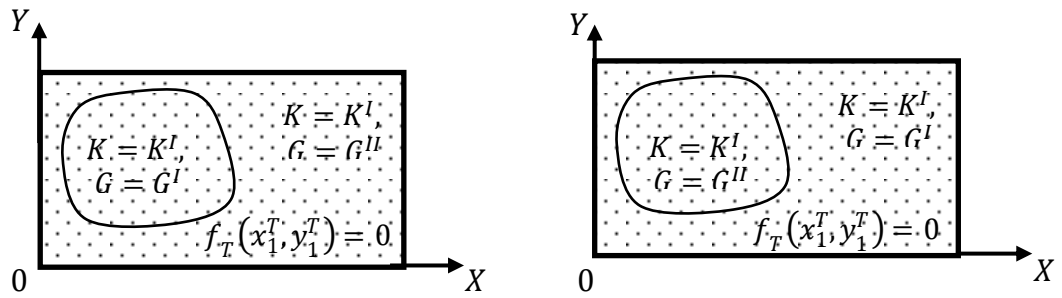


Рисунок 7 – Балка-стенка. Кривые излома сдвиговых деформаций замкнута и находится в пределах балки-стенки

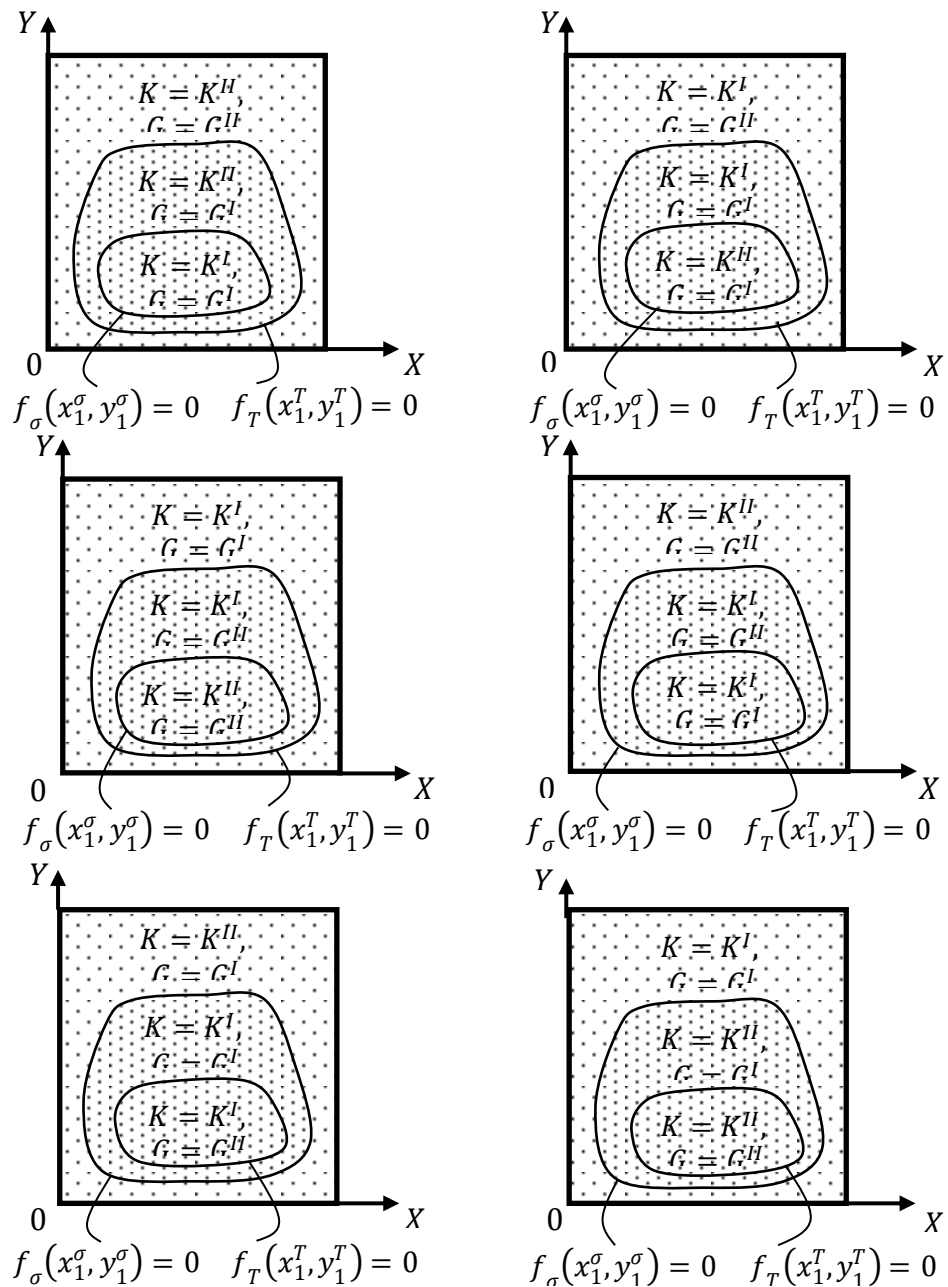


Рисунок 8 – Балка-стенка. Кривые излома объёмных и сдвиговых деформаций замкнутые линии, балку-стенку не пересекают

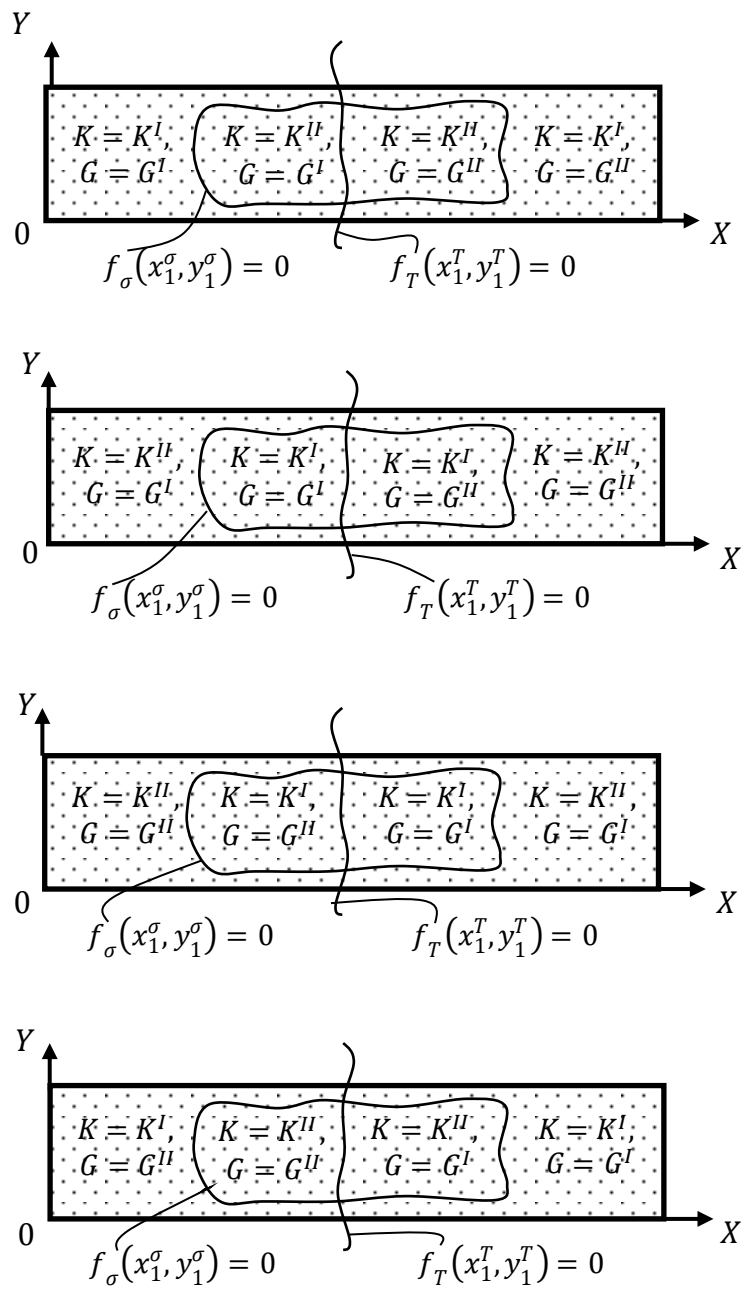


Рисунок 9 – Балка-стенка. Кривая излома объёмных деформаций замкнута и находится внутри балки-стенки; кривая излома сдвиговых деформаций пересекает балку-стенку

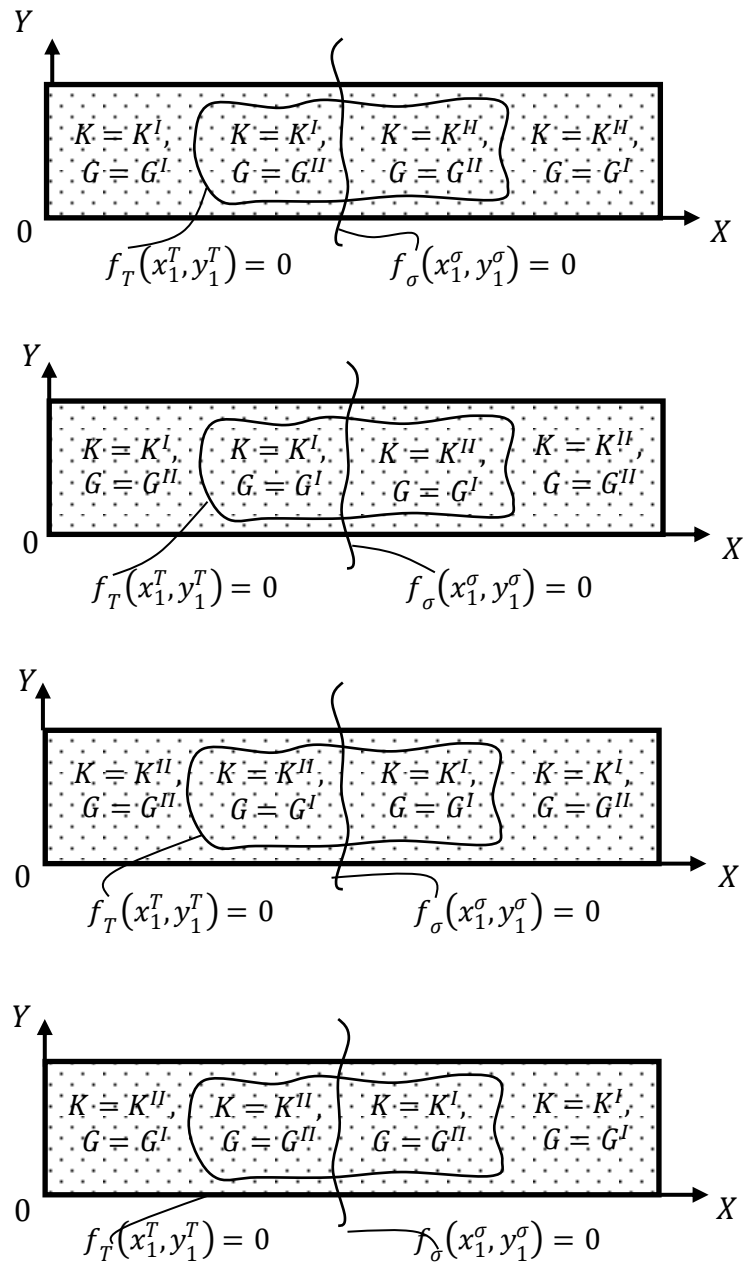


Рисунок 10 – Балка-стенка. Кривая излома сдвиговых деформаций замкнута и находится внутри балки-стенки; кривая излома объёмных деформаций пересекает балку-стенку

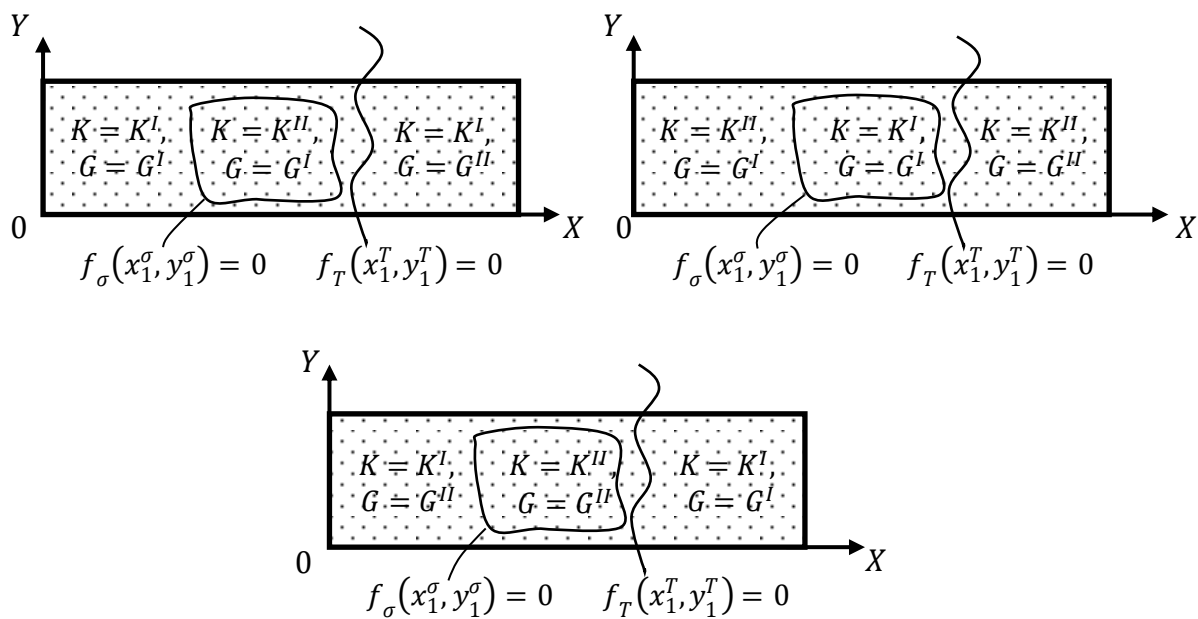


Рисунок 11 – Балка-стенка. Кривая излома объёмных деформаций является замкнутой линией; кривая излома сдвиговых деформаций пересекают балку-стенку

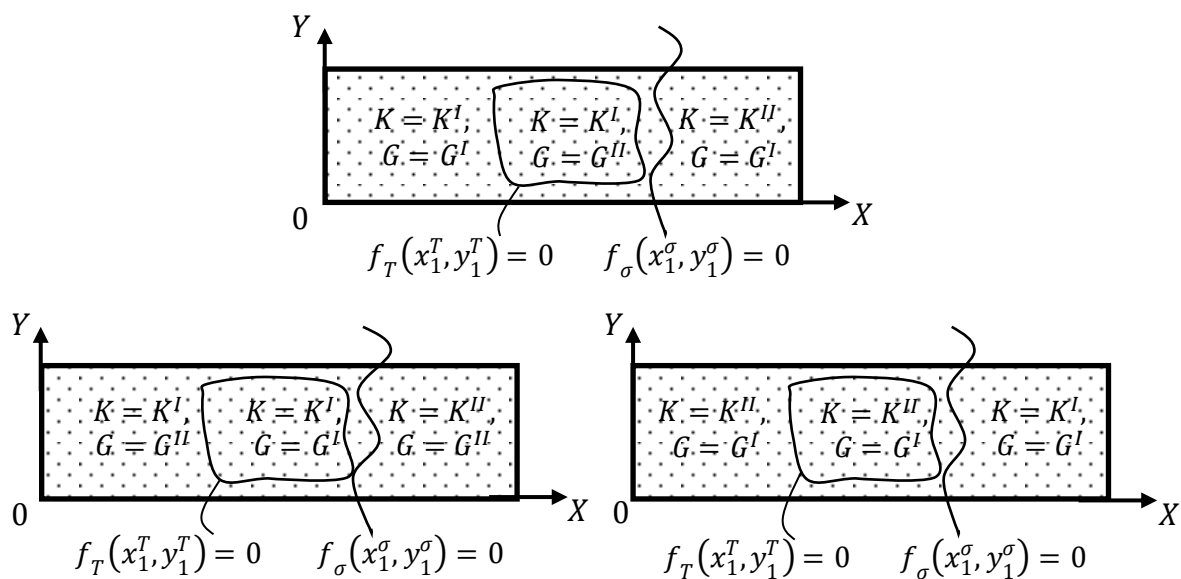


Рисунок 12 – Балка-стенка. Кривая излома сдвиговых деформаций является замкнутой линией; кривая излома объёмных деформаций пересекают балку-стенку

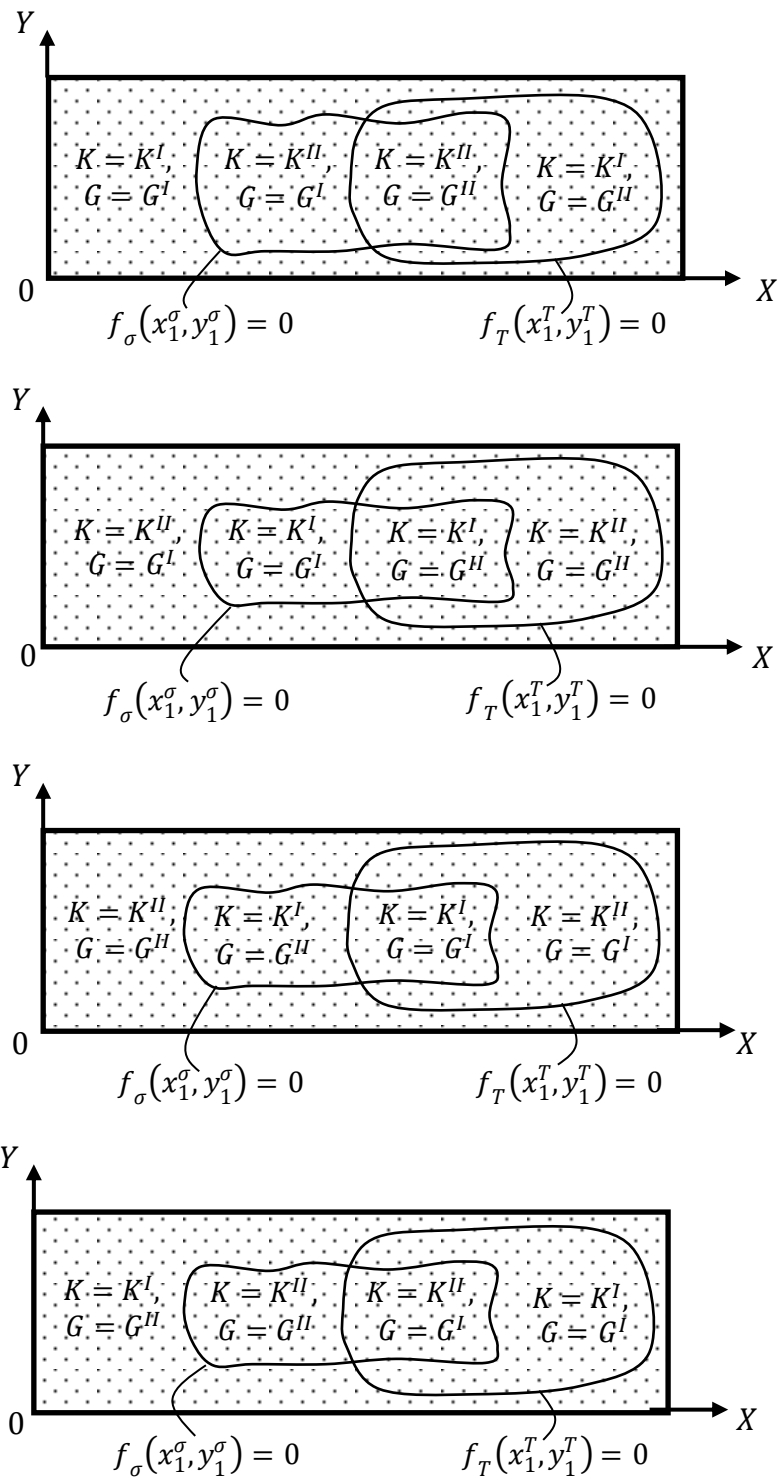


Рисунок 13 – Балка-стенка. Кривые излома объёмных и сдвиговых деформаций замкнутые пересекающиеся линии

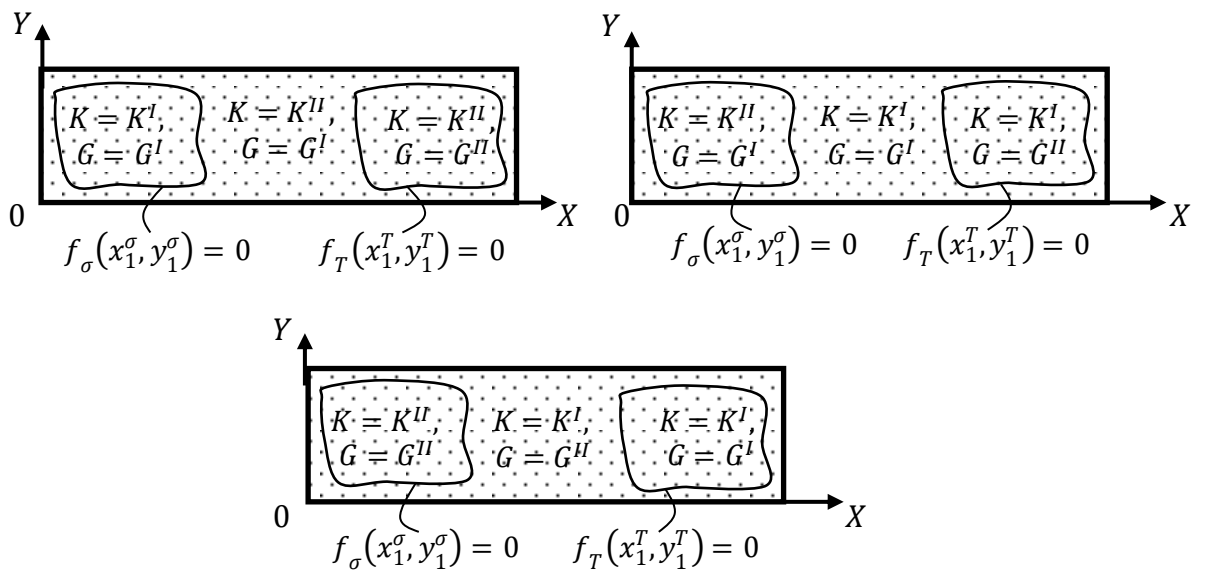


Рисунок 14 – Балка-стенка. Кривые излома объёмных и сдвиговых деформаций является замкнутыми непересекающимися линиями

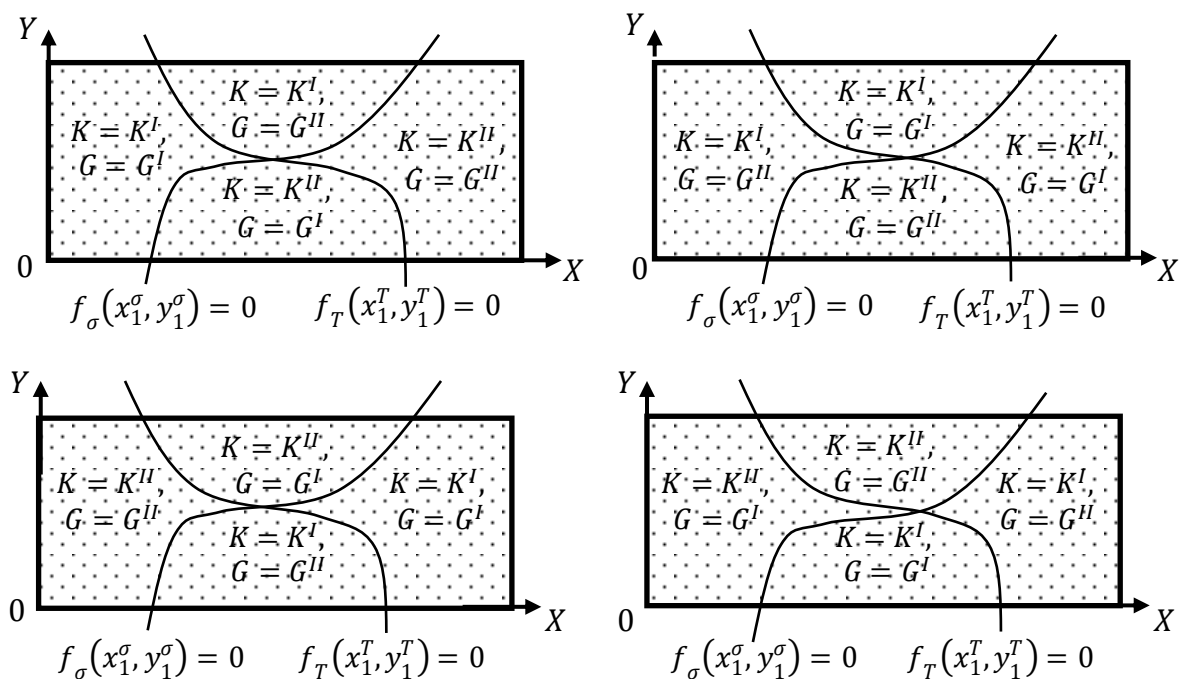


Рисунок 15 – Балка-стенка. Кривые излома объёмных и сдвиговых деформаций – пересекающиеся линии

### Заключение и выводы

Представленный алгоритм расчёта балок-стенок может найти применение при решении плоской задачи – обобщённого плоского напряжённого состояния

- физически нелинейной теории упругости при условии аппроксимации замыкающих уравнений физических соотношений, описывающие графики диаграмм объёмного и сдвигового деформирования, билинейными функциями.

### **Библиографический список**

1. Чылбак А.А. Исследование напряженно-деформированного состояния кирпичной кладки с железобетонными сердечниками // Вестник Тувинского государственного университета. №3 Технические и физико-математические науки. 2019. № 3 (50). С. 51-59. DOI: 10.24411/2077-6896-2019-10013

2. Ласьков Н.Н. Прочность стен из кирпичной кладки, опертых на поддерживающие конструкции // В сборнике: Эффективные строительные конструкции: теория и практика. Сборник статей XX Международной научно-технической конференции. Под редакцией Н.Н. Ласькова. 2020. С. 3-8.

3. Шуваева К.И. Исследование несущих конструкций многоэтажного кирпичного здания методом конечных элементов // StudNet. 2020. Т. 3. № 2. С. 117-126.

4. Магомедов М.Г., Акаев А.И., Пайзулаев М.М., Айламматова Д.А. Методологические аспекты теоретического исследования напряженно-деформированного состояния панельно-рамных вертикальных несущих систем // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2020. Т. 47. № 2. С. 153-165. DOI: 10.21822/2073-6185-2020-47-2-153-165

5. Петров А.Н., Евсеева А.В. Влияние прочности бетона на несущую способность железобетонных стеновых конструкций // В сборнике: Инновационное развитие современной науки: проблемы, закономерности, перспективы. Сборник статей IV Международной научно-практической конференции. В 2-х частях. 2017. С. 43-48.

6. Mojca Jarc Simonič, Samo Gostič, Vlatko Bosiljkov, Roko Žarnić. Testing and analysis of walls strengthened with FRP // Građevinar. 2014. Vol. 66, no. 06. pp. 533-548. DOI <https://doi.org/10.14256/JCE.960.2013>
7. Hamed Rahman Shokrgozar, Amin Ghannadiasl, Hashem Omid. Concrete Filled Double Steel Plate Shear Wall Response Modification Factor // Journal of Structural and Construction Engineering. 2019. Vol. 5, no. 4 pp. 140-155. DOI <https://doi.org/10.22065/jsce.2017.89253.1232>
8. Chunri Quan, Qiang Huang, Dongbin Li, Yong Chen. Lateral load bearing characteristics of light gauge steel and lightweight concrete shear walls // Acta Polytechnica CTU Proceedings. 2022. Vol. 33. pp. 473-479. DOI <https://doi.org/10.14311/APP.2022.33.0473>
9. Pyatikrestovsky K.P. Criteria of strength of walls from large masonry blocks // Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings. 2019. Vol. 15, no. 4. pp. 271-277. DOI <https://doi.org/10.22363/1815-5235-2019-15-4-271-277>
10. Qian Zhang, Liang Bai, Xingwen Liang, Ergang Xiong. Experimental study on seismic behavior of steel tube confined high-strength concrete shear walls // Journal of Vibroengineering. 2016. Vol. 18, no. 4. pp. 2263-2277. DOI <https://doi.org/10.21595/jve.2016.16657>
11. Макеев С.А., Комлев А.А., Райс Е.Г. Автоматизация расчета балок-стенок численными методами // В сборнике: Образование. Транспорт. Инновации. Строительство. Сборник материалов II Национальной научно-практической конференции. 2019. С. 362-366.
12. Петров А.Н., Белов П.С. Критерий трещиностойкости и механизмы разрушения бетона при плоском напряженном состоянии // В сборнике: Деревянное малоэтажное домостроение: экономика, архитектура и ресурсосберегающие технологии. Сборник статей научно-практической конференции. Петрозаводск, 2021. С. 78-82.
13. Макеев С.А., Комлев А.А., Ким А.В. Алгоритм расчета балок-стенок методом конечных разностей // В сборнике: Образование. Транспорт.



Инновации. Строительство. сборник научных трудов национальной научно-практической конференции. 2018. С. 408-412.

14. Романова Т.П., Янковский А.П. Сравнительный анализ моделей изгибного деформирования армированных балок-стенок из нелинейно-упругих материалов // Проблемы прочности и пластичности. 2014. Т. 76. № 4. С. 297-309.

15. Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Кайтуков Т.Б. О верификации дискретно-континуального метода конечных элементов при расчете балок-стенок с постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению. Сопоставления с программным комплексом Ansys mechanical // В сборнике: Вопросы прикладной математики и вычислительной механики. Сборник трудов. Москва, 2014. С. 7-20.

16. Свиридов С.Ю. Расчёт балок-стенок с учетом технологических неоднородностей // Вестник Саратовского государственного технического университета. 2012. Т. 1. № 2 (64). С. 42-44.

17. Ермакова А.В. Пример формирования уравнений равновесия метода дополнительных конечных элементов для расчета железобетонных балок-стенок по предельным состояниям // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2012. № 17 (276). С. 13-17.