

УДК 539.313

**СЕКУЩИЕ МОДУЛИ ПРИ АППРОКСИМАЦИИ ПОЛНЫХ  
ДИАГРАММ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ  
ФУНКЦИЯМИ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЁННОМ  
СОСТОЯНИИ**

*Бакушев Сергей Васильевич*

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,  
г. Пенза,*

*доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».*

**Аннотация**

Рассматривается построение замыкающих уравнений для полных диаграмм объёмного и сдвигового деформирования. Диаграммы деформирования аппроксимируются на каждом характерном участке линейными функциями. Замыкающие уравнения на каждом характерном участке диаграмм деформирования строятся на основе секущих модулей и приводятся как для математических моделей, не учитывающих геометрическую нелинейность, так и для математических моделей, учитывающих геометрическую нелинейность. Полученные в статье замыкающие уравнения могут найти применение при построении физических соотношений, а, следовательно, и дифференциальных уравнений равновесия для различных случаев напряжённо-деформированного состояния сплошной среды.

**Ключевые слова:** сплошная среда, диаграммы деформирования, линейная аппроксимация, секущие модули, замыкающие уравнения, геометрическая линейность, геометрическая нелинейность.

# SECANT MODULES AT APPROXIMATION OF COMPLETE DEFORMATION DIAGRAMS BY LINEAR FUNCTIONS AT COMBINED STRESS STATE

*Bakushev Sergey Vasilevish*

*Penza State University of Architecture and Construction, Penza,*

*Doctor of Sciences, Professor of the department "Mechanics".*

## **Abstract**

Under analysis is the construction of closing equations for complete diagrams of volume and shearing deformation. Deformation diagrams are approximated at every peculiar section by linear functions. Closing equations at every peculiar section of deformation diagram are constructed on the basis of secant modules and are applied both for mathematical models, regardless geometrical nonlinearity and geometrical models, regarding geometrical nonlinearity. Received in the present article closing equations can be used for construction of physical relations and therefore differential equations of equilibrium for different cases of stress strain state of continuum.

**Keywords:** solid environment, deformation charts, linear approximation, secant modules, closing equations, geometric linearity, geometric non-linearity.

## **Введение.**

Механическое поведение твёрдых деформируемых тел под действием внешних нагрузок моделируется при помощи математических моделей, с той или иной степенью достоверности описывающих их напряжённо-деформированное состояние. Обзор некоторых математических моделей, описывающих механическое поведение сплошных сред, предложенных во второй половине XX-го столетия (Сетх, Синьорини, Мурнаган, Джон, Блейтц и Ко), дан в работе А.И. Лурье [1]. К этому же периоду следует отнести математические модели сплошных сред, предложенные проф. Г.А.Гениевым,

для описания механического поведения сыпучих сред и грунтовых массивов [2], бетона и железобетона [3], а также профессора Н.И.Карпенко для железобетона [4].

Основу математических моделей составляют замыкающие уравнения, позволяющие сформулировать в замкнутом виде физические уравнения, устанавливающие связь между напряжениями и деформациями. Наиболее общие соотношения между обобщёнными напряжениями и нелинейными деформациями для изотропных нелинейно-упругих тел, находящихся в условиях сложного напряжённого и деформированного состояния, были даны В.В.Новожиловым в работе [5]. Физические соотношения были построены Новожиловым В.В. на основе тензорных свойств понятий "напряжение" и "деформация". Однако, замыкающие уравнения им построены не были. Он лишь указал на то, что замыкающие уравнения связывают между собой инварианты тензоров обобщённых напряжений и нелинейных деформаций. Для нелинейно-упругих тел и конструкций, находящихся в условиях сложного напряжённо-деформированного состояния, зависимости между обобщёнными напряжениями и нелинейными деформациями для геометрически нелинейных моделей или зависимости между напряжениями и деформациями для геометрически линейных моделей описываются при помощи диаграмм объёмного и сдвигового деформирования. Вид и форма замыкающих уравнений, адекватно описывающих диаграммы объёмного и сдвигового деформирования, во многом определяет реальное напряжённо-деформированное состояние твёрдых деформируемых тел и массивов.

Диаграммы объёмного и сдвигового деформирования отражают механическое поведение деформируемых тел и строятся по экспериментальным данным. Аналитические зависимости для замыкающих уравнений, учитывая сложный и сугубо нелинейный характер взаимосвязи напряжений и деформаций, порой приводят к чрезвычайно трудоёмким разрешающим уравнениям для определения напряжённо-деформированного состояния

деформируемых тел и конструкций. Ввиду этого возникает необходимость сложные аналитические зависимости между напряжениями и деформациями аппроксимировать некоторыми простыми функциями, например, линейными или билинейными.

В данной работе рассматривается построение замыкающих уравнений для полных диаграмм объёмного и сдвигового деформирования. Диаграммы деформирования аппроксимируются на каждом характерном участке линейными функциями.

### **Замыкающие уравнения для геометрически линейной модели.**

Рассмотрим общий случай объёмного и сдвигового деформирования при аппроксимации каждого участка диаграмм объёмного и сдвигового деформирования линейными функциями. На рис. 1 показаны рассматриваемые диаграммы деформирования и их аппроксимация линейными функциями (**геометрически линейная модель**). Здесь введены обозначения:

$K_0$  – начальный модуль объёмного расширения (сжатия);  $G_0$  – начальный модуль сдвига;  $K_1$  – модуль упрочнения при объёмном расширении (сжатии);  $G_1$  – модуль упрочнения при сдвиге;  $K_2$  – модуль разупрочнения при объёмном расширении (сжатии);  $G_2$  – модуль разупрочнения при сдвиге;  $\varepsilon_{T1}$  – значение первого инварианта тензора деформаций в начале площадки текучести;  $\varepsilon_{T2}$  – значение первого инварианта тензора деформаций в конце площадки текучести;  $\varepsilon_M$  – максимальное значение первого инварианта тензора деформаций;  $\varepsilon_R$  – значение первого инварианта тензора деформаций при разрушении материала;  $\Gamma_{T1}$  – значение интенсивности касательных напряжений в начале площадки текучести;  $\Gamma_{T2}$  – значение интенсивности касательных напряжений в конце площадки текучести;  $\Gamma_M$  – максимальное значение интенсивности касательных напряжений;  $\Gamma_R$  – значение

интенсивности касательных напряжений при разрушении материала;  $\sigma_T$  – предел текучести на диаграмме объёмного деформирования;  $\sigma_M$  – максимальная величина первого инварианта тензора напряжений;  $\sigma_R$  – величина первого инварианта тензора напряжений при разрушении материала;  $T_T$  – предел текучести на диаграмме сдвигового деформирования;  $T_M$  – максимальная величина интенсивности касательных напряжений;  $T_R$  – величина интенсивности касательных напряжений при разрушении материала;  $\sigma$  – первый инвариант тензора напряжений;  $\varepsilon$  – первый инвариант тензора деформаций;  $T$  – интенсивность касательных напряжений;  $\Gamma$  – интенсивность деформаций сдвига.

Для геометрически линейной модели сплошной среды в соответствии с рис. 1, а и б секущие модули объёмного расширения (сжатия)  $K = K(\varepsilon, \Gamma)$  и сдвига  $G = G(\varepsilon, \Gamma)$  на прямолинейном участке  $[0, \varepsilon_{T1}]$  диаграммы  $\sigma \approx \varepsilon$  и на прямолинейном участке  $[0, \Gamma_{T1}]$  диаграммы  $T \approx \Gamma$  будут величинами постоянными:

$$K = \frac{1}{3} K_0 = Const, \quad (1)$$

$$G = G_0 = Const. \quad (2)$$

На участке текучести  $[\varepsilon_{T1}, \varepsilon_{T2}]$  диаграммы  $\sigma \approx \varepsilon$  и на участке текучести  $[\Gamma_{T1}, \Gamma_{T2}]$  диаграммы  $T \approx \Gamma$  секущие модули объёмного расширения (сжатия)  $K = K(\varepsilon, \Gamma)$  и сдвига  $G = G(\varepsilon, \Gamma)$  будут равны:

$$K = \frac{1}{3} K_0 \frac{\varepsilon_{T1}}{\varepsilon} \neq Const, \quad (3)$$

$$G = G_0 \frac{\Gamma_{T1}}{\Gamma} \neq Const. \quad (4)$$

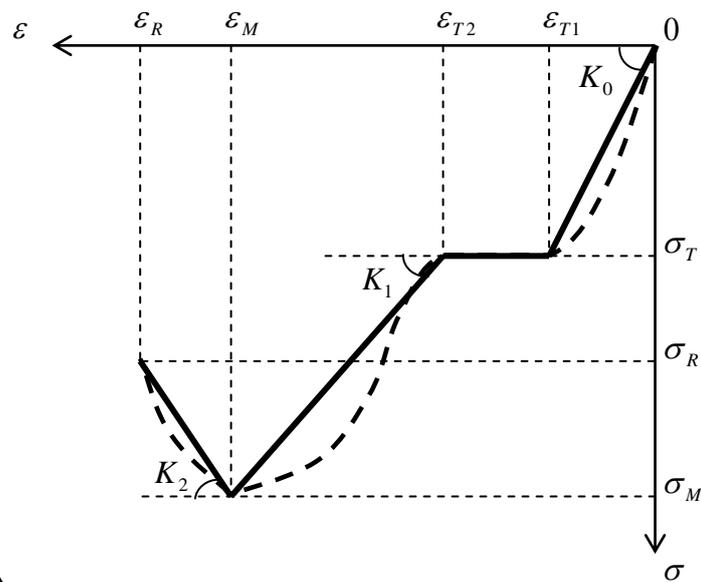
На участке упрочнения  $[\varepsilon_{T2}, \varepsilon_M]$  диаграммы  $\sigma \approx \varepsilon$  и на участке упрочнения  $[\Gamma_{T1}, \Gamma_M]$  диаграммы  $T \approx \Gamma$  секущие модули объёмного

расширения (сжатия)  $K = K(\varepsilon, \Gamma)$  и сдвига  $G = G(\varepsilon, \Gamma)$  будут определяться зависимостями:

$$K = K \varepsilon = \frac{1}{3} \left[ K_0 \frac{\varepsilon_{T1}}{\varepsilon} + K_1 \left( 1 - \frac{\varepsilon_{T2}}{\varepsilon} \right) \right] \neq Const, \quad (5)$$

$$G = G \Gamma = G_0 \frac{\Gamma_{T1}}{\Gamma} + G_1 \left( 1 - \frac{\Gamma_{T2}}{\Gamma} \right) \neq Const. \quad (6)$$

а)



б)

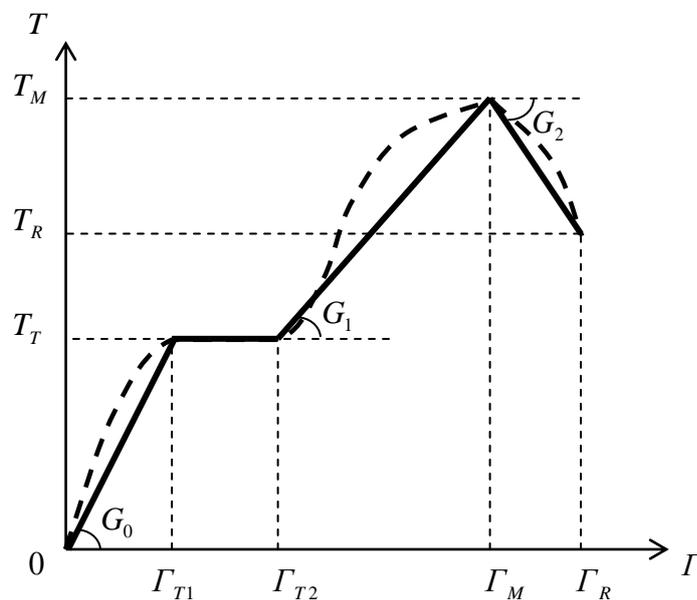


Рисунок 1 - Диаграммы объёмного и сдвигового деформирования и их аппроксимация линейными функциями (геометрически линейная модель)

На участке с нисходящей ветвью  $[\varepsilon_M, \varepsilon_R]$  диаграммы  $\sigma \approx \varepsilon$  и на участке с нисходящей ветвью  $[\Gamma_M, \Gamma_R]$  диаграммы  $T \approx \Gamma$  секущие модули объёмного расширения (сжатия)  $K = K(\varepsilon, \Gamma)$  и сдвига  $G = G(\varepsilon, \Gamma)$  будут вычисляться по формулам:

$$K = K_{\varepsilon} = \frac{1}{3} \left[ K_0 \frac{\varepsilon_{T1}}{\varepsilon} + K_1 \frac{\varepsilon_M - \varepsilon_{T2}}{\varepsilon} - K_2 \left( 1 - \frac{\varepsilon_M}{\varepsilon} \right) \right] \neq Const, \quad (7)$$

$$G = G_{\Gamma} = G_0 \frac{\Gamma_{T1}}{\Gamma} + G_1 \frac{\Gamma_M - \Gamma_{T2}}{\Gamma} - G_2 \left( 1 - \frac{\Gamma_M}{\Gamma} \right) \neq Const. \quad (8)$$

### **Замыкающие уравнения для геометрически нелинейной модели.**

На рис. 2 показаны объёмная и сдвиговая диаграммы деформирования сплошной среды и их аппроксимация линейными функциями (**геометрически нелинейная модель**). Здесь введены обозначения:

$K_0^*$  – начальный модуль объёмного расширения (сжатия);  $G_0$  – начальный модуль сдвига;  $K_1^*$  – модуль упрочнения при объёмном расширении (сжатии);  $G_1$  – модуль упрочнения при сдвиге;  $K_2^*$  – модуль разупрочнения при объёмном расширении (сжатии);  $G_2$  – модуль разупрочнения при сдвиге;  $\varepsilon_{T1}^*$  – значение первого инварианта тензора нелинейных деформаций в начале площадки текучести;  $\varepsilon_{T2}^*$  – значение первого инварианта тензора нелинейных деформаций в конце площадки текучести;  $\varepsilon_M^*$  – максимальное значение первого инварианта тензора нелинейных деформаций;  $\varepsilon_R^*$  – значение первого инварианта тензора нелинейных деформаций при разрушении материала;  $\Gamma_{T1}^*$  – значение интенсивности обобщённых касательных напряжений в начале площадки текучести;  $\Gamma_{T2}^*$  – значение интенсивности обобщённых касательных напряжений в конце площадки текучести;  $\Gamma_M^*$  – максимальное значение интенсивности обобщённых касательных напряжений;  $\Gamma_R^*$  – значение

интенсивности обобщённых касательных напряжений при разрушении материала;  $\sigma_T^*$  – предел текучести на диаграмме нелинейного объёмного деформирования;  $\sigma_M^*$  – максимальная величина первого инварианта тензора обобщённых напряжений;  $\sigma_R^*$  – величина первого инварианта тензора обобщённых напряжений при разрушении материала;  $T_T^*$  – предел текучести на диаграмме нелинейного сдвигового деформирования;  $T_M^*$  – максимальная величина интенсивности обобщённых касательных напряжений;  $T_R^*$  – величина интенсивности обобщённых касательных напряжений при разрушении материала;  $\sigma^*$  – первый инвариант тензора обобщённых напряжений;  $\varepsilon^*$  – первый инвариант тензора нелинейных деформаций;  $T^*$  – интенсивность обобщённых касательных напряжений;  $\Gamma^*$  – интенсивность нелинейных деформаций сдвига.

Для геометрически нелинейной модели сплошной среды в соответствии с рис. 2, а и б секущие модули объёмного расширения (сжатия)  $K^* = K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$  и сдвига  $G^* = G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$  на прямолинейном участке  $[0, \varepsilon_{T1}^*]$  диаграммы  $\sigma^* \approx \varepsilon^*$  и на прямолинейном участке  $[0, \Gamma_{T1}^*]$  диаграммы  $T^* \approx \Gamma^*$  будут величинами постоянными:

$$K^* = \frac{1}{3} K_0^* = Const, \quad (9)$$

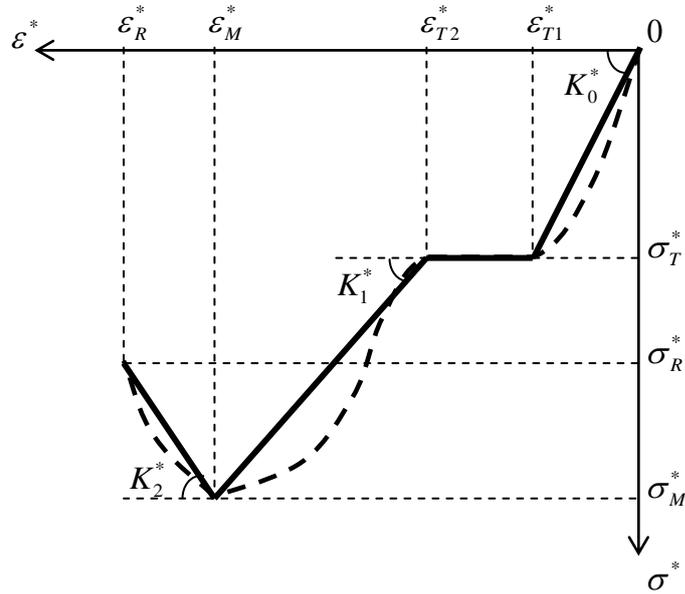
$$G^* = G_0^* = Const. \quad (10)$$

На участке текучести  $[\varepsilon_{T1}^*, \varepsilon_{T2}^*]$  диаграммы  $\sigma^* \approx \varepsilon^*$  и на участке текучести  $[\Gamma_{T1}^*, \Gamma_{T2}^*]$  диаграммы  $T^* \approx \Gamma^*$  секущие модули объёмного расширения (сжатия)  $K^* = K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$  и сдвига  $G^* = G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$  будут равны:

$$K^* = \frac{1}{3} K_0^* \frac{\varepsilon_{T1}^*}{\varepsilon^*} \neq Const, \quad (11)$$

$$G^* = G_0^* \frac{\Gamma_{T1}^*}{\Gamma^*} \neq Const. \quad (12)$$

a)



б)

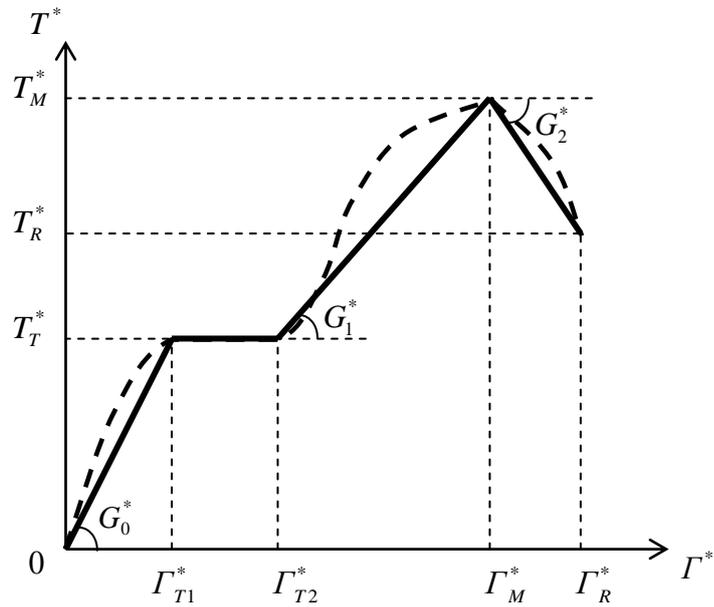


Рисунок 2 - Диаграммы объёмного и сдвигового деформирования и их аппроксимация линейными функциями (геометрически нелинейная модель).

На участке упрочнения  $[\varepsilon_{T2}^*, \varepsilon_M^*]$  диаграммы  $\sigma^* \approx \varepsilon^*$  и на участке упрочнения  $[\Gamma_{T1}^*, \Gamma_M^*]$  диаграммы  $T^* \approx \Gamma^*$  секущие модули объёмного расширения (сжатия)  $K^* = K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$  и сдвига  $G^* = G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$  будут определяться зависимостями:

$$K^* = K^* \varepsilon^* = \frac{1}{3} \left[ K_0^* \frac{\varepsilon_{T1}^*}{\varepsilon^*} + K_1^* \left( 1 - \frac{\varepsilon_{T2}^*}{\varepsilon^*} \right) \right] \neq Const, \quad (13)$$

$$G^* = G^* \Gamma^* = G_0^* \frac{\Gamma_{T1}^*}{\Gamma^*} + G_1^* \left( 1 - \frac{\Gamma_{T2}^*}{\Gamma^*} \right) \neq Const. \quad (14)$$

На участке с нисходящей ветвью  $[\varepsilon_M^*, \varepsilon_R^*]$  диаграммы  $\sigma^* \approx \varepsilon^*$  и на участке с нисходящей ветвью  $[\Gamma_M^*, \Gamma_R^*]$  диаграммы  $T^* \approx \Gamma^*$  секущие модули объёмного расширения (сжатия)  $K^* = K^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$  и сдвига  $G^* = G^*(\varepsilon^*, \Gamma^*)$  будут вычисляться по формулам:

$$K^* = K^* \varepsilon^* = \frac{1}{3} \left[ K_0^* \frac{\varepsilon_{T1}^*}{\varepsilon^*} + K_1^* \frac{\varepsilon_M^* - \varepsilon_{T2}^*}{\varepsilon^*} - K_2^* \left( 1 - \frac{\varepsilon_M^*}{\varepsilon^*} \right) \right] \neq Const, \quad (15)$$

$$G^* = G^* \Gamma^* = G_0^* \frac{\Gamma_{T1}^*}{\Gamma^*} + G_1^* \frac{\Gamma_M^* - \Gamma_{T2}^*}{\Gamma^*} - G_2^* \left( 1 - \frac{\Gamma_M^*}{\Gamma^*} \right) \neq Const. \quad (16)$$

Зная секущие модули, на основании физических зависимостей деформирования нелинейно-упругой, геометрически линейной

$$\sigma = 3K\varepsilon, \quad T = G\Gamma, \quad (17)$$

либо геометрически нелинейной

$$\sigma^* = 3K^*\varepsilon^*, \quad T^* = G^*\Gamma^*, \quad (18)$$

изотропной сплошной среды можно построить физические соотношения для конкретных диаграмм объёмного и сдвигового деформирования сплошной среды. При этом важно знать взаимное расположение характерных точек диаграмм объёмного и сдвигового деформирования. Принимая во внимание вид этих диаграмм (рис. 1 и рис. 2), вариантов взаимного расположения характерных точек диаграмм может быть чрезвычайно много. Ввиду этого,

записывать физические соотношения для общего вида диаграмм объёмного и сдвигового деформирования, нецелесообразно.

### **Заключение.**

Полученные в статье замыкающие уравнения для полных диаграмм объёмного и сдвигового деформирования, аппроксимированных линейными функциями на характерных участках диаграмм деформирования, могут найти применение при построении физических уравнений для различных случаев деформирования сплошных сред, описываемых как геометрически линейными, так и геометрически нелинейными моделями.

### **Библиографический список:**

1. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука. 1980. 512с.
2. Гениев Г.А. К вопросу о деформационной теории пластичности сыпучей среды // Строительная механика и расчёт сооружений. 1974. №4. С.8-10.
3. Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А. Теория пластичности бетона и железобетона. М.: Стройиздат. 1974. 316 с.
4. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. М.: Стройиздат. 1996. 416 с.: ил. – ISBN 5-274-01682-0.
5. Новожилов В.В. Теория упругости. Судпромгиз, 1958. 370 с.