УДК.624.04.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ УСИЛИЙ В ЭЛЕМЕНТАХ ПЛОСКОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ СТАТИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ

Зернов Владимир Викторович,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика».

Зайцев Михаил Борисович,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства, г. Пенза,

кандидат технических наук, доцент кафедры «Механика».

Аннотация

В статье представлена методика определения внутренних усилий в элементах плоских стержневых систем с использованием матрицы уравнений равновесия. При этом дополнительные уравнения для раскрытия статической неопределимости получены из условий неразрывности деформаций (отсутствия перемещений по направлению опорных связей).

Ключевые слова: стержневая система, статическая неопределимость, матрица уравнений равновесия, неразрывность деформаций, внутренние усилия.

DETERMINATION OF INTERNAL FORCES IN THE ELEMENTS OF A FLAT ROD SYSTEM BASED ON A STATIC MATRIX

Zernov Vladimir Victorovich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Candidate of Sciences, Associate Professor of the department "Mechanics".

Zaytsev Mihail Borisovich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Candidate of Sciences, Associate Professor of the department "Mechanics".

Abstract

The article presents a method for determining the internal forces in the elements of flat rod systems using a matrix of equilibrium equations. In this case, additional equations for the disclosure of static indeterminability are obtained from the conditions of continuity of deformations (absence of displacements in the direction of the support bonds).

Keywords: bar system, the redundancies introduced the matrix of equilibrium equations, for the continuity of deformations, internal forces.

Известно[1], что для статически неопределимых стержневых систем количество неизвестных внутренних усилий (опорных реакций) превышает количество уравнений равновесия[2]. В системе уравнений вида

$$AS = P\,, \tag{1}$$

где A – статическая матрица, S – вектор внутренних усилий, P – вектор внешней узловой нагрузки, матрица A будет прямоугольной размерами $3m$ х $3n - p$ (m – количество стержней, n – количество узлов, p – опорных связей).

Необходимое число дополнительных уравнений, требующихся для решения системы (1) определяется количеством «лишних» связей. Эти уравнения могут быть составлены из условий совместности деформаций.

В данной статье предлагается раскрыть статическую неопределимость при помощи дополнительных уравнений, выражающих равенство нулю перемещений закрепленных точек стержневой системы по направлению ее опорных связей.

Рассмотрим стержневую систему, изображенную на рис.1.

а) б)

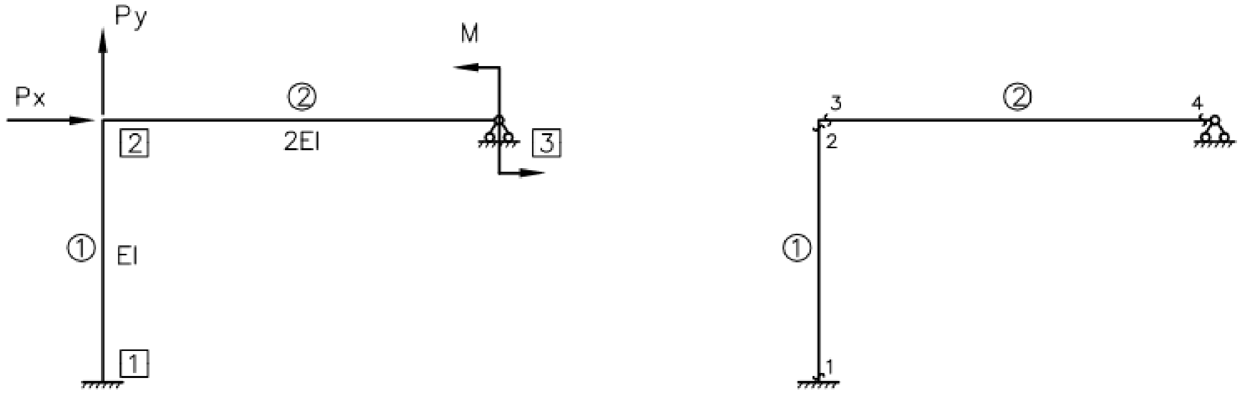

Рисунок 1 - Расчетная схема стержневой системы

а) - нумерация узлов и стержней; б) - нумерация сечений

Жесткость стержней на растяжение (сжатие) *EA* = const, на изгиб *EI*. За неизвестные величины принимаем продольные силы в элементах и изгибающие моменты в начале и конце стержня[3]. Положительные направления неизвестных усилий представлены на рис.2.

а) б)

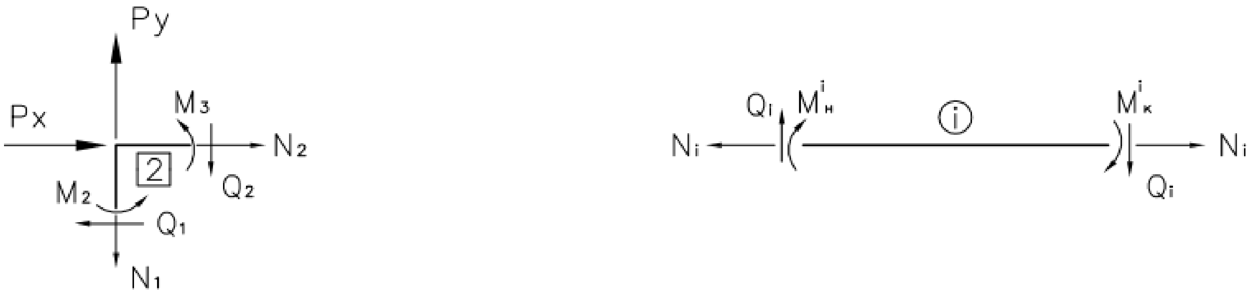

Рисунок 2 - Положительные направления внутренних усилий

а) – в узле, б) – в стержне

При таком правиле знаков для изгибающего момента поперечная сила в *i* - том стержне отрицательна и равна

$$Q_i = \frac{-M_i^{\text{н}} - M_i^{\text{к}}}{l_i}\,. \tag{2}$$

Составив три уравнения равновесия для каждого узла и выразив поперечные силы в стержнях через изгибающие моменты в концевых сечениях по (2) получим статическую матрицу (3). Для удобства алгоритмизации можно составить уравнения равновесия и для закрепленных узлов, а затем из статической матрицы и вектора внешних узловых нагрузок вычеркнуть строки, соответствующие опорным связям.

$$
A=\begin{array}{c|ccc:ccc}
{}^{m\,\mathrm{x}\,3}/_{n\,\mathrm{x}\,3} & N_1 & M_1^{н} & M_1^{к} & N_2 & M_2^{н} & M_2^{к} \\
\hline
\sum X=0 & - & - & - & - & - & - \\
\sum Y=0 & - & - & - & - & - & - \\
\sum M_{\text{уз}}=0 & - & - & - & - & - & - \\
\hdashline
\sum X=0 & 0 & 1/l_1 & 1/l_1 & 1 & 0 & 0 \\
\sum Y=0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1/l_2 & -1/l_2 \\
\sum M_{\text{уз}}=0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hdashline
\sum X=0 & - & - & - & - & - & - \\
\sum Y=0 & - & - & - & - & - & - \\
\sum M_{\text{уз}}=0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}. \qquad (3)
$$

Вектор внешних нагрузок имеет вид:

$$
P=\begin{array}{c|c}
{}^{1}/_{n\,\mathrm{x}\,3} & \\
\hline
\sum X=0 & - \\
\sum Y=0 & - \\
\sum M_{\text{уз}}=0 & - \\
\hdashline
\sum X=0 & -P_x \\
\sum Y=0 & -P_y \\
\sum M_{\text{уз}}=0 & 0 \\
\hdashline
\sum X=0 & - \\
\sum Y=0 & - \\
\sum M_{\text{уз}}=0 & -M
\end{array}. \qquad (3)
$$

Два дополнительных уравнения получим из условия равенства нулю горизонтального и вертикального перемещения узла 3.

Воспользуемся формулой Мора вида

$$\Delta=\sum\int\frac{M_1M}{EI}dx+\sum\int\frac{N_1N}{EA}dx. \qquad (4)$$

Перемещения определим умножив эпюру моментов и продольных сил от внешней нагрузки в заданной системе (рис. 3) на соответствующие эпюры от силы F = 1 в статически определимой системе (рис. 4,5).

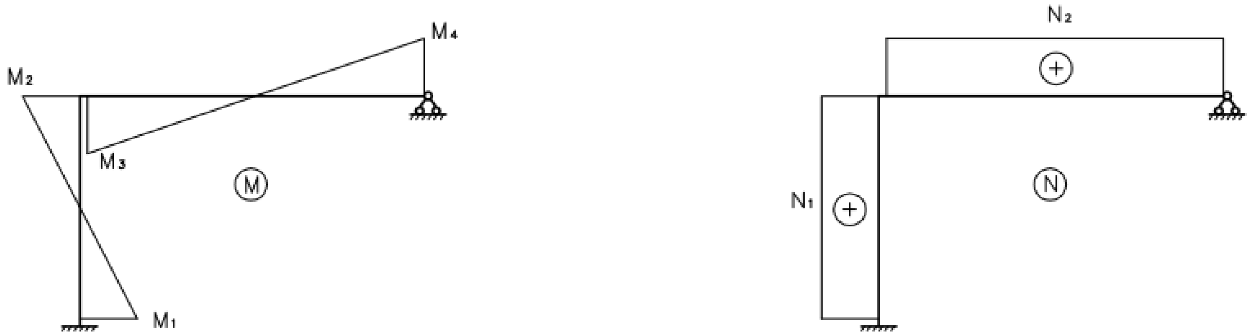

Рисунок 3 - Предполагаемые эпюры усилий от внешней нагрузки с учетом правила знаков

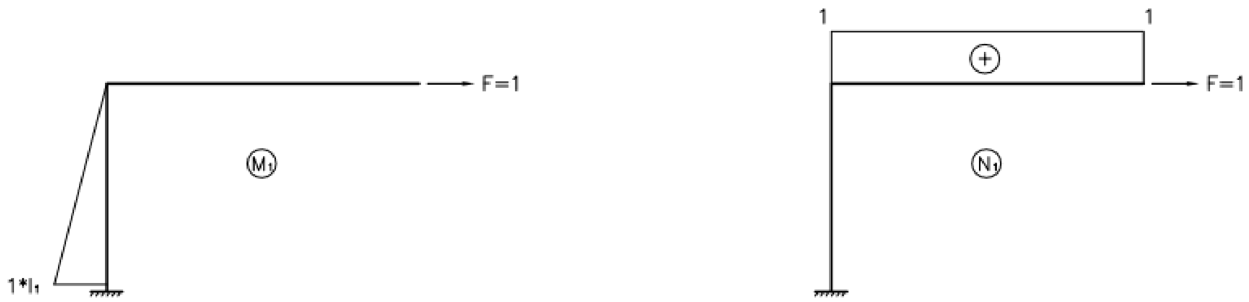

Рисунок 4 - Эпюры усилий от горизонтальной силы F = 1

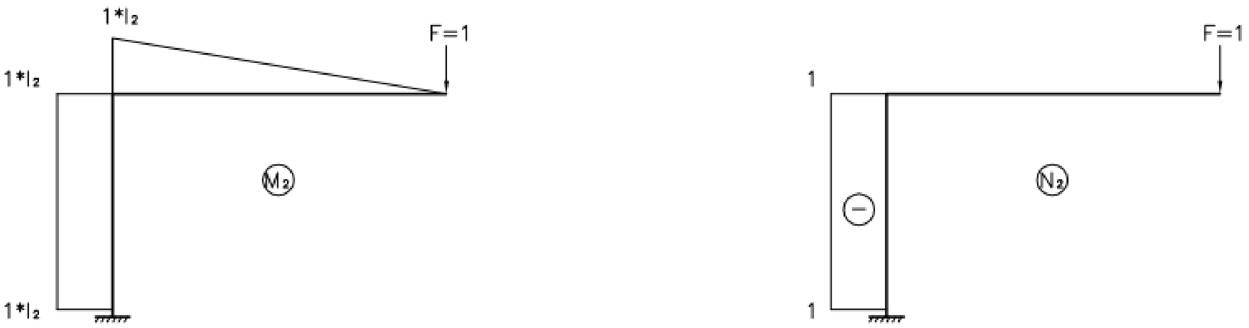

Рисунок 5 - Эпюры усилий от вертикальной силы F = 1

Для прямолинейных эпюр внутренних усилий зависимость (4) можно представить в виде:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{l_i}{6EI}(2M_i^{\text{н}}\cdot M_{i,1}^{\text{н}} + 2M_i^{\text{к}}\cdot M_{i,1}^{\text{к}} + M_i^{\text{н}}\cdot M_{i,1}^{\text{к}} + M_i^{\text{к}}\cdot M_{i,1}^{\text{н}}) + \frac{1}{EA}(N_i\cdot l_i\cdot N_i^{1})\right]$$

,

или

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{l_i}{6EI}\left[M_i^{\text{н}}(2M_{i,1}^{\text{н}} + M_{i,1}^{\text{к}}) + M_i^{\text{к}}(2M_{i,1}^{\text{к}} + M_{i,1}^{\text{н}})\right] + \frac{1}{EA}(N_i\cdot l_i\cdot N_i^{1})\right]. \qquad (5)$$

Тогда первое дополнительное уравнение с учетом знаков

$$\frac{l_1}{6EI}\left[M_1(-2l_1+0)+M_2(0+l_1)\right]+\frac{1}{EA}(N_1\cdot l_1\cdot 0)+$$
$$+\frac{l_2}{12EI}\left[M_3(0+0)+M_4(0+0)\right]+\frac{1}{EA}(N_2\cdot l_2\cdot 1),$$

или

$$-\frac{l_1^2}{3EI}M_1+\frac{l_1^2}{6EI}M_2+\frac{l_2}{EA}N_1=0. \tag{6}$$

Второе дополнительное уравнение

$$\frac{l_1}{6EI}\left[M_1(-2l_2-l_2)+M_2(l_2+l_2)\right]+\frac{1}{EA}(N_1\cdot l_1\cdot(-1))+$$
$$+\frac{l_2}{12EI}\left[M_3(-2l_2+0)+M_4(0+l_2)\right]+\frac{1}{EA}(N_2\cdot l_2\cdot 0),$$

или

$$-\frac{l_1\cdot l_2}{3EI}M_1+\frac{l_1\cdot l_2}{3EI}M_2-\frac{l_2^2}{6EI}M_3+\frac{l_2^2}{12EI}M_4=0. \tag{7}$$

Расширенная статическая матрица с учетом (6) и (7):

$$A^*=\begin{array}{cccccc}
N_1 & M_1^{н} & M_1^{к} & N_2 & M_2^{н} & M_2^{к} \\
\hline
0 & 1/l_1 & 1/l_1 & 1 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 0 & 0 & -1/l_2 & -1/l_2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\dfrac{l_2}{EA} & -\dfrac{l_1^2}{3EI} & \dfrac{l_1^2}{6EI} & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\dfrac{l_1\cdot l_2}{3EI} & \dfrac{l_1\cdot l_2}{3EI} & 0 & -\dfrac{l_2^2}{6EI} & \dfrac{l_2^2}{12EI}
\end{array}.$$

Расширенный вектор внешних нагрузок:

$$P^*=\begin{bmatrix}-P_x\\-P_y\\0\\-M\\0\\0\end{bmatrix}.$$

Вектор внутренних усилий:

$$S = \begin{bmatrix} N_1 \\ M_1^{\text{н}} \\ M_1^{\text{к}} \\ N_2 \\ M_2^{\text{н}} \\ M_1^{\text{к}} \end{bmatrix} = \left(A^*\right)^{-1} P^*.$$

С помощью данного подхода разработано программное средство в среде «MatLab» [2]. Результаты расчета представлены на рис. 6 - 8.

Исходные данные:

Px = 5 кН, Py = 10 кН, M = 20 кНм.

l_1 = 2 м, l_2 = 3 м, EA – const, EI – см. рис.1.

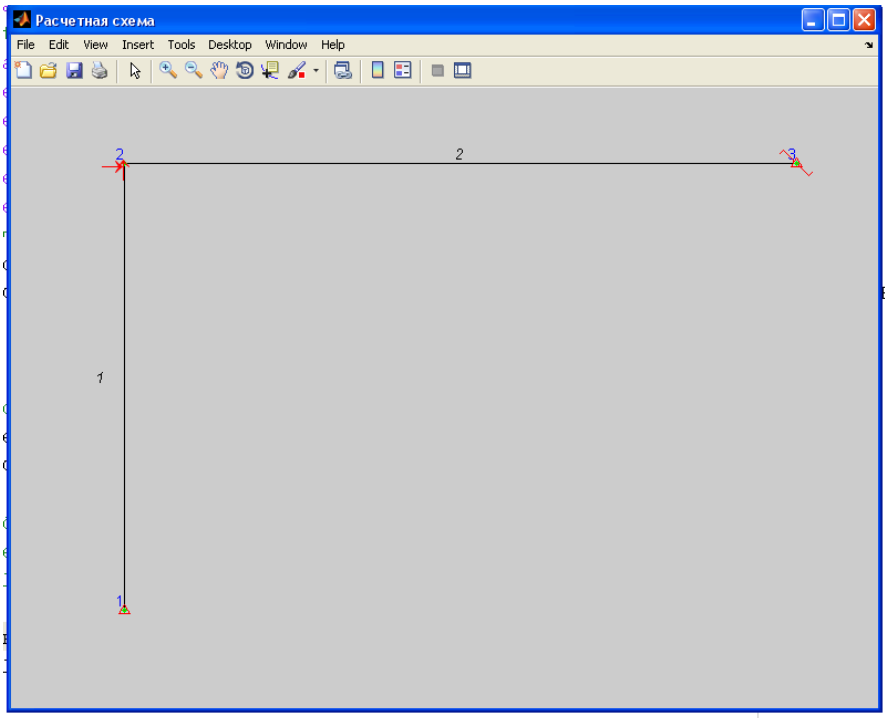

Рисунок 6 - Исходная схема системы

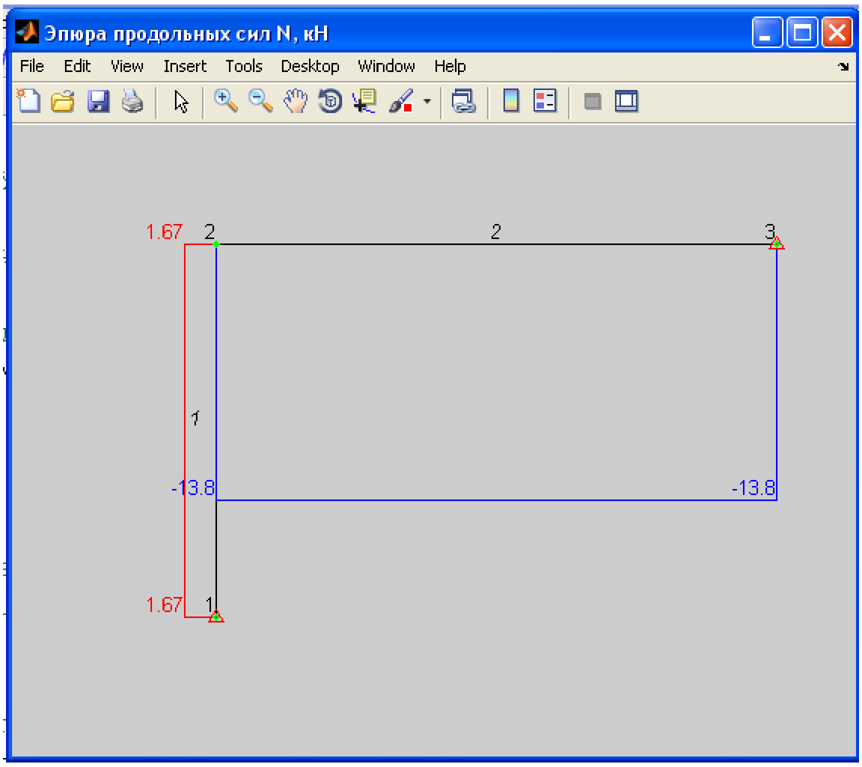

Рисунок 7 - Эпюра продольных сил

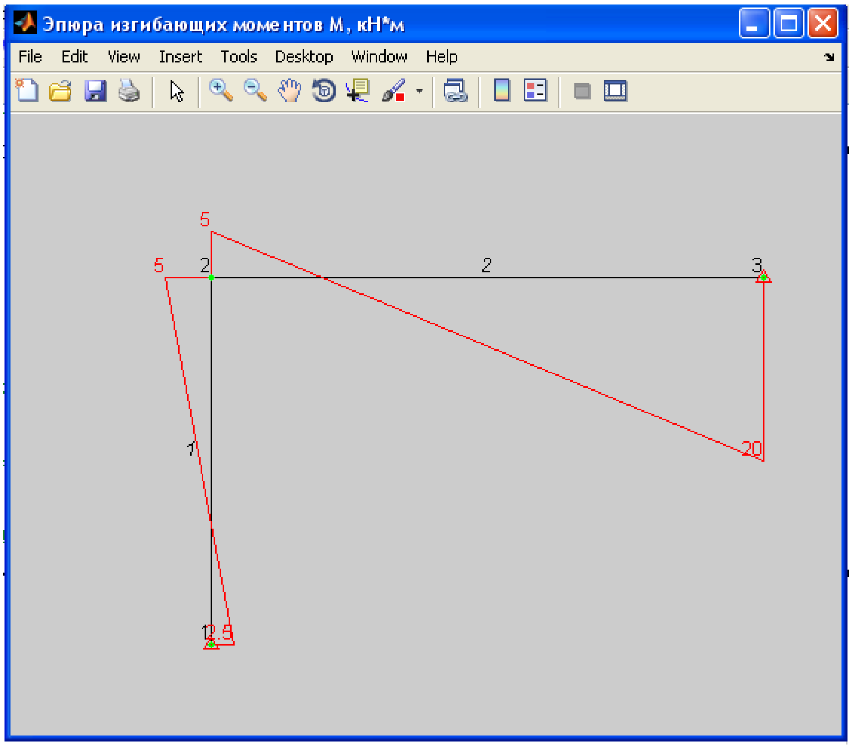

Рисунок 8 - Эпюра изгибающих моментов

Выводы:

1. Представлена методика определения внутренних усилий в элементах плоских стержневых систем с использованием статической матрицы. При этом дополнительные уравнения для раскрытия статической неопределимости получены из условий неразрывности деформаций.

2. Разработанное программное средство в среде «MatLab» показало, что данный подход к расчету плоских стержневых систем легко автоматизируется.

Библиографический список:

1. Шеин А.И., Курс строительной механики: Учебное издание / Издание второе, переработанное. / А.И. Шеин. М.: Издательство АСВ, 2017. 352 с.

2. Монахов В.А., Зайцев М.Б. Расчет стержневых систем с использованием теории графов в среде «Matlab» [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2016. №3. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: http://mechanics.pguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no3/stroitelnaya-mehanika/3.13/at_download/file.

3. Монахов В.А., Зайцев М.Б. Построение кинематической матрицы плоских стержневых систем // Региональная архитектура и строительство. 2019. № 3. С. 130-134.