

УДК 531.252.2

К ВОПРОСУ О ПОСТРОЕНИИ КРУГА НАПРЯЖЕНИЙ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ И ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ МЕХАНИКЕ.

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА

Бакушев Сергей Васильевич,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Аннотация

Показана процедура построения круга напряжений в точке деформируемого тела, находящегося в условиях плоской деформации, механическое поведение которого описывается уравнениями геометрически и физически нелинейной теории упругости В.В. Новожилова. Отмечено, что круг напряжений строится в точке деформированного тела, то есть в системе координат точек тела после деформации. Используя связь между напряжениями, действующими по граням тонкого элементарного параллелепипеда выделенного в точке деформированного тела и обобщёнными напряжениями, главные напряжения в точке выражены через обобщённые напряжения. Тем самым имеется возможность построить круг напряжений в точке тела, находящегося в условиях плоской деформации, в системе координат точек тела до деформации. Однако, в этом случае, для построения круга напряжений в некоторой точке тела необходимо полностью решить задачу нелинейной теории упругости, то есть определить в этой точке и напряжения, и деформации и перемещения как функции пространственных координат. Сформулирован алгоритм построения круга напряжений в точке деформируемого тела, находящегося в условиях плоской деформации, механическое поведение которого описывается уравнениями геометрически и физически нелинейной теории упругости В.В. Новожилова. В качестве приложения предлагается теория прочности для материалов, по разному

сопротивляющихся растяжению, сжатию – теория прочности Мора для материалов, механическое поведение которых описывается уравнениями геометрически и физически нелинейной теории упругости В.В. Новожилова.

Ключевые слова: деформируемое тело, круг напряжений, главные напряжения, деформации, перемещения, геометрическая и физическая нелинейность.

**REGARDING STRESSES CIRCLE CONSTRUCTION IN
GEOMETRICALLY AND PHYSICALLY NONLINEAR MECHANICS.
PLANE PROBLEM**

Bakushev Sergey Vasilevich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor of the department “Mechanics”.

Abstract

The procedure is shown for constructing a stress circle at a point of a deformable body under conditions of plane deformation, the mechanical behavior of which is described by the equations of the geometrically and physically nonlinear V.V. Novozhilov’s theory of elasticity. It is noted that the stresses circle is built at the point of the deformed body, that is, in the coordinate system of the points of the body after deformation. Using the relationship between the stresses acting along the faces of the thin elementary parallelepiped selected at the point of the deformed body and generalized stresses; the principal stresses at the point are expressed through the generalized stresses. Thus, it is possible to construct a stress circle at the point of a body under plane deformation conditions in the coordinate system of points of the body before deformation. However, in this case, to construct a stress circle at some point of the body, it is necessary to completely solve the problem of the nonlinear theory of elasticity, that is, to determine at this point stress, strain and displacement as the function of spatial coordinate. An algorithm is formulated for constructing a stress circle at a point of a deformable body under conditions of plane deformation, the

mechanical behavior of which is described by the equations of the geometrically and physically nonlinear V.V. Novozhilov's theory of elasticity. As a supplement, the theory of strength is proposed for materials with different resistances to tension, compression, and Mohr's theory of strength for materials which mechanical behavior is described by the equations of the geometrically and physically nonlinear V.V. Novozhilov's theory of elasticity.

Keywords: deformable body, stress circle, principal stresses, deformations, displacements, geometric and physical nonlinearity.

Введение. Анализ напряжённого состояния в точке деформированного тела в случае плоской задачи можно выполнить графически при помощи так называемого круга напряжений (круга Мора). Использование круга напряжений в плоской задаче позволяет достаточно просто определить касательное и нормальное напряжения на всевозможных площадках, проходящих через заданную точку. Круг напряжений был разработан и используется в линейной теории упругости. Его также можно использовать для анализа напряжённого состояния в точке и в нелинейной геометрически и физически теории упругости. Геометрически и физически нелинейная теория упругости изложена, в частности, в книгах профессора В.В. Новожилова [1, 2]. Насколько эта теория важна говорит хотя бы тот факт, что в основе нелинейной теории упругости лежат только две гипотезы: о сплошности и однородности упругого тела (в основе линейной теории упругости – семь гипотез). Ввиду этого, нелинейная теория упругости В.В. Новожилова позволяет оценивать напряжённое и деформированное состояние в точке деформируемого тела с максимальным учётом реальных свойств материалов. Это обусловлено отказом от принципа затвердевания и переход к записи уравнений равновесия в системе координат точек тела до деформации, что предопределяет рассмотрение напряжённого и деформированного состояний упругого тела в одной системе координат; учёт квадратичных слагаемых в геометрических соотношениях и так далее. Всё это позволяет, кроме того, выявить новые качественные эффекты в деформируемых

телах. На это обстоятельство указывал ещё А.И. Лурье [3]. Сдерживающим фактором широкого внедрения расчётных методик по уравнениям нелинейной теории является факт отсутствия приемлемых гипотез о связи нелинейных деформаций и обобщённых напряжений. Хотя таких гипотез, за последние 70-ть лет, было предложено немало. Одна из возможных математических моделей связи нелинейных деформаций и обобщённых напряжений описана в работе [4]. Надо сказать, что теория расчёта деформируемых тел и конструкций постоянно развивается, и предлагаются новые математические модели механического поведения материалов, в частности [5, 6].

Рассмотрим краткий обзор публикаций последнего десятилетия, в которых затрагиваются вопросы анализа напряжённого состояния в точке деформируемого тела с использованием круга напряжений. В работе [7] на основе прочностных данных по разноразмерным образцам горных пород, обусловленных линейной зависимостью касательного напряжения от нормального напряжения, представленной кругами Мора, построена модельная оценка недостающих прочностных данных (пределы прочности на сжатие и растяжение) для образцов горных пород. В работах [8 - 11] предлагаются различные способы построения огибающей предельных кругов Мора. Приёмы построения паспорта прочности горных пород описываются в работах [12 - 17]. В статье [18] предлагается новая система инвариантов тензора напряжений. Инварианты строятся как криволинейные интегралы от напряжений, взятые по границе области, ограниченной кругами Мора. Статья [19] посвящена проблеме теоретического обоснования развития неупругих зон в пластически неоднородной среде вокруг выработок различного назначения. Для ортотропного тела привлекается обобщённое условие текучести Мизеса на анизотропные тела. Построены круги напряжений Мора для нахождения значений критических сил и коэффициента внутренних трений. В работе [20] для случая плоского напряжённого и деформированного состояний рассмотрена задача разделения несимметричного тензора дисторсии на симметричный (тензор коэффициентов длины) и ортогональный (тензор

жёсткого поворота) сомножители для случая, когда ортогональный тензор характеризуется одним числом. В работах [21, 22] предлагаются эмпирические зависимости для наибольшего и наименьшего главных напряжений в массиве горных пород по которым можно оценить степень опасности напряжённого состояния. В статье [23] описывается виртуальная лаборатория, разработанная в среде MATLAB, позволяющая анализировать напряжённое состояние в точке, основываясь на диаграмме Мора.

В данной работе показана процедура построения круга напряжений в точке деформируемого тела, находящегося в условиях плоской деформации, механическое поведение которого описывается уравнениями геометрически и физически нелинейной теории упругости В.В. Новожилова.

Круг напряжений для плоской деформации. Рассмотрим построение круга напряжений (круга Мора) в нелинейной теории упругости В.В.Новожилова [1]. Будем рассматривать напряжённо-деформированное состояние тела в условиях плоской задачи, в частности, в условиях плоской деформации [3].

Напряжения, нормальное σ_m и касательное σ_{nt} , на произвольной наклонной площадке деформированного тела (рис. 1), ориентация которой задаётся нормалью \bar{n} , будут вычисляться по формулам [3]:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta}}{2} + \frac{\sigma_{\xi\xi} - \sigma_{\eta\eta}}{2} \cos 2\alpha + \sigma_{\xi\eta} \sin 2\alpha, \quad (1)$$

$$\sigma_{nt} = -\frac{\sigma_{\xi\xi} - \sigma_{\eta\eta}}{2} \sin 2\alpha + \sigma_{\xi\eta} \cos 2\alpha. \quad (2)$$

Здесь $\sigma_{\xi\xi}$, $\sigma_{\xi\eta}$, $\sigma_{\eta\xi}$, $\sigma_{\eta\eta}$ – проекции напряжений, действующих по граням тонкого элементарного параллелепипеда с рёбрами, параллельными осям X' и Y' , выделенного в точке M^* деформированного тела, на оси декартовой системы координат $X'O'Y'$ (рис. 2); ξ и η – декартовы координаты точек тела после его деформации.

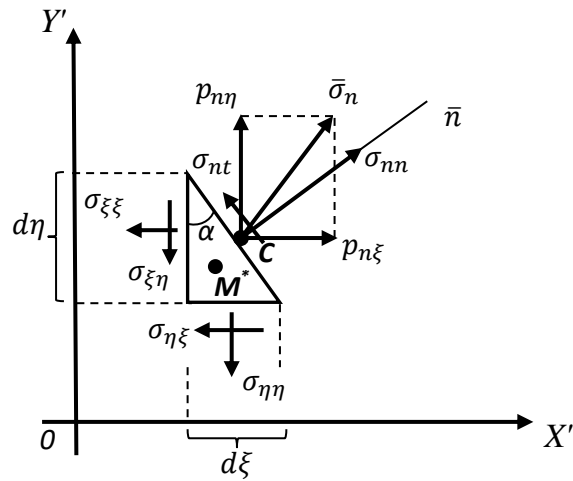


Рисунок 1 - Напряжения на наклонной площадке

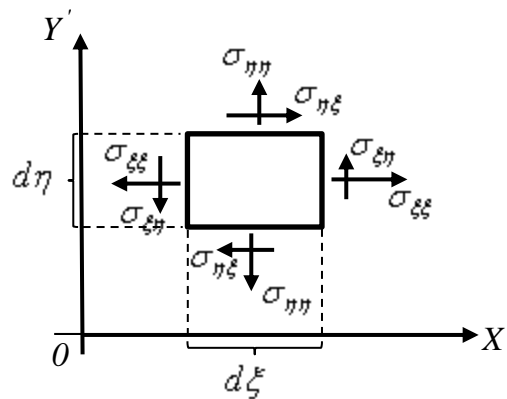


Рисунок 2 - Напряжения на гранях элементарного плоского параллелепипеда в теле после деформации

Напряжения $\sigma_{\xi\xi}$, $\sigma_{\xi\eta}$, $\sigma_{\eta\xi}$, $\sigma_{\eta\eta}$ являются компонентами тензора напряжений

$$\mathbf{T}_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{\xi\xi} & \sigma_{\xi\eta} \\ \sigma_{\eta\xi} & \sigma_{\eta\eta} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

заданного в точке деформированного тела (после деформации) в декартовой прямоугольной системе координат $X'O'Y'$ [3].

Угол α , определяющий ориентацию наклонной площадки, в системе координат точек тела после деформации $X'O'Y'$ вычисляется по формуле:

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\sigma_{\xi\eta}}{\sigma_{\xi\xi} - \sigma_{\eta\eta}}. \quad (4)$$

Выражение главных напряжений σ_1 и σ_2 тензора напряжений (3) через напряжения $\sigma_{\xi\xi}$, $\sigma_{\xi\eta} = \sigma_{\eta\xi}$, $\sigma_{\eta\eta}$ имеет вид [3]:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{\xi\xi} - \sigma_{\eta\eta})^2 + 4\sigma_{\xi\eta}^2}. \quad (5)$$

Пусть площадки, нормали к которым совпадают с направлением осей $X'O'Y'$ декартовой прямоугольной системы координат, заданной в деформированном теле (после деформации), являются главными, то есть $\sigma_{\xi\xi} = \sigma_1$, $\sigma_{\eta\eta} = \sigma_2$, $\sigma_{\xi\eta} = 0$. Тогда, напряжения на произвольной наклонной площадке σ_m и σ_{nt} , выраженные через главные напряжения σ_1 и σ_2 будут, на основании (1) и (2), иметь вид:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha, \quad \sigma_{nt} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (6)$$

Введём обозначения: $a = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$ и $R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$. Тогда формулы (6) перепишем в следующей форме:

$$\sigma_m = a + R \cos 2\alpha, \quad \sigma_{nt} = -R \sin 2\alpha. \quad (7)$$

В координатах $(\sigma \equiv \sigma_m) \approx (\tau \equiv \sigma_{nt})$ равенства (7) представляют уравнение окружности радиуса R с центром в точке $\tilde{O}(a, 0)$ в параметрической форме. Эта окружность в линейной теории упругости называется *кругом Мора*, или *кругом напряжений*. В нашем случае геометрически нелинейной теории упругости окружность, описываемая уравнениями (7), также будем называть *кругом напряжений*. Следует лишь помнить о том, что круг напряжений (7) строится в точке деформированного тела, то есть в системе координат точек тела после деформации.

Учитывая связь между напряжениями $\sigma_{\xi\xi}$, $\sigma_{\xi\eta}$, $\sigma_{\eta\xi}$, $\sigma_{\eta\eta}$, действующими по граням тонкого элементарного параллелепипеда, выделенного в точке M^*

деформированного тела, с рёбрами, параллельными осям X' и Y' , и обобщёнными напряжениями σ_{xx}^* , σ_{yy}^* , $\sigma_{xy}^* = \sigma_{yx}^*$ [24]

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\xi\xi} &= \frac{1}{D} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \sigma_{xx}^* + 2 \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{xy}^* + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \sigma_{yy}^* \right]; \\
 \sigma_{\xi\eta} = \sigma_{\eta\xi} &= \frac{1}{D} \left\{ \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial v}{\partial x} \sigma_{xx}^* + \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \sigma_{xy}^* + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{yy}^* \right\}; \\
 \sigma_{\eta\eta} &= \frac{1}{D} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \sigma_{xx}^* + 2 \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{\partial v}{\partial x} \sigma_{xy}^* + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \sigma_{yy}^* \right], \\
 \Delta &= \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = D \neq 0.
 \end{aligned} \tag{8}$$

выразим главные напряжения (5) через обобщённые напряжения:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_{\xi\xi} + \sigma_{\eta\eta}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{\xi\xi} - \sigma_{\eta\eta})^2 + 4\sigma_{\xi\eta}^2} = \\
 &= \frac{1}{2D} \left\{ \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \right] \sigma_{xx}^* + 2 \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial y} + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{\partial v}{\partial x} \right] \sigma_{xy}^* + \right. \\
 &\quad \left. + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right] \sigma_{yy}^* \right\} \pm \frac{1}{2D} \left\{ \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \right] \sigma_{xx}^* + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial u}{\partial y} - \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{\partial v}{\partial x} \right] \sigma_{xy}^* + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 \right] \sigma_{yy}^* \right\}^2 + \\
 &\quad + 4 \left\{ \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial v}{\partial x} \sigma_{xx}^* + \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \sigma_{xy}^* + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{yy}^* \right\}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{9}
 \end{aligned}$$

Используя формулы (9), имеется возможность построить круг напряжений в точке тела, находящегося в условиях плоской деформации, в системе координат точек тела до деформации XOY . При этом известными должны быть не только обобщённые напряжения, но и перемещения, как функции пространственных координат x и y .

В случае плоской деформации дифференциальные уравнения равновесия в нелинейной теории упругости В.В. Новожилова, устанавливающие функциональные зависимости между нелинейными деформациями и обобщёнными напряжениями, имеют вид [3]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sigma_{xx}^* + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{xy}^* \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sigma_{yx}^* + \frac{\partial u}{\partial y} \sigma_{yy}^* \right] + DF_{\xi} = 0; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \sigma_{xx}^* + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sigma_{xy}^* \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \sigma_{yx}^* + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \sigma_{yy}^* \right] + DF_{\eta} = 0. \end{aligned} \right\} (10)$$

Дифференциальные уравнения равновесия (10) выражают условия равенства нулю главного вектора всех сил, действующих на плоский элемент деформированного тела, путём проектирования этих сил на оси декартовой системы координат, направления которых не изменяются при деформации. В дифференциальных уравнениях (10) положения точек деформированного тела определяются не декартовыми координатами ξ и η , а криволинейными координатами x и y (которые являются декартовыми координатами для тела в его исходном положении).

Поскольку в уравнения (10) входят и обобщённые напряжения, и производные от перемещений по пространственным координатам, то решение системы дифференциальных уравнений следует искать в перемещениях. В самом общем виде уравнения (10), записанные в терминах перемещений для случая плоской деформации, представлены в работе [3]. Однако, в частных случаях иногда удобнее непосредственно рассматривать совместно уравнения равновесия (10) и физические уравнения нелинейной теории упругости, записываемые для случая плоской деформации:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^* - \frac{1}{3} \sigma^* &= 2G^* \left(\varepsilon_{xx}^* - \frac{1}{3} e^* \right); \\ \sigma_{yy}^* - \frac{1}{3} \sigma^* &= 2G^* \left(\varepsilon_{yy}^* - \frac{1}{3} e^* \right); \\ \sigma_{xy}^* &= G^* \varepsilon_{xy}^*; \quad \sigma_{zz}^* = \left(K^* - \frac{2}{3} G^* \right) \varepsilon^*. \end{aligned} \quad (11)$$

Уравнения (11) записаны для случая подобия девиаторов обобщённых напряжения и нелинейных деформаций, то есть, когда фаза подобия девиаторов равна нулю [1, 2]:

Здесь

$$K^* = \frac{\sigma^*}{3e^*}; \quad G^* = \frac{\bar{\sigma}^*}{2\bar{e}^*}; \quad e^* = \varepsilon_{xx}^* + \varepsilon_{yy}^*; \quad \sigma^* = \sigma_{xx}^* + \sigma_{yy}^* + \sigma_{zz}^*;$$

$$\bar{e}^* = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\varepsilon_{xx}^* - \varepsilon_{yy}^*)^2 + (\varepsilon_{yy}^*)^2 + (\varepsilon_{xx}^*)^2 + \frac{3}{2}(\varepsilon_{xy}^{*2})};$$

$$\bar{\sigma}^* = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_{xx}^* - \sigma_{yy}^*)^2 + (\sigma_{yy}^* - \sigma_{zz}^*)^2 + (\sigma_{zz}^* - \sigma_{xx}^*)^2 + 6(\sigma_{xy}^{*2})}.$$

Смешанные инварианты K^* и G^* , определяющие математическую модель деформируемого тела, можно рассматривать либо как функции инвариантов тензора нелинейных деформаций деформации: $K^* = K^*(e^*, \bar{e}^*)$; $G^* = G^*(e^*, \bar{e}^*)$, либо как функции инвариантов тензора обобщённых напряжений: $K^* = K^*(\sigma^*, \bar{\sigma}^*)$; $G^* = G^*(\sigma^*, \bar{\sigma}^*)$.

В соотношениях (11) величины ε_{xx}^* , ε_{yy}^* , ε_{xy}^* – это компоненты тензора нелинейных деформаций [3]:

$$\mathbf{T}_\varepsilon^* = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^* & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy}^* \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{yx}^* & \varepsilon_{yy}^* \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Компоненты тензора (12) определяются с учётом квадратичных слагаемых:

$$\varepsilon_{xx}^* = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right];$$

$$\varepsilon_{yy}^* = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]; \quad (13)$$

$$\varepsilon_{xy}^* = \varepsilon_{yx}^* = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y};$$

Следует отметить, что обобщённые напряжения σ_{xx}^* , σ_{yy}^* , $\sigma_{xy}^* = \sigma_{yx}^*$, связаны с истинными напряжениями σ_{xx} , σ_{yy} , $\sigma_{xy} \neq \sigma_{yx}$, действующими по граням тонкого косоугольного параллелепипеда в направлении единичных ортов \bar{i}_x и \bar{i}_y , задающих ориентацию граней косоугольного параллелепипеда (рис. 3), рёбра которого до деформации были параллельны осям декартовой системы координат XOY , соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^* &= \frac{A_x^*}{A_x} \cdot \frac{\sigma_{xx}}{1 + E_x}; & \sigma_{xy}^* &= \frac{A_x^*}{A_x} \cdot \frac{\sigma_{xy}}{1 + E_y}; \\ \sigma_{yx}^* &= \frac{A_y^*}{A_y} \cdot \frac{\sigma_{yx}}{1 + E_x}; & \sigma_{yy}^* &= \frac{A_y^*}{A_y} \cdot \frac{\sigma_{yy}}{1 + E_y}. \end{aligned} \quad (14)$$

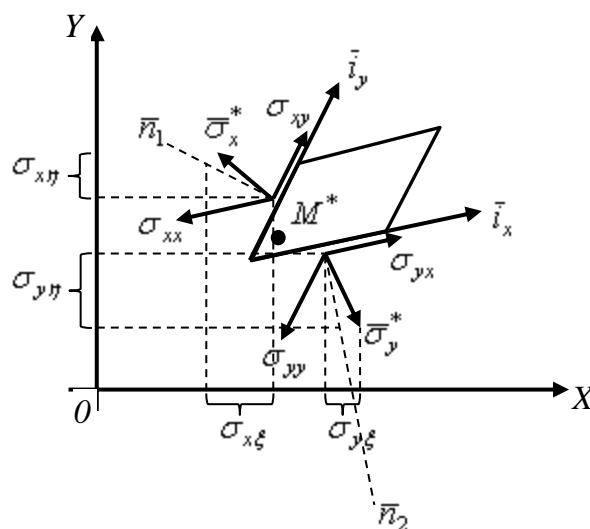


Рисунок 3 - Напряжения на гранях косоугольного плоского параллелепипеда в теле после деформации

В формулах (14) E_x , E_y – относительное удлинение волокон сплошной среды, параллельных до деформации осям декартовой системы координат:

$$E_x = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{xx}^*} - 1; \quad E_y = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{yy}^*} - 1; \quad (15)$$

$\frac{A_x^*}{A_x}$, $\frac{A_y^*}{A_y}$ – отношение площадей элементарных площадок с единичными размерами из плоскости чертежа (рис. 3), выделенных в сплошной среде после

деформации, к их площадям до деформации, которые до деформации были перпендикулярны осям декартовой системы координат XOY :

$$A_x^* = A_x \sqrt{(1 + 2\varepsilon_{yy}^*)}, \quad A_y^* = A_y \sqrt{(1 + 2\varepsilon_{xx}^*)}. \quad (16)$$

Алгоритм построения круга напряжений. Сформулируем алгоритм:

1. Для данного материала деформируемого тела, решая краевую задачу для системы дифференциальных уравнений равновесия (10) в перемещениях, определяем в каждой точке тела перемещения, как функции пространственных координат.

2. Зная перемещения, используя геометрические соотношения (13) и физические уравнения (11), определяем обобщённые напряжения.

3. По формулам (9) вычисляем главные напряжения.

4. В заданной точке деформируемого тела строим круг напряжений.

Теория прочности Мора. Одним из наиболее важных приложений круга напряжений является построение теории прочности для материалов по разному сопротивляющихся растяжению, сжатию – теория прочности Мора.

Экстраполируя теорию прочности Мора, построенную для линейной теории упругости, на нелинейную теорию, будем считать, что прочность в точке деформируемого тела, находящегося в условиях плоской задачи (плоской деформации), будет обеспечена, если выполняется условие:

$$\sigma_1 - \frac{\sigma_{on}^{(+)}}{\sigma_{on}^{(-)}} \sigma_2 \leq \sigma_{on}^{(+)}. \quad (17)$$

Здесь $\sigma_{on}^{(+)}$ – опасное напряжение при осевом растяжении; $\sigma_{on}^{(-)}$ – опасное напряжение при осевом сжатии.

Вычисление главных напряжений σ_1 и σ_2 следует выполнять по формулам (9).

Выводы.

Круг напряжений – круг Мора – в нелинейной теории упругости В.В. Новожилова строится в точке деформированного тела, то есть в состоянии после деформации, если известны в этой точке главные напряжения.

Зная формулы перехода от обобщённых напряжений к напряжениям, действующим по граням элементарного параллелепипеда в точке деформированного тела, круг напряжений строится в системе координат точек тела в состоянии до деформации.

Для построения круга напряжений в точке тела в системе координат точек тела до деформации, необходимо полностью решить задачу нелинейной теории упругости, то есть определить в рассматриваемой точке и напряжения, и деформации, и перемещения.

Условие прочности (17), сформулированное для деформируемых тел, механическое поведение которых описывается уравнениями геометрически и физически нелинейной теории упругости В.В.Новожилова, требует всестороннего экспериментального обоснования.

Библиографический список:

1. Новожилов В.В. Теория упругости. Судпромгиз., 1958. 370 с.
2. Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. Изд. 2-е, стереотипное. М.: ЕдиториалУРСС, 2003. 208 с.
3. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980. 512 с.
4. Бакушев С.В. Геометрически и физически нелинейная механика сплошной среды: Плоская задача. Изд. стереотип. М.: Книжный дом «Либроком», 2020. 312 с.
5. Mikhail A. Guzev. Non-classical solutions of a continuum model for rock descriptions. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*. 2014;6(3):180-185 DOI 10.1016/j.jrmge.2014.03.001.
6. Simon Heru Prassetyo, Marte Gutierrez, Nick Barton. Nonlinear shear behavior of rock joints using a linearized implementation of the Barton–Bandis model. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*. 2017;9(4):671-682 DOI 10.1016/j.jrmge.2017.01.006.
7. Цой П.А., Усольцева О.М. Применение кругов Мора для связи и модельной оценки прочностных данных разноразмерных образцов горных

пород // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 2019. № 2. С. 23-29.

8. Рычков Б.А., Комарцов Н.М., Кулагина М.А. Расчётная огибающая предельных кругов напряжений горных пород // Известия Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова. 2019. № 3 (51). С. 139-144.

9. Комарцов Н.М., Кулагина М.А., Рычков Б.А. Разработка критерия разрушения горных пород на основе конкретизации теории прочности Мора // В сборнике: XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник трудов: в 4-х томах. 2019. С. 672-674.

10. Дуйшеналиев Т.Б., Мекенбаев Б.Т. Уравнение для количественного описания теории прочности мора и огибающие линии кругов напряжений // Современные проблемы механики. 2018. № 33 (3). С. 385-398.

11. Рычков Б.А. О критерии прочности горных пород // Известия Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова. 2018. № 2 (46). С. 89-93.

12. Кулагина М.А. Расчётный метод построения паспорта прочности горных пород // В сборнике: Математическое моделирование и краевые задачи Материалы XI Всероссийской научной конференции с международным участием: в 2х томах. 2019. С. 86-89.

13. Рычков Б.А., Комарцов Н.М., Кулагина М.А. Метод построения паспорта прочности горных пород // Известия Кыргызского государственного технического университета им. И. Раззакова. 2019. № 1 (49). С. 229-235.

14. Комарцов Н.М., Лужанская Т.А., Рычков Б.А. Концепция скольжения и механика горных пород // Учёные записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. 2015. Т. 157. № 3. С. 54-58.

15. Алиев М.М., Каримова Н.Г. О паспортах прочности горных пород // Материалы научной сессии учёных Альметьевского государственного нефтяного института. 2014. № 1. С. 369-374.

16. Лужанская Т.А. Разработка модели перехода горных пород в предельное состояние // Математическое моделирование в естественных науках. 2014. Т. 1. С. 151-154.

17. Аптуков В.Н., Мерзляков А.Ф. О построении кругов Мора по данным испытаний образцов различной геометрии на одноосное сжатие // Известия высших учебных заведений. Горный журнал. 2010. № 1. С. 109-114.

18. Ревуженко А.Ф., Микенина О.А. Критерии предельного состояния идеально связанных и сыпучих тел // Фундаментальные и прикладные вопросы горных наук. 2014. Т. 1. № 1. С. 280-284.

19. Ескалиев М.Е., Балабекова М.Ж., Кожамкулова Ж.Ж. Расчёт развития неупругих зон в массиве неоднородного строения вблизи полости // Современные наукоёмкие технологии. 2014. № 8. С. 28-31.

20. Садаков О.С., Щербакова А.О., Шульженко С.И. Использование круга Мора для решения задачи полярной декомпозиции при плоском напряжённом состоянии // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика. 2010. № 9. С. 21-26.

21. Hoek E., Brown E.T. Empirical strength criterion for rock masses. J. Geotech. Engng Div., ASCE 106(GT9), 1980. pp. 1013-1035.

22. Paterson M.S., Wong T.-F. Experimental Rock Deformation - The Brittle Field. Berlin: Springer, 2005. 348 p.

23. Antonio José Jiménez Mocholí, Fernando Giménez-Palomares, Andrés Lapuebla-Ferri. Círculos de Mohr: un laboratorio virtual para la enseñanza y el aprendizaje de estados tensionales planos. Modelling in Science Education and Learning. 2013;6(0):157-171 DOI 10.4995/msel.2013.1849.

24. Бакушев С.В. К вопросу о напряжениях в нелинейной теории упругости В.В. Новожилова. Долговечность строительных материалов, изделий и конструкций: Материалы всерос. НТК, посвящ. 75-летию засл. деятеля науки Р.Ф., акад. РААСН, д.т.н., проф. Селяева В.П. (3-5 декабря 2019 г.) / редкол.: В.П.Селяев [и др.]; отв. ред. А.Л.Лазарев. Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2019. С.35-41.