

УДК 624.041

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТОНКОСТЕННОГО Z-ОБРАЗНОГО СТЕРЖНЯ СО СТУПЕНЧАТЫМ ЗАКРУГЛЕНИЕМ, С УСИЛЕННОЙ ОТБОРТОВКОЙ И С УСИЛЕННОЙ ПОЛКОЙ, С УЧЕТОМ ИЗГОТОВЛЕНИЯ**

*Волков Владимир Павлович,*

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,  
г. Пенза,*

*кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика».*

**Аннотация**

Статья посвящена определению геометрических характеристик гнутого тонкостенного стержня Z-образного профиля со ступенчатым закруглением полки с усиленной отбортовкой, с усиленной толщиной полки, параллельной одной из главных центральных осей сечения, с учетом его изготовления при расчете его на растяжение-сжатие и изгиб с кручением. Приведены расчетные формулы для определения относительных значений длины контура, главных осевых моментов инерции и главных осевых моментов сопротивления, главных секториальных координат.

**Ключевые слова:** гнутый тонкостенный стержень, Z-образный профиль, главные центральные оси сечения, главные осевые моменты инерции, главные осевые моменты сопротивления, главные секториальные координаты.

**GEOMETRIC CHARACTERISTICS OF A THIN-WALLED Z-SHAPED ROD WITH A STEPPED ROUNDING, WITH REINFORCED FLANGING AND WITH A REINFORCED SHELF, TAKING INTO ACCOUNT THE MANUFACTURE**

*Volkov Vladimir Pavlovich,*

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,*

*Candidate of Sciences, Associate Professor of the department "Mechanics".*

## Abstract

Article is devoted to definition of the geometric characteristics of a buckler thin-walled rod Z-shaped profile with reinforced curving and with reinforced flanging, parallel one main central axis section, with manufacture for calculation this on tension-stress, curve, turn. To deduce a formula of calculation dimensions length of contours, main axes moments of inertia and main axes moments of resistance, main sector coordinates.

**Keywords:** buckler thin-walled rod, Z-shaped profile, the main central axes section, main axes moments of inertia, main axes moments of resistance, main sector coordinates.

Условные обозначения (рис.1):

$XU$  – главные центральные оси сечения;

$B = 2 \cdot b$  – габаритная ширина срединной линии профиля сечения;

$H = 2 \cdot h$  – габаритная высота срединной линии профиля сечения;

$\delta \ll h, b$  - постоянная толщина срединной линии профиля сечения;

$\delta_s \ll h, b$  - толщина усиленной отбортовки  $s$ ;

$\delta_n \ll h, b$  - толщина усиленной полки;

$\delta_{r1} \ll h, b$  - толщина усиленной полки;

$L$  – полная длина срединной линии профиля сечения;

$r$  – радиус закругления срединной линии профиля сечения станком;

$r_1$  - радиус закругления срединной линии полки с отбортовкой;

$R$  – наибольший радиус закругления срединной линии профиля сечения;

$\gamma$  - угол между наклонной стенкой профиля и осью  $X$ ;

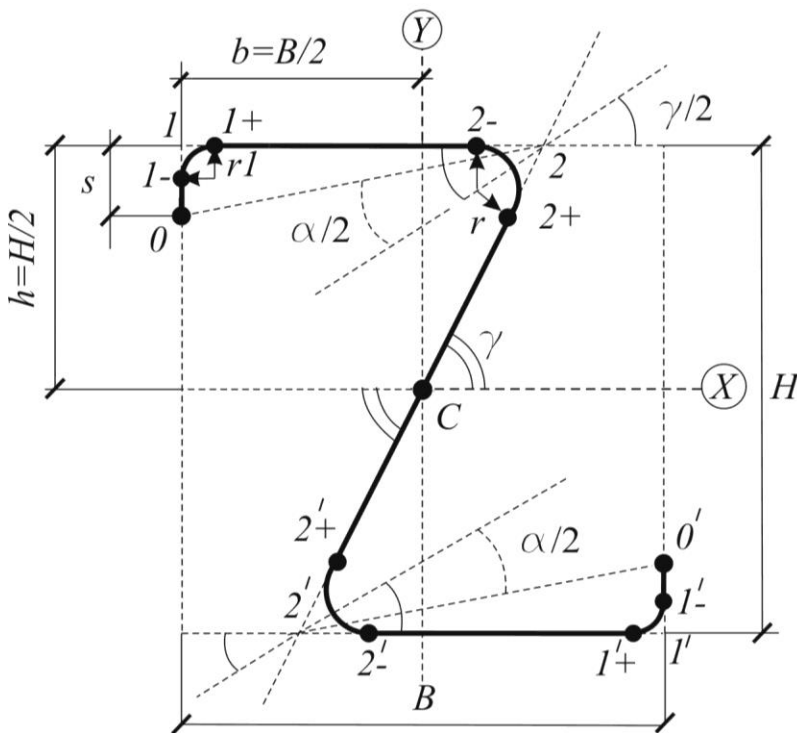
$b_h = \frac{b}{h} = \frac{B}{H}$  - относительная ширина профиля сечения;

$s_h = \frac{s}{h}$  - относительная длина отбортовки;

$r_h = \frac{r}{h}$  - относительный радиус закругления профиля сечения;

$r_{1h} = \frac{r_1}{h}$  - относительный радиус закругления отбортовки.

В статье рассматривается задача определения геометрических размеров и геометрических характеристик сечения гнутого тонкостенного стержня Z-образного сечения толщины  $\delta$  с усиленной толщиной закругления полки  $\delta_{r1}$  с отбортовки  $s$  с усиленной толщиной  $\delta_s$ , отбортовки  $s$ , с усиленной толщиной полки  $\delta_n$ , отбортовки параллельной главной центральной оси  $X$ , и с закруглением  $r$  и  $r_1$  (рис. 1), т.е. определяется относительная ширина сечения  $b_h$ , при заданном значении углов  $\alpha$  и  $\gamma$  и относительных величин  $r_h$ ,  $r_{1h}$ ,  $s_h$ , когда  $XU$  – главные центральные оси сечения.



Дано:  $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ ;

$0 < \alpha < \gamma$ ;

$0 \leq r_h \leq \frac{\cos \gamma}{1 + \cos \gamma}$ ;

$0 \leq r_{1h} \leq \frac{\cos \gamma}{1 + \cos \gamma}$

$\frac{\delta_s}{\delta}, \frac{\delta_n}{\delta}, \frac{\delta_{r1}}{\delta}$

Найти  $b_h$  - ?

где

$$s_h = \left( b_h + \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} - \frac{r_h}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} \right) \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma - \alpha}{2}$$

Рисунок 1 – C - центр симметрии

Частные случаи, когда полка тонкостенного Z-образного стержня постоянной толщины  $\delta$  параллельна главной центральной оси, рассмотрены:

- без отбортовки и без закругления, т.е. при  $\alpha = \gamma$ ,  $s = 0$ ,  $r = 0$  в [1];

- без отбортовки, но с учетом закругления  $r$ , т.е. при  $\alpha = \gamma$ ,  $s = 0$  в [2], [3];

- с отбортовкой  $s$  и без закругления для сечения, равноудаленного от оси

$Y$ , когда  $b = \frac{h}{\operatorname{tg}\gamma}$ , т.е. при  $r = 0$  в [4]. Причём, при  $s \leq h$  задача имеет решение

при  $\gamma \geq \arcsin \frac{2}{3} \approx 0,73$ , если  $\gamma \geq 0,7522$ , то  $\alpha \geq 0$ ,  $s \leq h \cdot \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg} \gamma}$ ;

- с отбортовкой  $s$  и с закруглением  $r$  для сечения, равноудаленного от оси

$Y$ , когда  $b = \frac{h}{\operatorname{tg}\gamma}$ , в [5];

- с отбортовкой  $s$ , но без закругления, т.е. при,  $r = 0$  в [6];

- с отбортовкой  $s$  и с закруглением  $r$ , т.е. при  $r_1 = 0$ , в [7].

Случай, когда усиленная полка тонкостенного Z-образного стержня *толщиной*  $\delta_n$  параллельна главной центральной оси и с толщиной стенки  $\delta$ , рассмотрен без учета отбортовки  $s$  и без закругления  $r$ , т.е. при  $\alpha = \gamma$ ,  $s = 0$ ,  $r = 0$  в [8].

Случай, когда усиленная отбортовка  $s$  *толщиной*  $\delta_s$  тонкостенного Z-образного стержня *толщиной*  $\delta$  с полкой параллельной главной центральной оси и с учетом закругления  $r$ , т.е. при  $r_1 = 0$ , рассмотрен в [9].

Случай, когда усиленная отбортовка  $s$  *толщиной*  $\delta_s$  тонкостенного Z-образного стержня *толщиной*  $\delta$ , с усиленной полкой *толщиной*  $\delta_n$ , параллельной главной центральной оси и с учетом закругления  $r$ , т.е. при  $r_1 = 0$ , рассмотрен в [10].

Итак, учитывая центральную симметрию, рассмотрим верхнюю половину сечения между характерными точками  $\{0, 1-, 1+, 2-, 2+, C\}$  (рис.2), причём, центр тяжести, центр изгиба или центр кручения всего сечения совпадают с центром симметрии, т.е. с точкой  $C$  (рис.2).

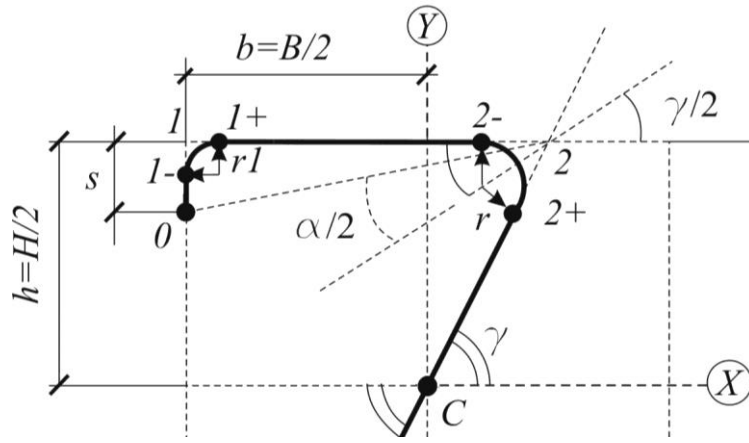


Рисунок 2 - Верхняя половина сечения.  $C$  - центр симметрии

Декартовы координаты  $x$ ,  $y$  характерных точек и длины соответствующих участков  $l$  (рис.2):

$$x_{2-} = \frac{h}{\operatorname{tg} \gamma} - \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}, \quad y_{2-} = h, \quad \beta = \pi - \gamma,$$

$$x_{2+} = x_{2-} + r \cdot \sin \gamma, \quad y_{2+} = h - r - r \cdot \cos \gamma, \quad l_{C2+} = \frac{h}{\sin \gamma} - \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}},$$

$$x_0 = -b, \quad y_0 = h - s, \quad l_{01-} = s - r_1,$$

$$x_{1-} = -b, \quad y_{1-} = h - r_1, \quad l_{1+2-} = b - r_1 + x_{2-},$$

$$x_{1+} = -b + r_1, \quad y_{1+} = h, \quad l_{C1+} = \sqrt{x_{1+}^2 + y_{1+}^2}.$$

Центральные оси  $XY$  (рис.2) являются главными [11], если

$$I_{XY} = \int_0^{\frac{L}{2}} \delta(s) \cdot x(s) \cdot y(s) \cdot ds \Rightarrow 0$$

$$\left( \frac{\delta_s}{\delta} \right) \cdot s - r_1 \cdot b \cdot \left( h - \frac{s + r_1}{2} \right) + \left( \frac{\delta_n}{\delta} \right) \cdot b - r_1^2 \cdot \frac{h}{2} +$$

$$+ \left( \frac{\delta_{r1}}{\delta} \right) \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (b - r_1 + r_1 \cdot \sin \varphi) \cdot (h - r_1 + r_1 \cdot \cos \varphi) \cdot r_1 \cdot d\varphi =$$

$$= \left( \frac{\delta_n}{\delta} \right) \cdot \frac{x_{2-}^2 \cdot y_{2-}}{2} + \frac{l_{C2+} \cdot x_{2+} \cdot y_{2+}}{3} + \int_0^{\beta} (x_{2-} + r \cdot \sin \varphi) \cdot (h - r + r \cdot \cos \varphi) \cdot r \cdot d\varphi,$$

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\delta_s}{\delta} \right) \cdot \left( s - r_1 \cdot b \cdot h - \frac{b}{2} \cdot s^2 - r_1^2 \right) + \left( \frac{\delta_n}{\delta} \right) \cdot b - r_1^2 \cdot \frac{h}{2} + \\
& + \left( \frac{\delta_{r1}}{\delta} \right) \cdot r_1 \cdot \left( b - r_1 \cdot h - r_1 \cdot \frac{\pi}{2} + r_1 \cdot b - r_1 + r_1 \cdot h - r_1 + r_1^2 \cdot \frac{1}{2} \right) = \\
& = \left( \frac{\delta_n}{\delta} \right) \cdot \frac{x_{2-}^2 \cdot y_{2-}}{2} + \frac{l_{C2+} \cdot x_{2+} \cdot y_{2+}}{3} + \\
& + r \cdot \left( x_{2-} \cdot h - r \cdot \beta + x_{2-} \cdot r \cdot \sin \beta + r \cdot h - r \cdot (-\cos \beta) \right) r^2 \frac{\sin^2 \beta}{2},
\end{aligned}$$

где, вводя обозначения

$$\begin{aligned}
\theta &= \tan \frac{\gamma - \alpha}{2}, \quad x_h = \frac{1}{\tan \gamma} - \frac{r_h}{\tan \frac{\gamma}{2}}, \quad \theta x_h = \theta \cdot x_h, \\
\delta_{s\delta} &= \frac{\delta_s}{\delta}, \quad \delta_{n\delta} = \frac{\delta_n}{\delta}, \quad \delta_{r1\delta} = \frac{\delta_{r1}}{\delta}.
\end{aligned}$$

относительное значение  $b_h > 0$  найдем из решения квадратного уравнения:

$$\begin{aligned}
& b_h^3 \cdot \theta^2 \cdot \delta_{s\delta} + b_h^2 \cdot \theta \cdot \theta_{xh} - 1 \cdot 2 \cdot \delta_{s\delta} - \delta_{n\delta} + \\
& + b_h \cdot \delta_{s\delta} \cdot \theta_{xh} - r_{1h} \cdot \theta_{xh} + r_{1h} - 2 + \delta_{r1\delta} \cdot r_{1h} \cdot 2 \cdot \delta_{n\delta} - 1 - r_{1h} \cdot \pi - 2 \cdot r_{1h} + \\
& + r_h \cdot \left( x_h \cdot \beta + r_h \cdot 1 + \cos \gamma \cdot 1 - r_h + \left( x_h + \frac{r_h \cdot \sin \gamma}{2} \right) \cdot r_h \cdot \sin \gamma \right) + \\
& + \delta_{n\delta} \cdot x_h^2 + \frac{2}{3} \cdot \left( x_h + \frac{r_h}{\sin \gamma} \right) \cdot 1 - r_h \cdot 1 + \cos \gamma \cdot \left( \frac{1}{\sin \gamma} - \frac{r_h}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} \right) = 0
\end{aligned} \tag{1}$$

Относительные координаты характерных точек и длин участков:

$$\begin{aligned}
x_{1+h} &= \frac{x_{1+}}{h}, \quad x_{2+h} = \frac{x_{2+}}{h}, \quad x_h = \frac{x_{2-}}{h} \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} - \frac{r_h}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}; \\
y_{0h} &= \frac{y_0}{h}, \quad y_{1-h} = \frac{y_{1-}}{h}, \quad y_{2+h} = \frac{y_{2+}}{h}; \\
l_{01-h} &= \frac{l_{01-}}{h}, \quad l_{1+2-h} = \frac{l_{1+2-}}{h}, \quad l_{C2+h} = \frac{l_{C2+}}{h}; \\
\gamma_1 &= \operatorname{arctg} \frac{b - r_1}{h} = \operatorname{arctg} b_h - r_{1h}.
\end{aligned}$$

Статические моменты отсеченной части относительно оси x:

$$S_x^{\text{отс}} = \int_{A^{\text{отс}}} y \cdot dA = \delta \cdot \int_{L^{\text{отс}}} y \cdot s \cdot ds = \delta \cdot S_{x,i}^{\text{отс}} = \delta \cdot h^2 \cdot S_{x,Ch}^{\text{отс}};$$

и их относительные значения  $S_{x,ih}^{\text{отс}} = \frac{S_{x,i}^{\text{отс}}}{h^2}$  для характерных точек:

$$S_{x,0h}^{\text{отс}} = 0;$$

$$S_{x,1-h}^{\text{отс}} = 0 + l_{01-h} \cdot \frac{y_{0h} + y_{1-h}}{2} \cdot \delta_{s\delta};$$

$$S_{x,1+h}^{\text{отс}} = S_{x,1-h}^{\text{отс}} + \left( y_{1-h} \cdot r_{1h} \cdot \frac{\pi}{2} + r_{1h}^2 \right) \cdot \delta_{r1\delta};$$

$$S_{x,2-h}^{\text{отс}} = S_{x,1+h}^{\text{отс}} + 1 \cdot l_{1+2-h} \cdot \delta_{n\delta};$$

$$S_{x,2+h}^{\text{отс}} = S_{x,2-h}^{\text{отс}} + 1 - r_h \cdot r_h \cdot \beta + r_h^2 \cdot \sin \beta;$$

$$S_{x,Ch}^{\text{отс}} = S_{x,2+h}^{\text{отс}} + l_{C2+h} \cdot \frac{y_{2+h}}{2}.$$

$$S_{x,0h}^{\text{отс}} = 0;$$

Эпюры главных центральных координат  $x(s)$  и  $y(s)$  на рис.3:

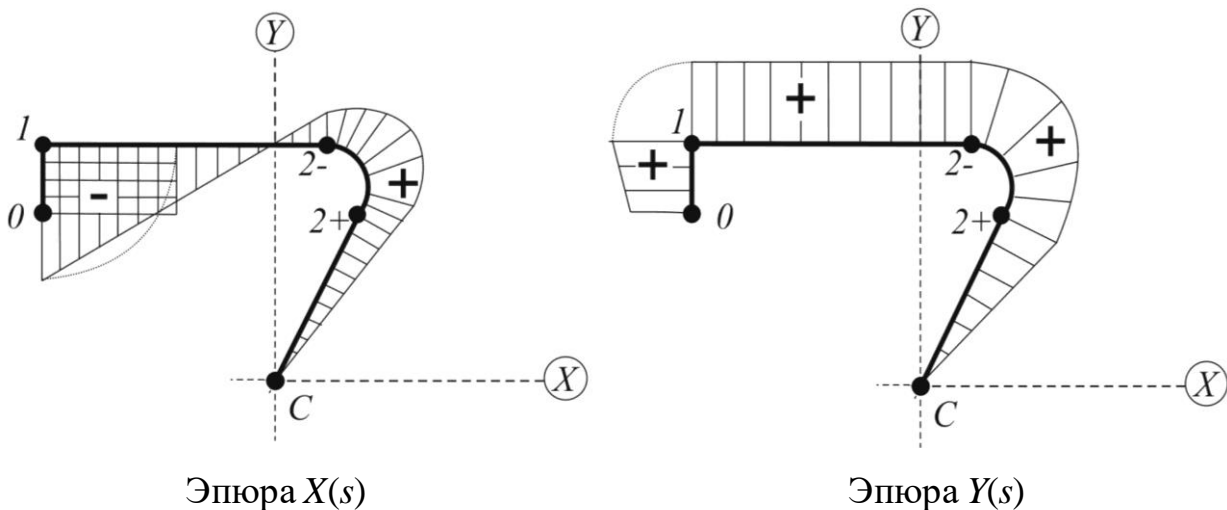


Рисунок 3 - C - центр симметрии

Относительная длина контура гнутого Z-образного профиля  $L/H$ :

$$l_h = \frac{L/2}{h} \Rightarrow s_h - r_{1h} + r_{1h} \cdot \frac{\pi}{2} + b_h + x_h + r_h \cdot \beta + l_{C2+h}, \quad (2)$$

где  $L/2 = s + b + r_1 \cdot \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) + x_{2-} + r \cdot \beta + l_{C2+}$ .

Относительная площадь гнутого Z-образного профиля  $A/(\delta \cdot H)$ :

$$A_{bh} = \frac{A}{\delta \cdot H} = \frac{A}{\delta \cdot 2 \cdot h} \Rightarrow \delta_{s\delta} \cdot l_{01-h} + \delta_{r1\delta} \cdot r_{1h} \cdot \frac{\pi}{2} + \delta_{n\delta} \cdot l_{1+2-h} + r_h \cdot \beta + l_{C2+h},$$

(3)

где  $A = 2 \cdot \delta \cdot \left( \left( \frac{\delta_s}{\delta} \right) \cdot s - r_1 + \left( \frac{\delta_{r1}}{\delta} \right) \cdot r_1 \cdot \frac{\pi}{2} + \left( \frac{\delta_n}{\delta} \right) \cdot b + x_{2-} + r \cdot \beta + l_{C2+} \right)$ .

Главные осевые моменты инерции (рис.3) определяются по формулам:

$$I_x = \int_A y^2(s) \cdot dA \Rightarrow 2 \cdot \int_{L/2} \delta(s) \cdot y^2(s) \cdot ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot \left( \left( \frac{\delta_s}{\delta} \right) \cdot \frac{l_{01-}}{3} \cdot y_0^2 + y_{1-}^2 + y_0 \cdot y_{1-} + \left( \frac{\delta_n}{\delta} \right) \cdot l_{1+2-} \cdot h^2 + \frac{l_{C2+}}{3} \cdot y_{2+}^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\delta_{r1}}{\delta} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (h - r_1 + r_1 \cdot \sin \varphi)^2 \cdot r_1 \cdot d\varphi + \int_0^{\beta} (h - r + r \cdot \cos \varphi)^2 \cdot r \cdot d\varphi \right)$$

$$I_x \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^3} \Rightarrow \delta_{s\delta} \cdot \frac{l_{01-h}}{3} \cdot y_{0h}^2 + y_{1-h}^2 + y_{0h} \cdot y_{1-h} + \delta_{n\delta} \cdot l_{1+2-h} + \frac{l_{C2+h}}{3} \cdot y_{2+h}^2 +$$

$$+ \delta_{r1} \cdot r_{1h} \cdot \left[ 1 - r_{1h}^2 \cdot \frac{\pi}{2} + 2 \cdot r_{1h} \cdot 1 - r_{1h} + r_{1h}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \right]$$

$$+ r_h \cdot \left[ 1 - r_h^2 \cdot \beta + 2 \cdot r_h \cdot 1 - r_h \cdot \sin \gamma + r_h^2 \cdot \frac{\beta - \sin \gamma \cdot \cos \gamma}{2} \right]$$

(4)

$$I_y = \int_A x^2(s) \cdot dA \Rightarrow 2 \cdot \int_{L/2} \delta(s) \cdot x^2(s) \cdot ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot \left( \left( \frac{\delta_s}{\delta} \right) \cdot l_{01-} \cdot b^2 + \left( \frac{\delta_n}{\delta} \right) \cdot \frac{l_{1+2-}}{3} \cdot x_{1+}^2 + x_{2-}^2 + x_{1+} \cdot x_{2-} + \frac{l_{C2+}}{3} \cdot x_{2+}^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\delta_{r1}}{\delta} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (b - r_1 + r_1 \cdot \cos \varphi)^2 \cdot r_1 \cdot d\varphi + \int_0^{\beta} (x_{2-} + r \cdot \sin \varphi)^2 \cdot r \cdot d\varphi \right),$$



$$\begin{aligned}
I_y \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^3} \Rightarrow & \delta_{s\delta} \cdot l_{01-h} \cdot b_h^2 + \delta_{n\delta} \cdot \frac{l_{1+2-h}}{3} \cdot x_{1+h}^2 + x_h^2 + x_{1+h} \cdot x_h + \frac{l_{C2+h}}{3} \cdot x_{2+h}^2 + \\
& + \delta_{r1\delta} \cdot r_{1h} \cdot \left[ b_h - r_{1h}^2 \cdot \frac{\pi}{2} + 2 \cdot r_{1h} \cdot b_h - r_{1h} + r_{1h}^2 \cdot \frac{\pi}{4} \right] + \\
& + r_h \cdot \left[ x_h^2 \cdot \beta + 2 \cdot r_h \cdot x_h \cdot 1 + \cos \gamma + r_h^2 \cdot \frac{\beta + \sin \gamma \cdot \cos \gamma}{2} \right].
\end{aligned} \tag{5}$$

Главные осевые моменты сопротивления определяются по формулам:

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} \Rightarrow \frac{I_x}{h},$$

$$W_x \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^2} \Rightarrow I_x \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^3}; \tag{6}$$

$$W_y = \frac{I_y}{x_{\max}} \Rightarrow \frac{I_y}{b},$$

$$W_y \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^2} \Rightarrow \frac{1}{b_h} \cdot I_y \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^3}. \tag{7}$$

Для нахождения главного секториального момента инерции

$I_\omega = \int_A \omega^2(s) \cdot dA$  введем секториальные координаты  $\omega$  (удвоенная площадь сектора, где полюс и начальная точка отсчета выбраны в точке C), которые

равны для характерных точек:

$$\omega_C = 0; \quad \omega_{2+} = 0;$$

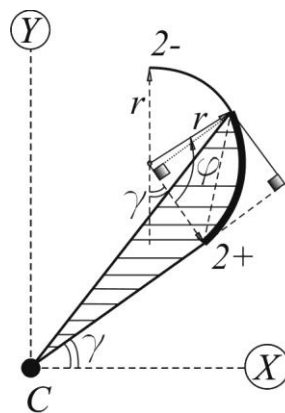


Рисунок 4 - Секториальная координата  $\omega(\varphi)$  на закруглении  $r$

$$\Delta\omega_{\varphi} = l_{C2+} \cdot r \cdot 1 - \cos\varphi + r^2 \cdot \varphi - \sin\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \beta,$$

$$\omega_{2-} = \omega_{2+} + l_{C2+} \cdot r \cdot 1 - \cos\beta + r^2 \cdot \beta - \sin\beta;$$

$$\omega_{1+} = \omega_{2-} + h \cdot l_{1+2-};$$

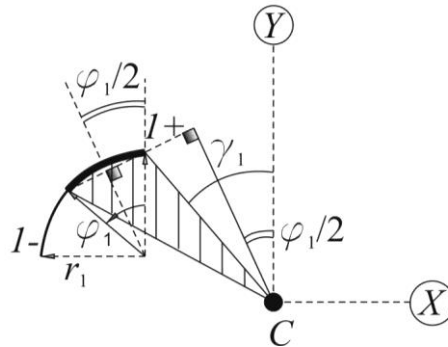


Рисунок 5 - Секториальная координата  $\omega(\varphi_1)$  на закруглении  $r_1$

$$\Delta\omega_{\varphi_1} = 2 \cdot r_1 \cdot \sin\frac{\varphi_1}{2} \cdot l_{C1+} \cdot \cos\left(\gamma_1 - \frac{\varphi_1}{2}\right) + r_1^2 \cdot \varphi_1 - \sin\varphi_1, \quad 0 \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\omega_{1-} = \omega_{1+} + l_{C1+} \cdot r_1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\left(\gamma_1 - \frac{\pi}{4}\right) + r_1^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1\right);$$

$$\omega_0 = \omega_{1-} + s - r_1 \cdot b;$$

Эпюра секториальных координат  $\omega(s)$  с полюсом и начальной точкой отсчета в  $C$  изображена на рис.6.

Относительные секториальные координаты  $\omega/h^2$  характерных точек:

$$\omega_{Ch} = 0; \quad \omega_{2+h} = 0;$$

$$\omega_{2-h} = l_{C2+h} \cdot r_h \cdot 1 - \cos\beta + r_h^2 \cdot \beta - \sin\beta; \quad \omega_{1+h} = \omega_{2-h} + l_{1+2-h};$$

$$\omega_{1-h} = \omega_{1+h} + l_{C1+h} \cdot r_{1h} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\left(\gamma_1 - \frac{\pi}{4}\right) + r_{1h}^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1\right);$$

$$\omega_{0h} = \omega_{1-h} + s_h - r_{1h} \cdot b_h$$

Для нахождения истинной начальной точки  $M_0$  вычислим секториальный статический момент половины сечения:

$$S = \int_{\frac{A}{2}} \omega \cdot dA \Rightarrow \delta \cdot \int_{\frac{L}{2}} \omega(s) \cdot ds \Rightarrow \delta \cdot S_C^{\text{отс}} = \delta \cdot h^3 \cdot S_{Ch}^{\text{отс}},$$

его значение определим, суммируя отдельные участки, причём при отсчете от точки 0 эти относительные величины для характерных точек будут равны

$$\begin{aligned}
S_{0h}^{\text{отс}} &= 0; \\
S_{1-h}^{\text{отс}} &= S_{0h}^{\text{отс}} + \frac{\omega_{0h} + \omega_{1-h}}{2} \cdot s_h - r_{1h} \cdot \delta_{s\delta}; \\
S_{1+h}^{\text{отс}} &= S_{1-h}^{\text{отс}} + \delta_{r1\delta} \cdot \frac{1}{h^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega_{1+} + \Delta\omega \varphi_1 \cdot r_1 \cdot d\varphi_1 \Rightarrow S_{1-h}^{\text{отс}} + \\
&+ \delta_{r1\delta} \cdot r_{1h} \cdot \left( \omega_{1+h} \cdot \frac{\pi}{2} + r_{1h} \cdot \left( l_{C1+h} \cdot \left( \cos \gamma_1 + \sin \gamma_1 \cdot \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \right) + \left( \frac{\pi^2}{8} - 1 \right) \right) \right); \\
S_{2-h}^{\text{отс}} &= S_{1+h}^{\text{отс}} + \frac{\omega_{1+h} + \omega_{2-h}}{2} \cdot l_{1+2-h} \cdot \delta_{n\delta}; \\
S_{2+h}^{\text{отс}} &= S_{2-h}^{\text{отс}} + \frac{1}{h^3} \int_0^{\beta} \omega_{2+} + \Delta\omega \varphi \cdot r \cdot d\varphi \Rightarrow \\
&\Rightarrow S_{2-h}^{\text{отс}} + 0 + r_h^2 \cdot \left( l_{2+h} \cdot \left( -\sin \beta \right) \cdot r_h \cdot \left( \frac{\beta^2}{2} - \left( -\cos \beta \right) \right) \right); \\
S_{Ch}^{\text{отс}} &= S_{2+h}^{\text{отс}} + 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

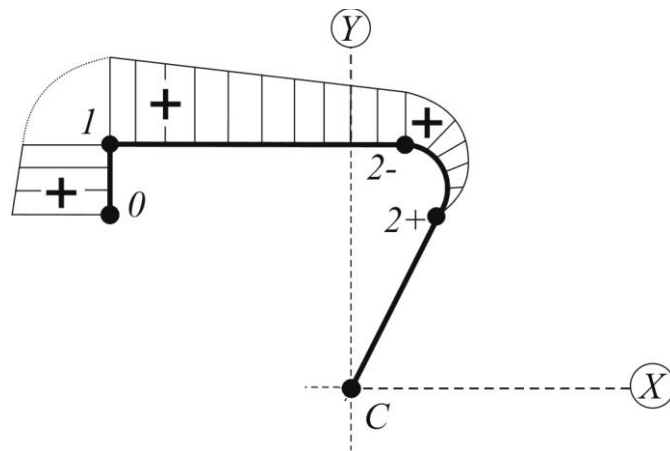


Рисунок 6 - Эюра  $\omega(s)$  с полюсом и начальной точкой отсчета в  $C$

Тогда постоянная  $D$ , определяющая истинную начальную точку отсчета  $M_0$ , и  $s_0$  – расстояние от т. (2-) до точки  $M_0$ , где  $\varpi = 0$ :

$$D = \frac{S}{\int_{\frac{A}{2}} dA} \Rightarrow \frac{S_0}{\frac{A}{2}} = \frac{\delta \cdot h^3 \cdot S_{Ch}^{\text{отс}}}{\delta \cdot h \cdot A_{\delta h}}, \quad \frac{D}{h^2} = \frac{S_{Ch}^{\text{отс}}}{A_{\delta h}} \tag{9}$$

$$S_0 = \frac{D - \omega_{2-}}{h} \Rightarrow h \cdot \left( \frac{S_{Ch}^{отс}}{A_{\delta h}} - \omega_{2-h} \right), \quad \frac{S_0}{h} = \frac{S_{Ch}^{отс}}{A_{\delta h}} - \omega_{2-h} \quad (10)$$

Главные секториальные координаты  $\varpi = \omega - D$  характерных точек (рис.7):

$$\begin{aligned} \varpi_c = \varpi_{2+} &\Rightarrow h^2 \cdot \left( 0 - \frac{S_{Ch}^{отс}}{l_h} \right); & \varpi_{2-} &\Rightarrow h^2 \cdot \left( \omega_{2-h} - \frac{S_{Ch}^{отс}}{l_h} \right); \\ \varpi_{1+} &\Rightarrow h^2 \cdot \left( \omega_{1+h} - \frac{S_{Ch}^{отс}}{l_h} \right); & \varpi_{1-} &\Rightarrow h^2 \cdot \left( \omega_{1-h} - \frac{S_{Ch}^{отс}}{l_h} \right); \\ \varpi_0 &\Rightarrow h^2 \cdot \left( \omega_{0h} - \frac{S_{Ch}^{отс}}{l_h} \right). \end{aligned}$$

Относительные главные секториальные координаты  $\varpi/h^2$  характерных точек:

$$\begin{aligned} \varpi_{Ch} = \varpi_{2+h} &\Rightarrow \left( 0 - \frac{S_{Ch}^{отс}}{l_h} \right); & \varpi_{2-h} &= \left( \omega_{2-h} - \frac{S_{Ch}^{отс}}{l_h} \right); \\ \varpi_{1+h} &\Rightarrow \left( \omega_{1+h} - \frac{S_{Ch}^{отс}}{l_h} \right); & \varpi_{1-h} &\Rightarrow \left( \omega_{1-h} - \frac{S_{Ch}^{отс}}{l_h} \right) \\ \varpi_{0h} &= \left( \omega_{0h} - \frac{S_{Ch}^{отс}}{l_h} \right). \end{aligned}$$

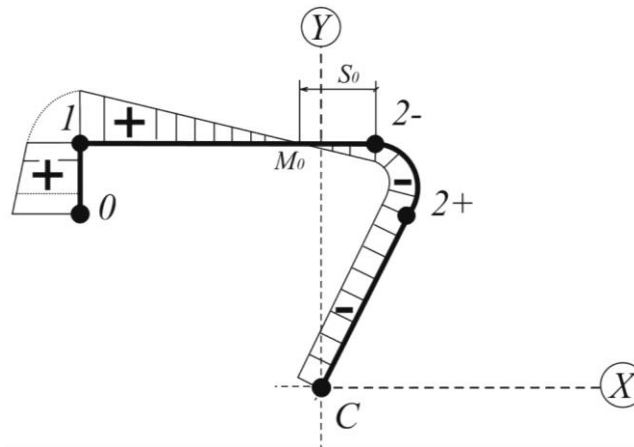


Рисунок 7 - Эпюра главных  $\varpi(s)$  с полюсом в  $C$  и начальной точкой отсчета в  $M_0$

Главный секториальный момент инерции определяется по формуле:

$$I_{\omega} = \int_A \varpi^2(s) \cdot dA \Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot \int_{L/2} \varpi^2(s) \cdot ds \Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot \left( \frac{l_{01-}}{3} \cdot \varpi_0^2 + \varpi_{1-}^2 + \varpi_0 \cdot \varpi_{1-} \cdot \delta_{s\delta} + \delta_{n\delta} \cdot \frac{l_{1+2-}}{3} \cdot \varpi_{1+}^2 + \varpi_{2-}^2 + \varpi_{1+} \cdot \varpi_{2-} + l_{C2+} \cdot \varpi_{2+}^2 + \int_0^{\beta} \Delta\omega \varphi - D^2 \cdot r \cdot d\varphi + \delta_{r1\delta} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta\omega \varphi_1 - \varpi_{1+}^2 \cdot r_1 \cdot d\varphi_1 \right),$$

$$I_{\omega} \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^5} \Rightarrow \delta_{s\delta} \cdot \frac{l_{01-h}}{3} \cdot \varpi_{0h}^2 + \varpi_{1-h}^2 + \varpi_{0h} \cdot \varpi_{1-h} + \frac{l_{1+2-h}}{3} \cdot \varpi_{1+h}^2 + \varpi_{2-h}^2 + \varpi_{1+h} \cdot \varpi_{2-h} \cdot \delta_{n\delta} + l_{C2+h} \cdot \varpi_{2+h}^2 + I_{\omega r1} + I_{\omega r},$$

где

$$I_{\omega r} = r_h^3 \cdot \left( l_{C2+h}^2 \cdot \left( \frac{3 \cdot \beta}{2} + \frac{\sin 2 \cdot \beta}{4} - 2 \cdot \sin \beta \right) + l_{C2+h} \cdot r_h \cdot \beta - \sin \beta + r_h^2 \cdot \left( \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta}{2} - \frac{\sin 2 \cdot \beta}{4} - 2 \cdot \sin \beta - \beta \cdot \cos \beta \right) \right) - 2 \cdot r_h^2 \cdot \left( l_{2+h} \cdot \beta - \sin \beta + r_h \cdot \left( \frac{\beta^2}{2} - 1 - \cos \beta \right) \right) \cdot \frac{S_{Ch}^{отс}}{l_h} + r_h \cdot \beta \cdot \left( \frac{S_{Ch}^{отс}}{l_h} \right)^2,$$

$$\frac{I_{\omega r1}}{\delta_{r1\delta}} = r_{1h}^3 \cdot \left[ l_{C1+h}^2 \cdot \left( \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) + \cos 2 \cdot \gamma_1 \cdot \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{\sin 2 \cdot \gamma_1}{2} \right) + r_{1h} \cdot \frac{\pi^3 - 48 + 6 \cdot \pi}{24} + l_{C1+h} \cdot r_{1h} \cdot \left( \sin \gamma_1 \cdot \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right)^2 + 2 \cdot \cos \gamma_1 \cdot \left( 1 - \frac{\pi}{4} \right) \right) \right] + \quad (11)$$

$$+ 2 \cdot r_{1h}^2 \cdot \left( l_{C1+h} \cdot \left( \cos \gamma_1 + \sin \gamma_1 \cdot \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \right) + r_{1h} \cdot \left( \frac{\pi^2}{8} - 1 \right) \right) \cdot \varpi_{1+h} + r_{1h} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \varpi_{1+h}^2$$

После определения геометрических характеристик, по принципу независимости действия сил, полные нормальные напряжения в произвольной точке поперечного сечения жесткого тонкостенного Z-образного стержня (с учетом знака) определяются по формуле [7]:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot Y(s) + \frac{M_y}{I_y} \cdot X(s) + \frac{B_\omega}{I_\omega} \cdot \varpi(s), \quad (12)$$

где внутренние усилия:

$N$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  - соответственно продольная сила и изгибающие моменты относительно главных центральных осей, определяемые методом сечения;

$B_\omega$  - бимомент в рассматриваемом поперечном сечении, определяемый из решения дифференциального уравнения для углов закручивания при стесненном кручении тонкостенного стержня открытого профиля.

### **Библиографический список:**

1. Волков В.П., Волкова О.В. Определение геометрических характеристик тонкостенного Z-образного стержня [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2015. №1. URL: [http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostenno-go-z-obraznogo-sterzhnya/at\\_download/file](http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostenno-go-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file) .

2. Волков В.П., Волкова О.В. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с закруглением [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2015. №2. URL: [http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostenno-go-z-obraznogo-sterzhnya/at\\_download/file](http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostenno-go-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file) .

3. Волков В.П., Волкова О.В. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с закруглением для расчета на изгиб с кручением [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2016. №3. URL: [http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostenno-go-z-obraznogo-sterzhnya/at\\_download/file](http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostenno-go-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file) .

4. Волков В.П., Кустова О.В. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с отбортовкой [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2016. №4.

URL: [http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometriceskikh-harakteristik-tonkostonnogo-z-obraznogo-sterzhnya/at\\_download/file](http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometriceskikh-harakteristik-tonkostonnogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file) .

5. Волков В.П., Кустова О.В. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с отбортовкой и с закруглением [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2017. №5.

URL: [http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometriceskikh-harakteristik-tonkostonnogo-z-obraznogo-sterzhnya/at\\_download/file](http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometriceskikh-harakteristik-tonkostonnogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file) .

6. Волков В.П., Кустова О.В. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с отбортовкой с учетом изготовления [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2017. №6.

URL: [http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometriceskikh-harakteristik-tonkostonnogo-z-obraznogo-sterzhnya/at\\_download/file](http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometriceskikh-harakteristik-tonkostonnogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file)

7. Волков В.П., Кустова О.В. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с отбортовкой и с закруглением с учетом изготовления [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2018. №7. URL: [http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometriceskikh-harakteristik-tonkostonnogo-z-obraznogo-sterzhnya/at\\_download/file](http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometriceskikh-harakteristik-tonkostonnogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file)

8. Волков В.П. Напряженно-деформированное состояние тонкостенного Z-образного стержня переменной толщины без закругления. [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2019. №8. URL: [http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometriceskikh-harakteristik-tonkostonnogo-z-obraznogo-sterzhnya/at\\_download/file](http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometriceskikh-harakteristik-tonkostonnogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file)

9. Волков В.П. Геометрические характеристики Z-образного стержня с закруглением и с усиленной отбортовкой с учетом изготовления. [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2019. №9.

URL:[http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometriceskikh-harakteristik-tonkostonnogo-z-obraznogo-sterzhnya/at\\_download/file](http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometriceskikh-harakteristik-tonkostonnogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file)

10. Волков В.П. Геометрические характеристики Z-образного стержня с закруглением, с усиленной отбортовкой и с усиленной полкой, с учетом изготовления. [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2020. №10. URL: [http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometriceskikh-harakteristik-tonkostonnogo-z-obraznogo-sterzhnya/at\\_download/file](http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometriceskikh-harakteristik-tonkostonnogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file)

11. Волков В.П. Геометрические характеристики Z-образного стержня с закруглениями, с усиленной отбортовкой и с усиленной полкой, с учетом изготовления. [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2020. №11. URL: [http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometriceskikh-harakteristik-tonkostonnogo-z-obraznogo-sterzhnya/at\\_download/file](http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometriceskikh-harakteristik-tonkostonnogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file)

12. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. - М: Высш. шк., 1995. 560 с.; ил.