

УДК 624.041

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТОНКОСТЕННОГО Z - ОБРАЗНОГО СТЕРЖНЯ С ЗАКРУГЛЕНИЕМ И С УСИЛЕННОЙ ПОЛКОЙ

Волков Владимир Павлович,

*Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,
г. Пенза,*

кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика».

Аннотация

Статья посвящена определению геометрических характеристик гнутого тонкостенного стержня Z-образного профиля с закруглением и с усиленной полкой при расчете его на растяжение и изгиб с кручением. Приведены расчетные формулы для определения относительных значений длины контура, главных осевых моментов инерции и главных осевых моментов сопротивления, главных секториальных координат.

Ключевые слова: гнутый тонкостенный стержень, Z-образный профиль, главные центральные оси сечения, главные осевые моменты инерции, главные осевые моменты сопротивления, главные секториальные координаты.

GEOMETRIC CHARACTERISTICS THIN-WALLED Z-SHAPED ROD WITH ANY CURVING AND WITH REINFORCED SHELF

Volkov Vladimir Pavlovich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Candidate of Sciences, Associate Professor of the department «Mechanics».

Abstract

Article is devoted to definition of the geometric characteristics of a buckler thin-walled rod Z-shaped profile with any curving and with reinforced shelf for calculation this on tension, curve, turn. To deduce a formula of calculation dimensions length of contours, main axes moments of inertia and main axes moments

of resistance, main sector coordinates.

Keywords: buckler thin-walled rod, Z-shaped profile, the main central axes section, main axes moments of inertia, main axes moments of resistance, main sector coordinates.

Условные обозначения (рис.1):

XU – главные центральные оси сечения;

$B = 2 \cdot b$ – габаритная ширина срединной линии профиля сечения;

$H = 2 \cdot h$ – габаритная высота срединной линии профиля сечения;

$\delta \ll h, b$ - постоянная толщина срединной линии профиля сечения;

$\delta_n \ll h, b$ - толщина усиленной полки;

L – полная длина срединной линии профиля сечения;

r – радиус закругления срединной линии профиля сечения станком;

R – наибольший радиус закругления срединной линии профиля сечения;

γ - угол между наклонной стенкой профиля и осью X ;

$b_h = \frac{b}{h}$ - относительная ширина профиля сечения;

$r_h = \frac{r}{h}$ - относительный радиус закругления профиля сечения.

В статье рассматривается задача определения геометрических размеров и геометрических характеристик сечения гнутого тонкостенного стержня Z-образного сечения толщины δ с усиленной толщиной δ_n полки и с закруглением r (рис.1), т.е. определяется относительная ширина сечения b_h , при заданном значении угла γ и величине r , когда XU – главные центральные оси сечения, а полка параллельна оси X .

рассмотрен без учета отбортовки s и без закругления r , т.е. при $\alpha = \gamma$, $s = 0$, $r = 0$ в [8].

Итак, учитывая центральную симметрию, рассмотрим верхнюю половину сечения (рис.2), причём, центр тяжести, центр изгиба или центр кручения всего сечения совпадают с центром симметрии, т.е. с точкой C (рис.1).

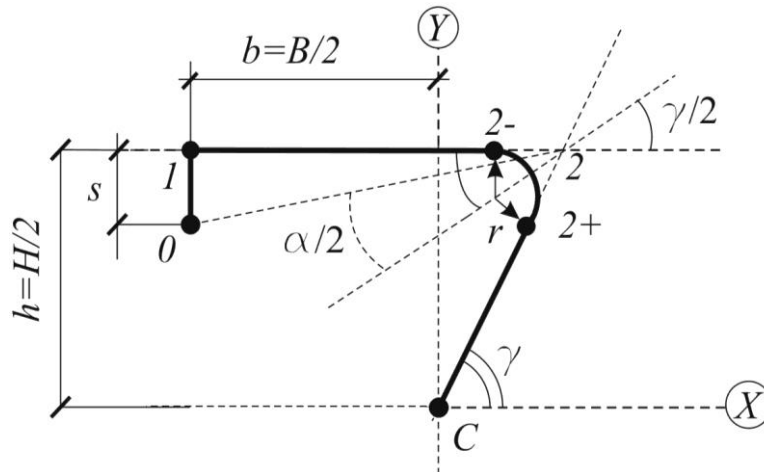


Рисунок 5 - Верхняя половина сечения. C - центр симметрии

Декартовы координаты x , y характерных точек и длины соответствующих участков l (рис.2):

$$x_{2-} = \frac{h}{\operatorname{tg} \gamma} - \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}, \quad y_{2-} = h, \quad l_{2-} = \frac{h}{\operatorname{tg} \gamma} - \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}},$$

$$x_{2+} = x_{2-} + r \cdot \sin \gamma, \quad y_{2+} = h - r - r \cdot \cos \gamma, \quad l_{2+} = \frac{h}{\sin \gamma} - \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}.$$

Центральные оси XU (рис.2) являются главными [7], если

$$I_{XY} = \int_0^{\frac{L}{2}} \delta(s) \cdot x(s) \cdot y(s) \cdot ds \Rightarrow 0$$

$$\left(\frac{\delta_n}{\delta} \right) \cdot \frac{h \cdot b^2}{2} = \frac{x_{2-} \cdot x_{2-} \cdot h}{2} + \frac{l_{2+} \cdot x_{2+} \cdot y_{2+}}{3} +$$

$$+ \int_0^{\pi-\gamma} (x_{2-} + r \cdot \sin \varphi) \cdot (h - r + r \cdot \cos \varphi) \cdot r \cdot d\varphi,$$

$$\left(\frac{\delta_n}{\delta}\right) \cdot \frac{h \cdot b^2}{2} = \frac{x_{2-} \cdot x_{2-} \cdot h}{2} + \frac{l_{2+} \cdot x_{2+} \cdot y_{2+}}{3} +$$

$$+ r \cdot \left(x_{2-} \cdot \pi - \gamma + r \cdot 1 + \cos \gamma \cdot h - r + \left(x_{2-} + \frac{r \cdot \sin \gamma}{2} \right) \cdot r \cdot \sin \gamma \right),$$

где, вводя обозначения

$$x_h = \frac{1}{\tan \gamma} - \frac{r_h}{\tan \frac{\gamma}{2}}, \quad \beta = \pi - \gamma,$$

относительное значение $b_h > 0$ найдем из решения квадратного уравнения:

$$\left(\frac{\delta_n}{\delta}\right) \cdot b_h^2 - \left(\frac{\delta_n}{\delta}\right) \cdot x_h^2 - \frac{2}{3} \cdot \left(x_h + \frac{r_h}{\sin \gamma} \right) \cdot 1 - r_h \cdot 1 + \cos \gamma \cdot \left(\frac{1}{\sin \gamma} - \frac{r_h}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} \right) -$$

$$- r_h \cdot \left(x_h \cdot \beta + r_h \cdot 1 + \cos \gamma \cdot 1 - r_h + \left(x_h + \frac{r_h \cdot \sin \gamma}{2} \right) \cdot r_h \cdot \sin \gamma \right) = 0$$

или

$$b_h = \sqrt{ x_h^2 + \left(\frac{\delta_n}{\delta}\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(x_h + \frac{r_h}{\sin \gamma} \right) \cdot 1 - r_h \cdot 1 + \cos \gamma \cdot \left(\frac{1}{\sin \gamma} - \frac{r_h}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} \right) +$$

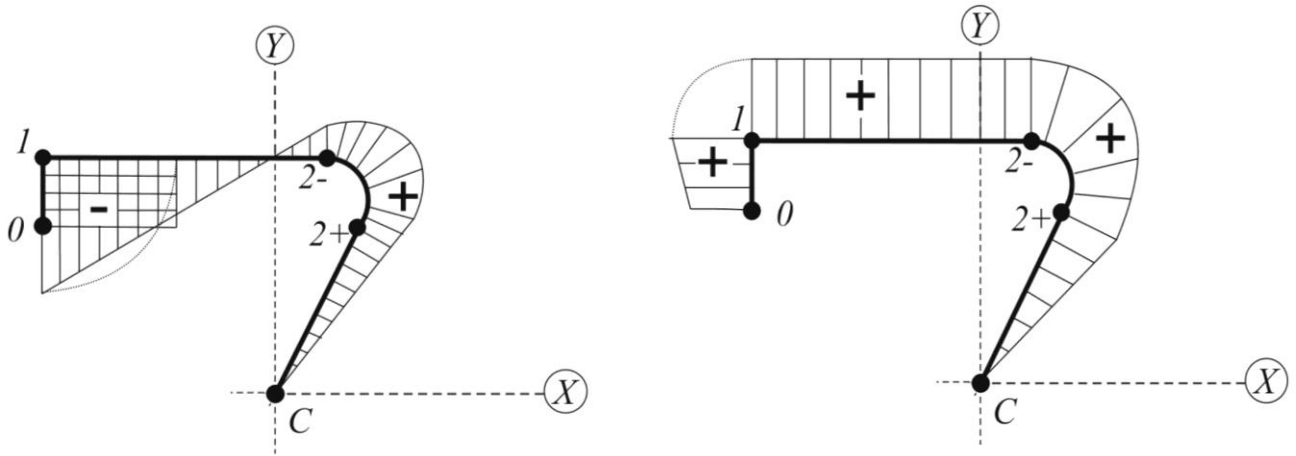
$$+ \left(\frac{\delta_n}{\delta}\right) \cdot r_h \cdot \left(x_h \cdot \beta + r_h \cdot 1 + \cos \gamma \cdot 1 - r_h + \left(x_h + \frac{r_h \cdot \sin \gamma}{2} \right) \cdot r_h \cdot \sin \gamma \right)} \quad (1)$$

Декартовы координаты x , y других характерных точек и длины соответствующих участков l (рис.2):

$$x_0 = -b, \quad y_0 = h - s, \quad l_{01} = s \Rightarrow \left(b + \frac{h}{\operatorname{tg} \gamma} - \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} \right) \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma - \alpha}{2};$$

$$x_1 = -b, \quad y_1 = h, \quad l_{12} = b + l_{2-} \Rightarrow b + \frac{h}{\operatorname{tg} \gamma} - \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}.$$

Эпюры главных центральных координат $x(s)$ и $y(s)$ на рис.3:



Эпюра $x(s)$

Эпюра $y(s)$

Рисунок 3 - C - центр симметрии

Относительные координаты точек и относительные длины участков:

$$x_{0h} = -b_h, \quad y_{0h} = 1 - s_h, \quad l_{01h} = s_h \Rightarrow \left(b_h + \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} - \frac{r_h}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} \right);$$

$$x_1 = -b_h, \quad y_{1h} = 1, \quad l_{12-h} \Rightarrow b_h + \frac{1}{\operatorname{tg} \gamma} - \frac{r_h}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}};$$

$$x_{2+h} = x_h + r_h \cdot \sin \gamma, \quad y_{2+h} = 1 - r_h - r_h \cdot \cos \gamma, \quad l_{2+h} = \frac{1}{\sin \gamma} - \frac{r_h}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}.$$

Относительная длина контура гнутого Z-образного профиля L/H :

$$l_h = \frac{L}{H} = \frac{L/2}{h} \Rightarrow b_h + x_h + r_h \cdot \beta + \left(\frac{1}{\sin \gamma} - \frac{r_h}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} \right), \quad (2)$$

где $L/2 = b + x_{2-} + r \cdot \beta + l_{2+}$

Относительная площадь гнутого Z-образного профиля $A/(\delta \cdot H)$:

$$A_{\delta h} = \frac{A}{\delta \cdot H} = \frac{A}{\delta \cdot 2 \cdot h} \Rightarrow \left(\frac{\delta_n}{\delta} \right) \cdot b_h - x_h + r_h \cdot \beta + l_{2+h}, \quad (3)$$

где $A = 2 \cdot \delta \cdot \left(\left(\frac{\delta_n}{\delta} \right) \cdot b_h + x_{2-} + r_h \cdot \beta + l_{2+} \right)$.

Главные осевые моменты инерции (рис.2) определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
 I_x &= \int_A y^2(s) \cdot dA \Rightarrow 2 \cdot \int_{l/2} \delta(s) \cdot y^2(s) \cdot ds \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot \left(\left(\frac{\delta_n}{\delta} \right) \cdot l_{12-} \cdot h^2 + \frac{l_{2+}}{3} \cdot y_{2+}^2 + \int_0^\beta (h - r + r \cdot \cos \varphi)^2 \cdot r \cdot d\varphi \right) \\
 I_x \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^3} &\Rightarrow \left(\frac{\delta_n}{\delta} \right) \cdot l_{12-h} + \frac{l_{2+h}}{3} \cdot y_{2+h}^2 + \\
 &+ r_h \cdot \left[1 - r_h^2 \cdot \beta + 2 \cdot r_h \cdot (1 - r_h) \cdot \sin \gamma + r_h^2 \cdot \frac{\beta - \sin \gamma \cdot \cos \gamma}{2} \right] \quad (4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_y &= \int_A x^2(s) \cdot dA \Rightarrow 2 \cdot \int_{l/2} \delta(s) \cdot x^2(s) \cdot ds \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot \left(\left(\frac{\delta_n}{\delta} \right) \cdot \frac{l_{12-}}{3} \cdot x_1^2 + x_{2-}^2 + x_1 \cdot x_{2-} + \frac{l_{2+}}{3} \cdot x_{2+}^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^\beta (x_{2-} + r \cdot \sin \varphi)^2 \cdot r \cdot d\varphi \right), \\
 I_y \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^3} &\Rightarrow \left(\frac{\delta_n}{\delta} \right) \cdot \frac{l_{12-h}}{3} \cdot x_{1h}^2 + x_h^2 + x_{1h} \cdot x_h + \frac{l_{2+h}}{3} \cdot x_{2+h}^2 + \\
 &+ r_h \cdot \left[x_h^2 \cdot \beta + 2 \cdot r_h \cdot x_h \cdot (1 + \cos \gamma) + r_h^2 \cdot \frac{\beta + \sin \gamma \cdot \cos \gamma}{2} \right]. \quad (5)
 \end{aligned}$$

Главные осевые моменты сопротивления определяются по формулам:

$$\begin{aligned}
 W_x &= \frac{I_x}{y_{\max}} \Rightarrow \frac{I_x}{h}, \\
 W_x \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^2} &\Rightarrow I_x \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^3}; \quad (6)
 \end{aligned}$$

$$W_y = \frac{I_y}{x_{\max}} \Rightarrow \frac{I_y}{b},$$

$$W_y \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^2} \Rightarrow \frac{1}{b_h} \cdot I_y \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^3}. \quad (7)$$

Для нахождения главного секториального момента инерции

$I_\omega = \int_A \varpi^2(s) \cdot dA$ введем секториальные координаты ω (удвоенная площадь сектора между полюсом, начальной и текущей точками на профиле сечения стержня), где полюс и начальная точка отсчета выбраны в точке C , рис.4:

$$\omega_C = 0; \quad \omega_{2+} = 0;$$

$$\omega_\phi = l_{2+} \cdot r \cdot 1 - \cos\phi + r^2 \cdot \beta - \sin\beta, \quad 0 \leq \phi \leq \beta, \text{ (рис. 5)}$$

$$\omega_{2-} = l_{2+} \cdot r \cdot 1 - \cos\beta + r^2 \cdot \beta - \sin\beta;$$

$$\omega_1 = \omega_{2-} + h \cdot l_{12-}$$

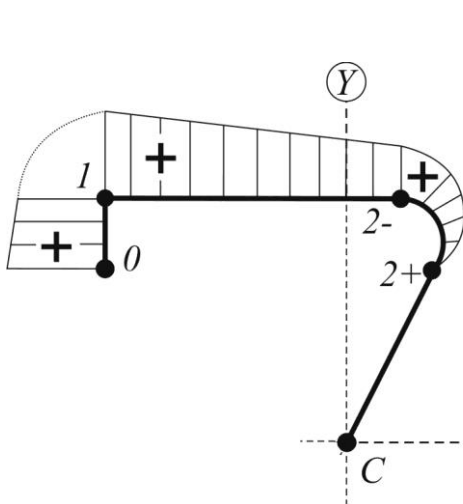


Рисунок 4 – Эпюра $\omega(s)$

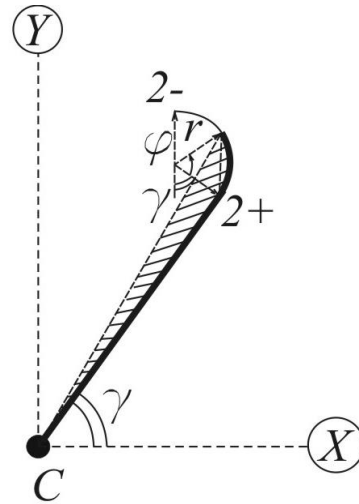


Рисунок 5 - К определению $\omega(\phi)$ с полюсом и начальной точкой отсчета в C на участке [2-2+]

Относительные секториальные координаты ω/h^2 :

$$\omega_{2-h} = l_{2+h} \cdot r_h \cdot 1 - \cos\beta + r_h^2 \cdot \beta - \sin\beta;$$

$$\omega_{1h} = \omega_{2-h} + l_{12-h}$$

Секториальный статический момент:

$$S = \int_A \omega \cdot dA \Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot \int_0^{\frac{L}{2}} \delta(s) \cdot \omega(s) \cdot ds = 2 \cdot S_0 = 2 \cdot \delta \cdot h^3 \cdot S_{0h},$$

$$S_C = 0; \quad S_{2+} = 0;$$

$$S_{2-} = \delta \cdot \int_0^\beta \omega \varphi \cdot r \cdot d\varphi \Rightarrow \delta \cdot r^2 \cdot \left(l_{2+} \cdot \beta - \sin\beta + r \cdot \left(\frac{\beta^2}{2} - 1 - \cos\beta \right) \right) = \delta \cdot h^3 \cdot S_{2-h}$$

$$S_1 = S_{2-} + \delta_n \cdot \frac{\omega_1 + \omega_{2-}}{2} \cdot l_{12-}$$

Относительные секториальные статические моменты $S/(\delta \cdot h^3)$:

$$S_{2-h} = r_h^2 \cdot \left(l_{2+h} \cdot \beta - \sin\beta + r_h \cdot \left(\frac{\beta^2}{2} - 1 - \cos\beta \right) \right)$$

$$S_{1h} = S_{2-h} + \left(\frac{\delta_n}{\delta} \right) \cdot \frac{\omega_{1h} + \omega_{2-h}}{2} \cdot l_{12-h}$$

Постоянная D , определяющая главную начальную точку отсчета M_0 (рис.б), где s_0 – расстояние от т. (2-) до точки, где $\varpi = 0$:

$$D = \frac{S}{\int_A dA} \Rightarrow \frac{S_0}{A/2} = h^2 \cdot \frac{S_{0h}}{A_{\delta h}}, \quad (8)$$

$$S_0 = \frac{D - \omega_{2-}}{h} \Rightarrow h \cdot \left(\frac{S_{0h}}{A_{\delta h}} - \omega_{2-h} \right) \quad (9)$$

Главные секториальные координаты $\varpi = \omega - D$ (рис.б):

$$\varpi_C = \varpi_{2+} \Rightarrow h^2 \cdot \left(-\frac{S_{0h}}{A_{\delta h}} \right); \quad \varpi_{2-} = h^2 \cdot \left(\omega_{2-h} - \frac{S_{0h}}{A_{\delta h}} \right);$$

$$\varpi_1 \Rightarrow h^2 \cdot \left(\omega_{1h} - \frac{S_{0h}}{A_{\delta h}} \right);$$

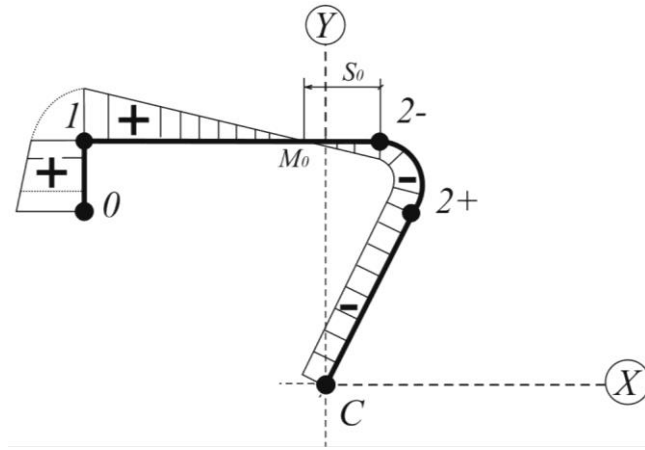


Рисунок 6 - Эпюра главных $\varpi(s)$ с полюсом в C и начальной точкой отсчета в M_0

Относительные главные секториальные координаты ϖ/h^2 :

$$\varpi_{ch} = \varpi_{2+h} \Rightarrow \left(-\frac{S_{0h}}{A_{\delta h}} \right); \quad \varpi_{2-h} = \left(\omega_{2-h} - \frac{S_{0h}}{A_{\delta h}} \right);$$

$$\varpi_{1h} \Rightarrow \left(\omega_{1h} - \frac{S_{0h}}{A_{\delta h}} \right); \quad \varpi_{0h} = \left(\omega_{0h} - \frac{S_{0h}}{A_{\delta h}} \right).$$

Главный секториальный момент инерции определяется по формуле:

$$I_{\omega} = \int_A \varpi^2(s) \cdot dA \Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot \int_{L/2} \varpi^2(s) \cdot ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \delta \cdot \left(\left(\frac{\delta_n}{\delta} \right) \cdot \frac{l_{12-}}{3} \cdot \varpi_1^2 + \varpi_2^2 + \varpi_1 \cdot \varpi_2 + l_{2+} \cdot \varpi_{2+}^2 + \int_0^{\beta} \omega \varphi - D^2 \cdot r \cdot d\varphi \right)$$

$$I_{\omega} \cdot \frac{1}{2 \cdot \delta \cdot h^5} \Rightarrow \left(\frac{\delta_n}{\delta} \right) \cdot l_{2+h} \cdot \left(-\frac{S_{0h}}{A_{\delta h}} \right)^2 + \frac{l_{12-h}}{3} \cdot \varpi_1^2 + \varpi_2^2 + \varpi_1 \cdot \varpi_2 +$$

$$+ r_h^3 \cdot \left[l_{2+h}^2 \cdot \left(\frac{3 \cdot \beta}{2} + \frac{\sin 2\beta}{4} - 2 \cdot \sin \beta \right) + l_{2+h} \cdot r_h \cdot \beta - \sin \beta^2 + r_h^2 \cdot \left(\frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta}{2} - \frac{\sin 2\beta}{4} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - 2 \cdot \sin \beta - \beta \cdot \cos \beta \right] - 2 \cdot S_{2-h} \cdot \frac{S_{0h}}{A_{\delta h}} + r_h \cdot \beta \cdot \left(\frac{S_{0h}}{A_{\delta h}} \right)^2; \quad (10)$$

После определения геометрических характеристик, по принципу независимости действия сил, полные нормальные напряжения в произвольной

точке поперечного сечения жесткого тонкостенного Z-образного стержня (с учетом знака) определяются по формуле [7]:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot Y(s) + \frac{M_y}{I_y} \cdot X(s) + \frac{B_\omega}{I_\omega} \cdot \varpi(s), \quad (11)$$

где внутренние усилия:

N , M_x , M_y - соответственно продольная сила и изгибающие моменты относительно главных центральных осей, определяемые методом сечения;

B_ω - бимомент в рассматриваемом поперечном сечении, определяемый из решения дифференциального уравнения для углов закручивания при стесненном кручении тонкостенного стержня открытого профиля.

Библиографический список:

1. Волков В.П., Волкова О.В. Определение геометрических характеристик тонкостенного Z-образного стержня [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2015. №1. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostenogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file.
2. Волков В.П., Волкова О.В. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с закруглением [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2015. №2. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostenogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file.
3. Волков В.П., Волкова О.В. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с закруглением для расчета на изгиб с кручением [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2016. №3. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostenogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file.

4. Волков В.П., Кустова О.В. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с отбортовкой [Электронный ресурс] //Моделирование и механика конструкций. 2016. №4. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostonnogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file .

5. Волков В.П., Кустова О.В. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с отбортовкой и с закруглением [Электронный ресурс] //Моделирование и механика конструкций. 2017. №5. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostonnogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file .

6. Волков В.П., Кустова О.В. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с отбортовкой с учетом изготовления [Электронный ресурс] //Моделирование и механика конструкций. 2017. №6. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostonnogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file

7. Волков В.П., Кустова О.В. Геометрические характеристики тонкостенного Z-образного стержня с отбортовкой и с закруглением с учетом изготовления [Электронный ресурс] //Моделирование и механика конструкций. 2018. №7. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostonnogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file

8. Волков В.П. Напряженно-деформированное состояние тонкостенного Z-образного стержня переменной толщины без закругления. [Электронный ресурс] //Моделирование и механика конструкций. 2019. №8. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no1/stroitel'naya-mechanika/opredelenie-geometricheskih-harakteristik-tonkostonnogo-z-obraznogo-sterzhnya/at_download/file

9. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. М: Высш. шк. 1995. 560 с.