

УДК 539.313

**ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ.**

**ЧАСТЬ 1 – РЕШЕНИЕ В НАПРЯЖЕНИЯХ ПРИ БИЛИНЕЙНОЙ
АППРОКСИМАЦИИ ЗАМЫКАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ**

Бакушев Сергей Васильевич,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Аннотация

Рассматривается решение плоской задачи теории нелинейной упругости в напряжениях применительно к расчёту балки-стенки. Замыкающие уравнения физических соотношений, описывающие графики диаграмм объёмного и сдвигового деформирования, аппроксимируются билинейными функциями. Показано, что на первом прямолинейном участке диаграмм объёмного и сдвигового деформирования, аппроксимированных билинейными функциями, физически нелинейный аналог уравнения Леви, будет совпадать с уравнением Леви линейной теории упругости. В трёх оставшихся случаях взаимного расположения линейных участков билинейных графиков диаграмм объёмного и сдвигового деформирования, уравнение Леви является неоднородным, то есть его правая часть отлична от нуля. Полученное дифференциальное уравнение совместности деформаций в напряжениях совместно с уравнениями равновесия и краевыми условиями на контуре балки-стенки составляют краевую задачу для решения в напряжениях плоской задачи физически нелинейной теории упругости в части обобщённого плоского напряжённого состояния при билинейной аппроксимации замыкающих уравнений для физических соотношений.

Ключевые слова: плоская задача, уравнение неразрывности, билинейная аппроксимация, решение в напряжениях.

A PLANE PROBLEM OF THE PHYSICALLY NONLINEAR THEORY OF ELASTICITY.

PART 1 – SOLUTION IN STRESSES FOR BILINEAR APPROXIMATION OF CLOSING EQUATIONS

Bakushev Sergey Vasilevich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor of the department “Mechanics”.

Abstract

We consider the plane problem solution of nonlinear elasticity theory in stresses in relation to the calculation of a wall beam. Closing equations of physical relations, describing volumetric and shear deformation diagrams graphs, are approximated by bilinear functions. It is shown that in the first rectilinear section of the diagrams of volumetric and shear deformation, approximated by bilinear functions, the physically nonlinear Levy equation analogue will coincide with Levy equation of the linear theory of elasticity. In three remaining cases of mutual arrangement of linear sections of the bilinear graphs of volumetric and shear deformation diagrams, Levy equation is non-homogeneous, that is, its right side is nonzero. The received differential equation of deformations compatibility in stresses, together with equilibrium equations and boundary conditions on the wall beam contour, constitute the boundary value problem for plane problem stress solution of a physically nonlinear theory of elasticity in terms of generalized plane stress state with a bilinear approximation of closing equations for physical relations.

Keywords: Plane problem, continuity equation, bilinear approximation, stress solution.

Введение

Балки-стенки, наряду с плитами, колоннами и балками, являются основными конструктивными элементами зданий и сооружений, так как моделируют работу ограждающих конструкций – стен, простенков,

перегородок, диафрагм жёсткости и так далее. Расчёт балок-стенок, то есть определение напряжённо-деформированного состояния конструкций, находящихся в условиях обобщённого плоского напряжённого состояния, при упругой работе материала не составляет особого труда. Разработанные методы расчёта упругих балок-стенок – метод конечных разностей, метод расчёта при помощи целых полиномов, метод расчёта при помощи тригонометрических рядов, метод Ритца-Тимошенко, метод Бубнова-Галёркина, метод конечных элементов – опробованы многолетней практикой применения и, если и нуждаются в совершенствовании, то весьма незначительно [1, 2, 3]. Следует обратить внимание на статью [3] в которой рассмотрен расчёт упругой балки-стенки. Показано, что все имеющиеся в литературе решения этой задачи недостаточно корректны и могут рассматриваться лишь как первое приближение к искомому точному решению. Другое дело расчёт балок-стенок из физически нелинейного материала. Точных аналитических методов здесь, наверное, вообще нет, и решение строится, как правило, приближённо [4, 5, 6]. Можно, конечно, использовать общий метод упругих решений, но в основном для расчёта физически нелинейных балок-стенок используется метод конечных элементов [7, 8, 9, 10, 11]. Что касается исследований зарубежных авторов, то здесь основное внимание уделяется расчёту балок-стенок как конструктивных элементов ограждающих конструкций [12, 13] и их совершенствованию для противостояния сейсмическим воздействиям [14, 15, 16]. В работе [17], с целью определения предельной нагрузки и деформации, исследуется работа железобетонных элементов (балок-стенок) с геометрическими или статическими прерывистыми областями на действие монотонной нагрузки.

В данной работе рассматривается метод расчёта физически нелинейных балок-стенок в напряжениях, основанный на аппроксимации замыкающих уравнений физических соотношений, описывающих объёмное и сдвиговое деформирование, билинейными функциями.

Замыкающие уравнения

Будем рассматривать решение плоской задачи теории нелинейной упругости в напряжениях применительно к расчёту балки-стенки, то есть имеем обобщённое плоское напряжённое состояние:

$$\sigma_{zz} = 0; \sigma_{zx} = 0; \sigma_{zy} = 0. \quad (1)$$

При этом:

$$\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}; \varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}; \quad (2)$$

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} - \sigma_{xx} \cdot \sigma_{yy} + 3 \cdot \sigma_{xy}^2}; \quad (3)$$

$$\Gamma = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 + \frac{3}{2} \cdot \sigma_{xy}^2}. \quad (4)$$

Физические соотношения приводятся к виду [18]:

$$\varepsilon_{xx} = a \cdot \sigma_{xx} + b \cdot \sigma_{yy}; \varepsilon_{yy} = a \cdot \sigma_{yy} + b \cdot \sigma_{xx}; \varepsilon_{xy} = \frac{1}{G} \cdot \sigma_{xy}. \quad (5)$$

Здесь

$$a = \frac{3 \cdot K + G}{9 \cdot K \cdot G}; b = \frac{2 \cdot G - 3 \cdot K}{18 \cdot K \cdot G}. \quad (6)$$

Замыкающие уравнения физических соотношений

$$\sigma = 3 \cdot K \cdot \varepsilon \text{ и } T = G \cdot \Gamma, \quad (7)$$

описывающие выпуклые кривые на диаграммах объёмного и сдвигового деформирования (рис. 1, пунктирные линии), аппроксимируем билинейными функциями [19] (рис. 1, сплошные линии).

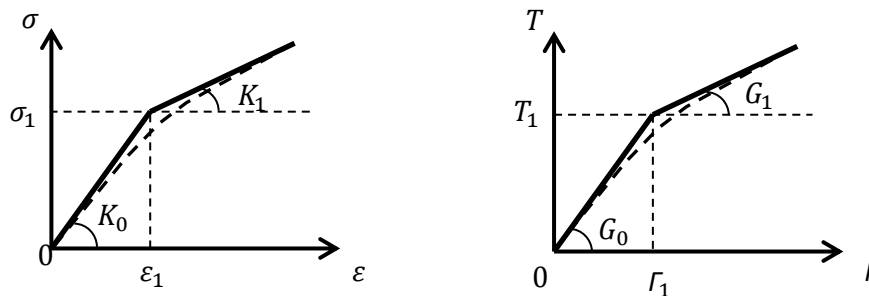


Рисунок 1 – Диаграммы объёмного $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ и сдвигового $T = T(\Gamma)$ деформирования

На рис. 1 обозначено: K_0 – начальный модуль объёмного расширения (сжатия); G_0 – начальный модуль сдвига; K_1 – модуль упрочнения при объёмном расширении (сжатии); G_1 – модуль упрочнения при сдвиге; σ_1, ε_1 – координаты точки излома графика билинейной диаграммы объёмного деформирования; T_1, Γ_1 – координаты точки излома графика билинейной диаграммы сдвигового деформирования; σ – первый инвариант тензора напряжений; ε – первый инвариант тензора деформаций; T – интенсивность касательных напряжений; Γ – интенсивность деформаций сдвига.

Как следует из рис. 1 на первом прямолинейном участке диаграмм объёмного и сдвигового деформирования

$$\sigma = K_0 \cdot \varepsilon; T = G_0 \cdot \varepsilon. \quad (8)$$

Принимая во внимание формулы (7), получаем выражения для модулей объёмного расширения (сжатия) и сдвига на первом прямолинейном участке:

$$K^I = \frac{1}{3} \cdot K_0 = const; G^I = G_0 = const. \quad (9)$$

На втором прямолинейном участке диаграмм объёмного и сдвигового деформирования

$$\sigma - \sigma_1 = K_1 \cdot (\varepsilon - \varepsilon_1); T - T_1 = G_1 \cdot (\Gamma - \Gamma_1). \quad (10)$$

Выразим в формулах (10) деформации через напряжения:

$$\varepsilon = \frac{1}{K_1} \cdot \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma} + \frac{K_1 \cdot \varepsilon_1}{\sigma} \right) \cdot \sigma; \Gamma = \frac{1}{G_1} \cdot \left(1 - \frac{T_1}{T} + \frac{G_1 \cdot \Gamma_1}{T} \right) \cdot T. \quad (11)$$

Учитывая формулы (7), получаем выражения для модулей объёмного расширения (сжатия) и сдвига на втором прямолинейном участке:

$$K^{II} = \frac{\sigma \cdot K_1}{3 \cdot (\sigma - \sigma_1 + \varepsilon_1 \cdot K_1)} = K^{II}(\sigma); G^{II} = \frac{T \cdot G_1}{T - T_1 + \Gamma_1 \cdot G_1} = G^{II}(T). \quad (12)$$

В соответствии с диаграммами объёмного и сдвигового деформирования (рис. 1), напряжения и деформации в балке-стенки возможны для следующих четырёх случаев значений модулей объёмного расширения (сжатия) K и сдвига G :

$$\text{Случай I: } K = K^I = const; G = G^I = const. \quad (13)$$

$$\text{Случай II: } K = K'' = K''(\sigma); G = G' = \text{const.} \quad (14)$$

$$\text{Случай III: } K = K' = \text{const}; G = G'' = G''(T). \quad (15)$$

$$\text{Случай IV: } K = K'' = K''(\sigma); G = G'' = G''(T). \quad (16)$$

Разрешающая система дифференциальных уравнений

Разрешающая система дифференциальных уравнений при решении задачи обобщённого плоского напряжённого состояния в напряжениях представляет собой совокупность дифференциальных уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + F_x = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + F_y = 0 \quad (17)$$

и уравнения неразрывности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (18)$$

Подстановка физических соотношений (5) в уравнение сплошности (18) для случая, когда модули объёмного расширения (сжатия) и сдвига являются функциями инвариантов тензора напряжений:

$$K = K(\sigma, T); G = G(\sigma, T) \quad (19)$$

выполнена в работе [20]. При этом получен физически нелинейный аналог уравнения Леви:

$$\begin{aligned} \nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = & \left(\frac{1}{G^2} \cdot \frac{\partial G}{\partial x} - 2 \cdot \frac{\partial b}{\partial x} \right) \cdot \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \left(\frac{1}{G^2} \cdot \frac{\partial G}{\partial y} - 2 \cdot \frac{\partial b}{\partial y} \right) \cdot \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - \\ & - 2 \cdot \frac{\partial a}{\partial y} \cdot \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial y} - 2 \cdot \frac{\partial a}{\partial x} \cdot \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial x} - \left(\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} \right) \cdot \sigma_{xx} - \\ & - \left(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} \right) \cdot \sigma_{yy} - \frac{1}{G^2} \cdot \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} - \frac{2}{G} \cdot \frac{\partial G}{\partial x} \cdot \frac{\partial G}{\partial y} \right) \cdot \sigma_{xy}. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – гармонический оператор.

Правая часть уравнения (20) существенно зависит от вида функций (19).

Случай I, зависимости (13). Правая часть уравнения (20) обращается в нуль, и, следовательно, уравнение (20) приводится к виду

$$\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0, \quad (21)$$

то есть совпадает с уравнением Леви линейной теории упругости.

Случай II, зависимости (14). Коэффициенты при производных от напряжений по координатам в правой части уравнения (20) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x} &= \frac{\partial a}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x}; \quad \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial a}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial y}; \quad \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x}; \quad \frac{\partial b}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial y}; \\ \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 a}{\partial \sigma^2} \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial a}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 a}{\partial \sigma^2} \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial a}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 b}{\partial \sigma^2} \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial b}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 b}{\partial \sigma^2} \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial b}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial G^I}{\partial x} &= 0; \quad \frac{\partial G^I}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 G^I}{\partial x \partial y} = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

причём,

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial \sigma} &= -\frac{1}{3 \cdot K^2} \cdot \frac{\partial K''}{\partial \sigma}; \quad \frac{\partial a}{\partial T} = 0; \quad \frac{\partial b}{\partial \sigma} = -\frac{1}{3 \cdot K^2} \cdot \frac{\partial K''}{\partial \sigma}; \quad \frac{\partial b}{\partial T} = 0; \\ \frac{\partial^2 a}{\partial \sigma^2} &= \frac{2}{9 \cdot K^3} \cdot \left(\frac{\partial K''}{\partial \sigma}\right)^2 - \frac{1}{9 \cdot K^2} \cdot \frac{\partial^2 K''}{\partial \sigma^2}; \quad \frac{\partial^2 a}{\partial T^2} = 0; \\ \frac{\partial^2 b}{\partial \sigma^2} &= \frac{2}{9 \cdot K^3} \cdot \left(\frac{\partial K''}{\partial \sigma}\right)^2 - \frac{1}{9 \cdot K^2} \cdot \frac{\partial^2 K''}{\partial \sigma^2}; \quad \frac{\partial^2 b}{\partial T^2} = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Случай III, зависимости (15). Коэффициенты при производных от напряжений по координатам в правой части уравнения (20) получает вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x} &= \frac{\partial a}{\partial \Gamma} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial x}; \quad \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial a}{\partial \Gamma} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial y}; \quad \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial \Gamma} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial x}; \quad \frac{\partial b}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial \Gamma} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial y}; \\ \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 a}{\partial \Gamma^2} \cdot \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial a}{\partial \Gamma} \cdot \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 a}{\partial \Gamma^2} \cdot \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial a}{\partial \Gamma} \cdot \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 b}{\partial \Gamma^2} \cdot \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial b}{\partial \Gamma} \cdot \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 b}{\partial \Gamma^2} \cdot \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial b}{\partial \Gamma} \cdot \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial G''}{\partial x} &= \frac{\partial G''}{\partial \Gamma} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial x}; \quad \frac{\partial G''}{\partial y} = \frac{\partial G''}{\partial \Gamma} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial y}; \quad \frac{\partial^2 G^I}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 G''}{\partial \Gamma^2} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial y} + \frac{\partial G''}{\partial \Gamma} \cdot \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (24)$$

причём,

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial \sigma} = 0; \frac{\partial b}{\partial \sigma} = 0; \frac{\partial^2 a}{\partial \sigma^2} = 0; \frac{\partial^2 b}{\partial \sigma^2} = 0; \\ \frac{\partial a}{\partial \Gamma} = -\frac{1}{3 \cdot G^{II2}} \cdot \frac{\partial G^{II}}{\partial \Gamma}; \frac{\partial^2 a}{\partial \Gamma^2} = -\frac{1}{3 \cdot G^{II3}} \left[G^{II} \cdot \frac{\partial^2 G^{II}}{\partial \Gamma^2} - 2 \cdot \left(\frac{\partial G^{II}}{\partial \Gamma} \right)^2 \right]; \\ \frac{\partial b}{\partial \Gamma} = \frac{1}{6 \cdot G^{II2}} \cdot \frac{\partial G^{II}}{\partial \Gamma}; \frac{\partial^2 b}{\partial \Gamma^2} = \frac{1}{6 \cdot G^{II3}} \left[G^{II} \cdot \frac{\partial^2 G^{II}}{\partial \Gamma^2} - 2 \cdot \left(\frac{\partial G^{II}}{\partial \Gamma} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Случай IV, зависимости (16). Коэффициенты при производных от напряжений по координатам в правой части уравнения (20) имеют вид [21]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial \Gamma} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial x}; \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial a}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial \Gamma} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial y}; \\ \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial \Gamma} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial x}; \frac{\partial b}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial \Gamma} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial y}; \\ \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 a}{\partial \sigma^2} \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial a}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 a}{\partial \sigma \partial \Gamma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + \frac{\partial^2 a}{\partial \Gamma^2} \cdot \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial a}{\partial \Gamma} \cdot \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 a}{\partial \sigma^2} \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial a}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 a}{\partial \sigma \partial \Gamma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial y} + \frac{\partial^2 a}{\partial \Gamma^2} \cdot \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial a}{\partial \Gamma} \cdot \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial^2 b}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 b}{\partial \sigma^2} \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial b}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 b}{\partial \sigma \partial \Gamma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial x} + \frac{\partial^2 b}{\partial \Gamma^2} \cdot \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial b}{\partial \Gamma} \cdot \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x^2}; \\ \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 b}{\partial \sigma^2} \cdot \left(\frac{\partial \sigma}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial b}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 b}{\partial \sigma \partial \Gamma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial y} + \frac{\partial^2 b}{\partial \Gamma^2} \cdot \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial b}{\partial \Gamma} \cdot \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial G^{II}}{\partial x} = \frac{\partial G^{II}}{\partial \Gamma} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial x}; \frac{\partial G^{II}}{\partial y} = \frac{\partial G^{II}}{\partial \Gamma} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial y}; \frac{\partial^2 G^{II}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 G^{II}}{\partial \Gamma^2} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial y} + \frac{\partial G^{II}}{\partial \Gamma} \cdot \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial x \partial y}; \end{aligned} \quad (26)$$

причём,

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial \sigma} = -\frac{1}{3 \cdot K^2} \cdot \frac{\partial K^{II}}{\partial \sigma}; \frac{\partial a}{\partial \Gamma} = -\frac{1}{3 \cdot G^2} \cdot \frac{\partial G^{II}}{\partial \Gamma}; \frac{\partial b}{\partial \sigma} = -\frac{1}{9 \cdot K^2} \cdot \frac{\partial K^{II}}{\partial \sigma}; \\ \frac{\partial b}{\partial \Gamma} = \frac{1}{6 \cdot G^2} \cdot \frac{\partial G^{II}}{\partial \Gamma}; \\ \frac{\partial^2 a}{\partial \sigma^2} = \frac{2}{9 \cdot K^3} \cdot \left(\frac{\partial K^{II}}{\partial \sigma} \right)^2 - \frac{1}{9 \cdot K^2} \cdot \frac{\partial^2 K^{II}}{\partial \sigma^2}; \frac{\partial^2 a}{\partial \Gamma^2} = \frac{2}{3} \left(\frac{\partial G^{II}}{\partial \Gamma} \right)^2 - \frac{1}{3 \cdot G^2} \cdot \frac{\partial^2 G^{II}}{\partial \Gamma^2}; \\ \frac{\partial^2 b}{\partial \sigma^2} = \frac{2}{9 \cdot K^3} \cdot \left(\frac{\partial K^{II}}{\partial \sigma} \right)^2 - \frac{1}{9 \cdot K^2} \cdot \frac{\partial^2 K^{II}}{\partial \sigma^2}; \frac{\partial^2 b}{\partial \Gamma^2} = \frac{1}{3 \cdot G^3} \cdot \left(\frac{\partial G^{II}}{\partial \Gamma} \right)^2 + \frac{1}{6 \cdot G^2} \cdot \frac{\partial^2 G^{II}}{\partial \Gamma^2}. \end{aligned} \quad (27)$$

В формулах (23) и (27)

$$\frac{\partial K''}{\partial \sigma} = \frac{K_1 \cdot (\varepsilon_1 - \sigma_1 \cdot K_1)}{3 \cdot (\sigma - \sigma_1 + K_1 \cdot \varepsilon_1)^2}; \quad \frac{\partial^2 K''}{\partial \sigma^2} = \frac{2 \cdot K_1 \cdot (\varepsilon_1 \cdot K_1 - \sigma_1)}{3 \cdot (\sigma - \sigma_1 + K_1 \cdot \varepsilon_1)^3}. \quad (28)$$

В формулах (25) и (27)

$$\frac{\partial G''}{\partial T} = \frac{G_1 \cdot (\Gamma_1 G_1 - T_1)}{(T - T_1 + \Gamma_1 G_1)^2}; \quad \frac{\partial^2 G''}{\partial T^2} = \frac{2 \cdot (\Gamma_1 G_1 - T_1)}{(T - T_1 + \Gamma_1 G_1)^3}. \quad (29)$$

Выражения для частных производных от первого инварианта тензора напряжений и интенсивности касательных напряжений по пространственным координатам приведены в работе [18] и здесь не показаны.

Алгоритм расчёта балки-стенки

Построение алгоритма для определения напряжённо-деформированного состояния балки-стенки для разрывных функций объёмного и сдвигового деформирования, будем выполнять основываясь на выявлении возможного положения плоских кривых излома объёмных и сдвиговых деформаций.

Пусть балка-стенка нагружена произвольной нагрузкой $q(x, y)$, лежащей в её плоскости, вообще говоря, по всем четырём сторонам. Тогда:

1. Основываясь на первом прямолинейном участке диаграмм объёмного и сдвигового деформирования (рис. 1), то есть принимая $K = K_1$ и $G = G^1$ определяем напряжения $\sigma_{xx}(x, y)$, $\sigma_{yy}(x, y)$, $\sigma_{xy}(x, y)$ в каждой точке балки-стенки, используя уравнения равновесия (17) и уравнение сплошности (21). При этом можно воспользоваться любым известным методом: методом конечных разностей, методом конечных элементов, и так далее. Для определения деформаций воспользуемся физическими соотношениями (5) с коэффициентами (6).

2. Вычисляем первый инвариант тензора напряжений $\sigma(x, y)$ (2) и интенсивность касательных напряжений $T(x, y)$ (3).

3. Из условий $\sigma(x_1, y_1) = \sigma_1$; $T(x_1^T, y_1^T) = T_1$ находим уравнения кривых $f_\sigma(x_1^\sigma, y_1^\sigma) = 0$ и $f_T(x_1^T, y_1^T) = 0$.

Замечание: плоскую кривую $f_{\sigma}(x_1^{\sigma}, y_1^{\sigma}) = 0$ будем называть кривой излома объёмных деформаций; плоскую кривую $f_T(x_1^T, y_1^T) = 0$ будем называть кривой излома сдвиговых деформаций.

4. Если кривые $f_{\sigma}(x_1^{\sigma}, y_1^{\sigma}) = 0$ и $f_T(x_1^T, y_1^T) = 0$ проходят за пределами балки-стенки (рис. 2), то задача решена.

5. Кривые излома объёмных и сдвиговых деформаций могут пересекать плоскость балки-стенки. При этом возможны 24 случая взаимного расположения кривых объёмного и сдвигового деформирования и плоскости балки-стенки, а также значений модулей объёмного K и сдвигового G деформирования. Следует иметь в виду, что при переходе через кривую $f_{\sigma}(x_1^{\sigma}, y_1^{\sigma}) = 0$ модуль объёмного деформирования меняет верхний индекс (с I на II и наоборот); при переходе через кривую $f_T(x_1^T, y_1^T) = 0$ модуль сдвигового деформирования меняет верхний индекс (с I на II и наоборот).

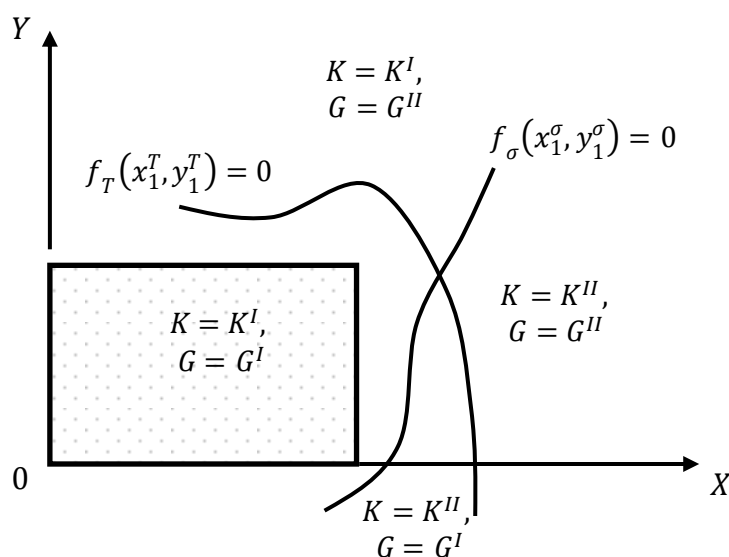


Рисунок 2 – Балка-стенка. Кривые излома объёмных и сдвиговых деформаций проходят за пределами балки-стенки

Полный алгоритм расчёта балки-стенки для разрывных функций объёмного и сдвигового деформирования будет изложен во второй части этой статьи (учитывая ограниченность объёма публикации).

Заключение и выводы

1. Построены разрешающие уравнения в напряжениях для решения плоской задачи физически нелинейной теории упругости (случай обобщённого плоского напряжённого состояния) применительно к расчёту балок-стенок при билинейной аппроксимации замыкающих уравнений физических соотношений.

2. Показано, что уравнение неразрывности деформаций в терминах напряжений в физически нелинейной теории упругости является неоднородным, то есть его правая часть не равна нулю.

3. На первом прямолинейном участке аппроксимированных диаграмм объёмного и сдвигового деформирования уравнение неразрывности деформаций, записанное в напряжениях, совпадает с уравнением Леви линейной теории упругости.

4. Полученные расчётные соотношения и алгоритм расчёта балок-стенок могут найти применение при решении плоской задачи – обобщённого плоского напряжённого состояния - физически нелинейной теории упругости при условии аппроксимации замыкающих уравнений физических соотношений билинейными функциями.

Библиографический список

1. Матросов А.В. Численно-аналитический расчет балок-стенок на линейно-упругом основании // Журнал университета водных коммуникаций. 2011. № 2. С. 14-21.

2. Жердева С.А., Дудина И.В., Сорока М.Д. Компьютерное моделирование напряженно-деформированного состояния несущих стеновых панелей // Труды Братского государственного университета. Серия: Естественные и инженерные науки - развитию регионов Сибири. 2011. Т. 2. С. 159-163.

3. Шутов В.А., Миренков В.Е., Полуэктов В.А. К вопросу расчета балки-стенки // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2013. № 2-3 (650-651). С. 116-120.

4. Янковский А.П. Моделирование упругопластической динамики продольно-армированных балок-стенок на основе явного по времени метода центральных разностей // Прикладная математика и механика. 2017. Т. 81. № 1. С. 54-77.

5. Янковский А.П. Уточненная модель изгибного деформирования слоистых балок-стенок регулярной структуры из нелинейно-упругих материалов // Конструкции из композиционных материалов. 2016. № 1 (141). С. 18-29.

6. Карпенко С.Н., Петров А.Н. Модель деформирования железобетона в приращениях и ее приложение к расчету балок-стенок // Вестник Волгоградского государственного архитектурно-строительного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2013. № 31-2 (50). С. 362-367.

7. Петров А.Н., Воронин З.А., Евсеева А.В. Физически-нелинейный расчет железобетонных балок-стенок с трещинами методом конечных элементов // Ученые записки Петрозаводского государственного университета. 2008. № 1 (90). С. 31-35.

8. Карпенко С.Н., Петров А.Н., Воронин З.А., Мирохин М.Л. Инкрементальная модель и расчет железобетонных балок- стенок с трещинами // Вестник гражданских инженеров. 2011. № 2 (27). С. 51-56.

9. Карпенко С.Н., Петров А.Н., Воронин З.А. Малоитерационный подход к физически нелинейному расчету железобетонных балок-стенок // Строительная механика и расчет сооружений. 2010. № 6 (233). С. 36-43.

10. Акимов П.А., Негрозов О.А. Об одном примере расчета балки-стенки на основе совместного применения метода конечных элементов и дискретно-континуального метода конечных элементов // Международный журнал по расчету гражданских и строительных конструкций. 2015. Т. 11. № 4. С. 14-28.

11. Кургузов В.Д. Численное моделирование напряженного состояния балки-стенки // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2014. № 7 (667). С. 94-102.
12. Bashir H. Osman, Zhongfan Chen. Experimental Studies on the Behaviors of New Energy-Saving Concrete Self-Insulating Load-Bearing Block Wall under Low-Cycle Cyclic Loading // Advances in Materials Science and Engineering. Vol. 2018. DOI <https://doi.org/10.1155/2018/4214532>.
13. Sahar Jabbar Alserai, Wissam Kadhim Alsaraj, Layth Abdulbari Aljaberi. Bearing load capacity of geopolymer concrete thin wall panels under eccentric compression // Journal of Engineering and Sustainable Development. 2020. Vol. 24, no. 01. pp. 1 – 14. DOI <https://doi.org/10.31272/jeasd.24.1.1>.
14. Xiaobin Hu, Qinwang Lu, Zihao Xu, Shen Zhang. Seismic Performance of Reinforced Concrete Coupled Walls with Segmental Coupling Beams // Advances in Civil Engineering. 2019. Vol. 2019. DOI <https://doi.org/10.1155/2019/1520375>.
15. Yun Chen, Junzuo Li, Zheng Lu. Experimental Study and Numerical Simulation on Hybrid Coupled Shear Wall with Replaceable Coupling Beams // Sustainability. 2019. Vol. 11, no. 3. p. 867. DOI <https://doi.org/10.3390/su11030867>.
16. Lusine Gurgen Karapetyan, Tigran Vardan Ter-Poghosyan. Study on the New Method of Constructing Shear Walls in Multi-Storey Buildings With Site Cast Reinforced Concrete Frame System // Journal of Architectural and Engineering Research. 2021. Vol. 1, no. 2. DOI <https://doi.org/10.54338/27382656-2021.1-11>.
17. Houshang Dabbagh, Rizan Chobdarian. Evaluation of Reinforced Concrete Structural Members under Uniform Loads Using Truss Model // Journal of Structural and Construction Engineering. 2016. Vol. 2, no. 4. pp. 31 – 47.
18. Бакушев С.В. Дифференциальные уравнения и краевые задачи механики деформируемого твёрдого тела. М.: ЛЕНАНД, 2020. 304 с.
19. Бакушев С.В. Аппроксимация диаграмм деформирования билинейными функциями // Строительная механика и расчёт сооружений. 2019. №2 (283). С. 2-11.

20. Бакушев С.В. Плоская задача физически нелинейной теории упругости – решение в напряжениях // Региональная архитектура и строительство. 2014. №1(18). С. 82-88.

21. Бакушев С.В. Разрешающие дифференциальные уравнения физически нелинейной теории упругости в напряжениях для обобщённого плоского напряжённого состояния [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2023. №17. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: <http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no-9-aprel-2019/stroitel'naya-mehanika/9.4/view>